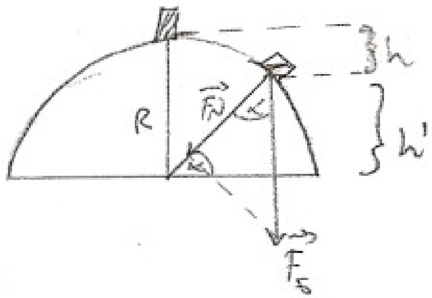
Aufgabe 1:



$E_{pot,0} = E_{pot,h} + E_{kin,h}$
$mgR = mg(R-h) + \frac{1}{2}mv_h^2$ mit $\frac{1}{2}mv_h^2 = mgh$ folgt: $v_h = \sqrt{2gh}$

$\vec{F}_N = \vec{F}_{zp} \Leftrightarrow mg\cos\alpha = m\frac{v_h^2}{R} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{v_h^2}{gR} = \frac{2gh}{gR}$

aus Geometrie: $\cos\alpha = \frac{R-h}{R} \Rightarrow \frac{2h}{R} = \frac{R-h}{R} \Leftrightarrow R = 3h \Rightarrow h = \frac{1}{3}R$

Betrag der Geschwindigkeit am Boden: $v_B = \sqrt{2gR}$

Aufgabe 2:

a) Impulserhaltung:
(I) $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \Rightarrow$
(II) $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$

Energieerhaltung:
$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$
$\Leftrightarrow m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2(v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$ (III)

(II)/(III) : $(v_1 + v_1') = (v_2' + v_2) \rightarrow v_2' = v_1 + v_1' - v_2$ (IV)

(IV) in (I): $\Rightarrow v_1' = \frac{v_1(m_1-m_2)+2m_2v_2}{m_1+m_2}$ *bzw.* $v_2' = \frac{v_2(\cancel{m_1-m_2})+2m_1v_1}{m_1+m_2}$ $m_2 - m_1$

$v_1' = \frac{-\sqrt{2gh}(m_1-m_2)+2m_2\sqrt{2gh}}{}$

b) Geschwindigkeit der Bälle am Boden:
$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v_1 = -\sqrt{2gh}$ *bzw.* $v_2 = +\sqrt{2gh}$
$\Rightarrow v_1' = \frac{\sqrt{2gh}(3m_2-m_1)}{m_1+m_2}$ *bzw.* $v_2' = \frac{\sqrt{2gh}(m_2-3m_1)}{m_1+m_2}$

c) $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$
$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = h\left(\frac{3m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)^2$
$h_2 = h\left(\frac{m_2-3m_1}{m_1+m_2}\right)^2$

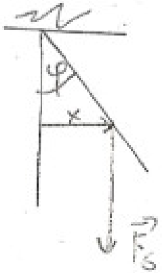
mit: $m_2 = 3m_1 \rightarrow h_1 = h\left(\frac{8m_1}{4m_1}\right)^2 = 4h$ und $h_2 = 0$

Aufgabe 3:

a) $\Theta_{St} = \int x^2 dm$ mit $\rho = \frac{m}{Al} \Leftrightarrow dm = \rho A dx$
$\Theta_{St} = \rho A \int_o^l x^2 dx = ... = \frac{1}{3}ml^2$

$\frac{l}{2}$, da der Schwerpunkt sich bei l/2 befindet.
ausgleichende

b) rückstellendes Drehmoment: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F_G} = xm_{St}g$ mit $x = \frac{l}{2}\sin\varphi$
$M \approx \frac{mgl}{2}\varphi$



Bewegungsgleichung aus $M = \dot{L}$:
$\Theta_{St}\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2}\varphi = 0$ $\quad \frac{1}{3}ml^2 = \Theta_{St}$
$\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}\varphi = 0$
Lösung: $\varphi = \varphi_0\cos(\omega t + \varphi_0), \ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi_0\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2\varphi$
$\Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{2l}$ daraus: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\Theta}{mgl}}$

c) $\Theta_{gesamt} = \Theta_{St} + m_{Scheibe}l^2$ (drehbar)
$\Theta_{gesamt} = \Theta_{St} + m_{Scheibe}l^2 + \Theta_{Scheibe}$ (feste Scheibe)
$\Theta_{ges,dreh} < \Theta_{ges,fest}$
$\Rightarrow$ T ist im festen Fall größer!

Aufgabe 4:

a) Becherglas *Skizze hier weggelassen*
$P(z,r)$ ist in Ruhe, wenn die Tangentialkomponente verschwindet, d.h. $F_{Ges} \perp$ auf Tangente in $P(z,r)$.

$$\tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Weiterhin ist $\tan\alpha$ aber auch die Steigung in $P(z,r)$, also $\tan\alpha = \frac{dz}{dr}$.

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{\omega^2 r}{g}dr \quad \Rightarrow \quad z(r) = \frac{\omega^2}{g}\int_0^r r'dr' = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}r^2 \quad \text{(also eine Parabel)}$$

b) Badewanne *Skizze wie für a)*

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{F_Z}{F_G} = \frac{\omega^2 r}{g}$$

Es gilt die Drehimpulserhaltung, die dann eingesetzt wird:

$$m\omega_0 R_0^2 = m\omega r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega_0^2 R_0^4}{gr^3}$$

$$\int_{z(R_0)}^{z(r)} dz = \int_{R_0}^{r} dr' \frac{\omega_0^2 R_0^4}{gr'^3} = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2 R_0^4}{gr^2}\bigg|_{R_0}^{r} = -\frac{1}{2}\frac{\omega_0^2 R_0^4}{g}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_0^2}\right) \quad \text{(also eine Hyperbel)}$$

Aufgabe 5:

a)

$$\rho = \frac{m}{V} \iff m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l$$
$$\frac{dm}{dt} = \rho \cdot A \cdot \frac{dl}{dt} = \rho \cdot A \cdot V \iff v_i = \frac{dm}{dt}\frac{1}{\rho A_i}$$

Mit Zahlenwerten:

$$v_1 = \frac{3\,\text{kg/s}}{10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 6\,\text{m/s}$$
$$v_2 = \frac{3\,\text{kg/s}}{10^3\,\text{kg/m}^3 \cdot 75 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 0,4\,\text{m/s}$$

b) Mit der Bernoulli-Gleichung:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)\\ &= \frac{1}{2}10^3\,\mathrm{kg/m^3}(36 - 0,16)\,\mathrm{m^2/s^2} = 17,92 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m^2} \approx 0,18\,\mathrm{bar}\end{aligned}$$

Für $p_2 < p_0 = 1\,\mathrm{bar}$ tritt kein Wasser aus. Damit folgt (mit $p_2 > p_1$):

$$p_1 \leq p_2 - \Delta p = 0,82\,\mathrm{bar}$$

c)

$$p_{1,\mathrm{oben}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_2 = p_{1,\mathrm{oben}} + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2)$$

Da dm/dt konstant ist gilt für v_1 und v_2 das gleiche wie in a) und b), damit also

$$\begin{aligned}p_2 &= p_{1,\mathrm{oben}} + \rho \cdot g \cdot h + \Delta p\\ &= 0,5\,\mathrm{bar} + 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\,10\,\mathrm{m/s^2}\,10\,\mathrm{m} + 0,18\,\mathrm{bar} = 0,5\,\mathrm{bar} + 1\,\mathrm{bar} + 0,18\,\mathrm{bar}\\ &= 1,68\,\mathrm{bar}\end{aligned}$$

4) a) Skizze: