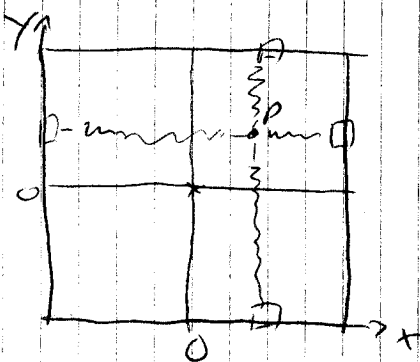


Aufgabe 7



$$P = (x, y)$$

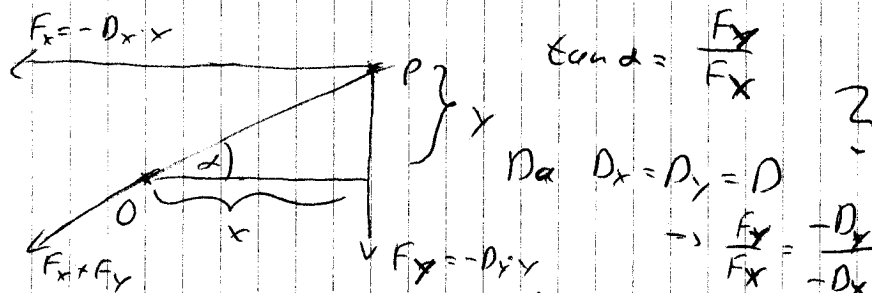
D_x : Federkonstante beid x-Feder
Zusammen

D_y : Federkonstante beid y-Feder

$$\vec{r} = (x, y, 0)$$

$\Rightarrow$ Kraft durch x-Feder: $F_x = -D_x \cdot x$

y-Feder: $F_y = -D_y \cdot y$



Es ist also auch $\tan \alpha = \frac{y}{x}$ für die

Verbindung von P zum Ursprung $\Rightarrow \vec{r}$ und $\vec{F}_x + \vec{F}_y$ sind parallel
 $\Rightarrow \vec{F}_x + \vec{F}_y$ zeigt zum Ursprung. (schönere Skizze hinten)

b) $m \cdot \vec{a} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = m \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -D_x x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -D_y y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_x x \\ -D_y y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} = -D_x x \quad \text{und} \quad m \ddot{y} = -D_y y$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{D}{m} x \quad \text{und} \quad \ddot{y} = -\frac{D}{m} y \quad \Rightarrow x \text{ und } y \text{ sind jeweils harmonische Oszillationen (unabhängig)}$$

$$\Rightarrow x = A \cdot \sin(\omega_x t) \quad \text{und} \quad y = B \cdot \cos(\omega_y t) \quad (z=0)$$

$$\text{mit } \omega_x = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \text{und} \quad \omega_y = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\text{sind Lösung mit } \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t\right); \quad y = B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t\right)$$

$$\dot{x} = A \cdot \frac{D}{m} \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t\right); \quad \dot{y} = -B \cdot \frac{D}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t\right)$$

$$\Rightarrow m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \begin{pmatrix} -A \cdot \frac{D}{m} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \\ -B \cdot \frac{D}{m} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \cdot A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \\ -D \cdot B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x: -A \cdot m \cdot \frac{D}{m} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) = -D \cdot A \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \checkmark$$

$$y: -B \cdot m \cdot \frac{D}{m} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) = -D \cdot B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right) \checkmark$$

$\Rightarrow$ angeschaut $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist eine Lösung!

Bahnkurve: - Gerade (wenn gleichphasig) (oder 780° verschiebt)

- Kreis (mein Bsp, 90° Phasenverschiebung)

- Ellipsenförmig (bei anderen Phasenverschiebung oder bei ungleicher Amplitude)

Falls $D_x \neq D_y$ sind alle Lissajous-Figuren möglich
(keine Ahnung, wie man das richtig schreibt)

$$c) \quad F_x = -D_x \cdot x \quad F_y = -D_y \cdot y$$

$$\Rightarrow \text{Kraftpotential: } \phi = +\frac{1}{2} D_x x^2 + \frac{1}{2} D_y y^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}}^{x,y} = \frac{1}{2} D_x x^2 + \frac{1}{2} D_y y^2 = \text{~~hier steht was anderes~~}$$

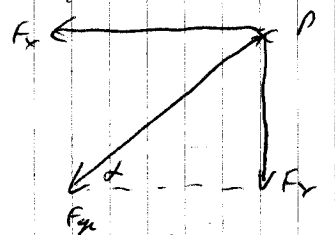
$$E_{\text{pot}} = E_{\text{pot } x} + E_{\text{pot } y} \Rightarrow E_{\text{pot}} \text{ Superposition der einzelnen}$$

Feder $\Rightarrow$ parabol

$$F = \begin{pmatrix} -D_x x \\ -D_y y \end{pmatrix} = -\text{grad } E_{\text{pot}} \Rightarrow \text{parabol auch}$$

Bessere Skizze zu a):

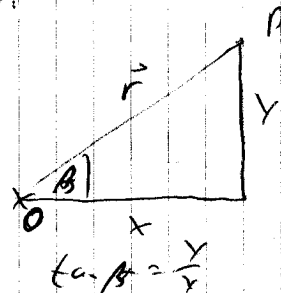
Kräfte:



$$\tan \alpha = \frac{F_y}{F_x} = \dots = \frac{y}{x}$$

$\Rightarrow$ da $\frac{F_y}{F_x} = \frac{y}{x}$ muss $\alpha = \beta \Rightarrow \vec{F}_{\text{ges}}$ zeigt zum Ursprung

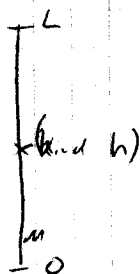
Ortsvektor:



$$\tan \beta = \frac{y}{x}$$

Aufgabe 2

a)



$$\begin{aligned} \Theta_{\text{leer}} &= \int x^2 dm \quad \checkmark \\ &= \int_0^L x^2 \rho dx = \frac{1}{3} \rho L^3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ρ ist Massendichte der Linie, also $\rho = \frac{M}{L}$

$$M = \rho \cdot L \Rightarrow \underline{\Theta_{\text{leer}} = \frac{1}{3} M L^2} \quad \checkmark$$

b) Absprung $\Rightarrow$ Freier Fall aus Höhe h

$$\Rightarrow \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{E_{\text{pot}}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_{\text{kin}}} \Rightarrow v^2 = 2gh \Rightarrow \underline{v = \sqrt{2gh}} \quad \checkmark$$

Kind an Leiter: $\Theta_{\text{Kind}} = m h^2 = \frac{1}{3} m L^2 \quad \checkmark$

$$\Rightarrow \underline{\Theta_{\text{gesamt}} = \Theta_{\text{leer}} + \Theta_{\text{Kind}} = \frac{1}{3} M L^2 + m h^2} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = E_{\text{rot}} = \underbrace{m \cdot g \cdot \frac{L}{2}}_{E_{\text{pot Leiter, Schwerpunkt bei } \frac{L}{2}}} + \underbrace{M \cdot g \cdot h}_{E_{\text{pot Kind}}} = 2mgh$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{2}{\Theta} \cdot g \left(m \frac{L}{2} + M \cdot h \right) \quad \checkmark$$

$$\omega = \frac{v}{r}; \quad r = h \Rightarrow v^2 = \omega^2 \cdot h^2 = \frac{2gh^2}{\Theta} \left(m \frac{L}{2} + M h \right)$$

$$m = M$$

$$\frac{L}{2} = h$$

$$\underline{\underline{v^2 = \frac{2gh^2}{\frac{1}{3} M L^2 + m h^2} (2mh) = 2gh^2}} \quad \checkmark$$

$$v^2 = \frac{2gh^2}{\frac{1}{3} M L^2 + m h^2} (2mh) = \frac{4mgh^3}{\frac{4}{3} m h^2 + m h^2} = \frac{4gh}{\frac{4}{3} + 1} \quad \checkmark$$

$$v^2 = \frac{72}{7} gh \Rightarrow \underline{v_0 = \sqrt{\frac{72}{7} gh}} \quad \checkmark \quad \frac{72}{7} < 2 \Rightarrow v_0 < v_f$$

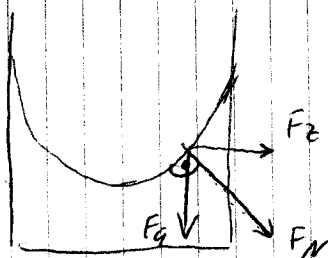
$\Rightarrow$ Das Kind sollte sich an der Leiter festhalten.

(wenn man nur von der Geschwindigkeit ausgeht) $\checkmark$

Da der Vorteil nur klein ist, wäre es im Alltag wohl praktisch abzurufen, da man die Leit. sonst noch erschlägt.

Aufgabe 3:

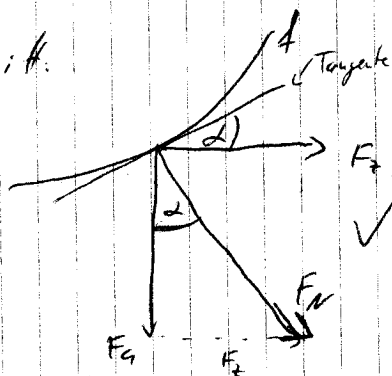
Skizze:



(Gewichtskraft und Zentrifugalkraft)

Im Gleichgewicht wird die ~~Resultat~~ Kraft auf ein Flüssigkeitselement an der Oberfläche durch eine Zentrifugalkraft der Flüssigkeit aufgehoben. Dies ist erfüllt, wenn die Summe aus Gewichtskraft und Zentrifugalkraft senkrecht auf der Wasseroberfläche steht.

Ausschnitt:



$$\vec{F}_N = \vec{F}_z + \vec{F}_g$$

f sei die Funktion der Oberfläche

$$\Rightarrow f' = \tan \alpha$$

Wenn $\vec{F}_N$ senkrecht zur Oberfläche steht ist $\tan \alpha = \frac{F_z}{F_g}$ $F_g = m \cdot g$ wobei m ein Masselement der Oberfläche beschreibt.

$$F_z = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r \quad \omega = \omega_0 \text{ (konst.)}$$

$$\Rightarrow f' = \tan \alpha = \frac{m \omega_0^2 r}{m g} = \frac{\omega_0^2}{g} \cdot r$$

$$\Rightarrow f = \int_0^x f' dr = \frac{\omega_0^2}{2g} x^2 + C$$

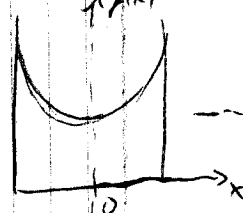
Wähle Koordinatensystem, so dass $C = 0$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega_0^2}{2g} x^2$$

beschreibt die Oberfläche

x der Abstand zur Symmetrieachse ist.

$\Rightarrow$ Oberfläche nimmt eine Parabel Form an (bzw. in 3-dimensionaler Rotation: Parabel)



zu wählender 0-Niveau!

Aufgabe 4:

a) Vor Stoß v_1, v_2, m_1, m_2

$\Rightarrow$ Ball m_2 berührt Boden, führt elastischen

Stoß aus $\Rightarrow$ Springt mit $v_2 = -v_{2\text{alt}}$ zurück

$\Rightarrow$ Bälle treffen mit v_1, m_2 aufeinander

$\Rightarrow$ Impulserhaltung: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$ ✓

Energie: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$ ✓

$$E\text{-Erhaltung: } \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = \frac{1}{2} m_2 (v_2'^2 - v_2^2) \quad \text{I}$$

$$\text{Imp: } m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2) \quad \text{II}$$

$$\frac{\text{I} \cdot 2}{\text{II}}: v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow v_1' = v_2' + v_2 - v_1$$

$$\text{in II: } m_1 (v_1 - v_2' - v_2 + v_1) = m_2 (v_2' - v_2)$$

$$\Rightarrow -m_1 v_2' + 2m_1 v_1 - m_1 v_2 = m_2 v_2' - m_2 v_2$$

$$v_2' (m_2 + m_1) = 2m_1 v_1 - m_1 v_2 + m_2 v_2$$

$$\Rightarrow v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \quad \checkmark$$

v_1' und $v_2' = v_1' + v_1 - v_2$ in II eingesetzt

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_1' + v_1 - v_2 - v_2)$$

$$-m_1 v_1' + m_1 v_1 = m_2 v_1' + m_2 v_1 - 2m_2 v_2$$

$$(m_2 + m_1) v_1' = m_1 v_1 - m_2 v_1 + 2m_2 v_2$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \checkmark$$

b) Fall aus Höhe h : $F = m \cdot g \Rightarrow v = g \cdot t$

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \quad \text{mit } s = h: t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Bälle 1 und 2 haben gleiche Fallweg
(da Ball 1 hoch steigt, so dass sich auch aufhört)

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \quad (\text{vor erstem Bodenkontakt})$$

Große Ball ~~mit~~ ^{schon} ~~schon~~ ^{schon} elastisch Stoß durch

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \quad v_2 = -\sqrt{2gh} \quad \checkmark \quad \left(1 \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow v_1' = \frac{\sqrt{2gh}(m_1 - m_2) - 2m_2\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{\sqrt{2gh}(m_1 - m_2 - 2m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{\sqrt{2gh}(m_1 - 3m_2)}{m_1 + m_2} = v_1' \quad \left(\frac{1}{2}\right) \checkmark$$

$$v_2' = \sqrt{2gh} \cdot \frac{(m_1 - m_2) + 2m_1}{m_1 + m_2} = \sqrt{2gh} \cdot \frac{(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} = v_2' \quad \checkmark$$

$$c) \quad \frac{1}{2}mv^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

$$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{2gh}{2g} \cdot \left(\frac{(m_1 - 3m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 = h \cdot \left(\frac{(m_1 - 3m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 \quad \checkmark \quad \textcircled{1}$$

$$h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{2gh}{2g} \cdot \left(\frac{(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 = h \cdot \left(\frac{(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right)^2 \quad \checkmark$$

$$m_2 = 3m_1 \Rightarrow h_1 = h \cdot \left(\frac{m_1 - 9m_1}{m_1 + m_1}\right)^2 = \frac{4}{16}h = \frac{1}{4}h \quad \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$h_2 = h \cdot \left(\frac{3m_1 - 3m_1}{m_1 + m_1}\right)^2 = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ Ball 2 bleibt am Boden, Ball 1 steigt bis $\frac{1}{4}h$.

