1. Klausur zur Einführung in die Physik I WS 2002/2003

Aufgabe 1:
a) iv
b) iii,iv,v
c) i,iv,v
d) iii
e) B
f) iii
g) i: E und P; ii)nur P Aufgabe 2: Schlittenfahrt:

a. Siehe Loopingaufgabe: Zentrifugalkraft muss kleiner-gleich sein, als Erdanziehung!
$F_Z = mv^2/R < mg \Rightarrow v = \sqrt{Rg} = 10\frac{m}{s}$ v in Energieerhaltung:
$mg(\frac{h}{2} - R) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mRg \Rightarrow$
$mgh - 2mgR = mgR \quad \Rightarrow \quad h = 3R = 30m$

b. Federspannung, Energieerhaltung:
$E_{POT} = E_{Feder} = mgh = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2mgh}{k}} = 10m$

c. Energieerhaltung und Reibungsfreiheit $\Rightarrow$ Anfangshöhe $h = 30m$

d. Crash und Reibung:
Energieerhaltung:
$E_{Feder} = E_{POT1} + E_{POT2} - -E_{Diss} - E_{Reibung-schief} - E_{Reibung-eben}$
$\frac{1}{2}kx^2 = m_1gh + m_2g(h/2 + R) - E_{Diss} - E_{Reibung-schief} - E_{Reibung-eben}$
E_{Diss} entspricht disspierte Energie beim total inelastischen Stoss: v wie gehabt $v_1 = \sqrt{gR}$
v_1 Geschwindigkeit Schlitten 1; v_2 Geschwindigkeit Schlittenklumpen.
Impulserhaltung: $m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_2 \quad \Rightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = 0.8v_1 = 8\frac{m}{s}$
$E_{Diss} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}v_1^2 = \frac{1}{2}v_1^2(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1+m_2}) = \frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}v_1^2$
Hanglänge: $L = \frac{h/2}{\sin\phi}$
$E_{Reibung-schief} = F_N \cdot \mu_R \cdot L = mg\cos\phi\mu_R\frac{h/2}{\sin\phi} = (m_1+m_2)\cdot g\cdot\mu_R h/2\cot 45^o = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \mu_R \cdot h/2$
$E_{Reibung-eben} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \mu_R \cdot l$
$E_{Reibung-gesamt} = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \mu_R \cdot (l + h/2) = 52500kJ$
$\frac{1}{2} = m_1gh + m_2g(\frac{h}{2} + R) - \frac{1}{2}\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}R \cdot g - (m_1 + m_2)g \cdot \mu_R \cdot (l + \frac{h}{2})$
$x = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{k}(2m_1h + m_2(h + 2R) - 0.2 \cdot R \cdot m_1) - (m_1 + m_2)\mu_R(l - \frac{h}{2}}$ Einsetzten $\Rightarrow 10m$
Andere Möglichkeit der Rechnung: Energiebilanzaufstellung auf dem Hügel:
$E_{Feder} = E_{POT} + E_{KIN} - E_{Reibung-gesamt}$
$\frac{1}{2}kx^2 = (m_1 + m_2) \cdot (g \cdot \left(R + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}v_2^2 - g\cot 45^o\frac{h}{2} - g \cdot \mu_R \cdot l\right) = (m_1 + m_2) \cdot g \cdot R(2.5 + 0.5 \cdot 0.64 - 0.15 \cdot -0.27)$
$x = \sqrt{\frac{2(m_1+m_2)\cdot g \cdot R \cdot 2.4}{k}} = 10m$
Dies ist die einzige Stelle, an der ein Taschenrechner nützlich gewesen ist, das Einsetzten der Zahlen wurde aber nicht bepunktet, die Endformel genügte!!!!

Aufgabe 3: Streufahrzeug

a. Beschleunigung

$$F = konst = m(t) \cdot a(t); \quad m(t) = m_0 - \mu \cdot t \Rightarrow a(t) = \frac{F}{m_0 - \mu \cdot t} \tag{1}$$

b. kinetische Energie

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt = \int_0^t \frac{F}{m_0 - \mu \cdot t} dt = -\frac{F}{\mu} \cdot \ln \frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0} \tag{2}$$

$$E_{KIN}(t) = \frac{1}{2} \cdot m(t) \cdot v(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot (m_0 - \mu \cdot t)(\frac{F}{\mu})^2 \cdot \left(\ln \frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0}\right)^2 \tag{3}$$

c. geleistete Arbeit

$$E_{geleistet}(t) = F{\cdot}x(t) = F \int_0^t \int_0^t a(t)dt^2 = F \int_0^t v(t)dt = -\frac{F^2}{\mu} \int_0^t \cdot \ln \frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0} dt = \tag{4}$$

Substitution: $k = \frac{m_0 - \mu t}{m_0} \Rightarrow dt = \frac{m_0}{-\mu} dk$

$$E_{geleistet}(t) = \frac{m_0 F^2}{\mu^2} \int_0^t \ln k dk = \frac{m_0 F^2}{\mu^2} (k \ln k - k)|k = \frac{m_0 - \mu t}{m_0} \tag{5}$$

$$E_{geleistet}(t) = \frac{m_0 F^2}{\mu^2} \left(\frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0} \ln \frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0} - \frac{m_0 - \mu \cdot t}{m_0} + 1\right) \tag{6}$$

d. Die geleistete Energie ist größer, da sie auch am mitgeführten und ausgeworfenem Streugut geleistet wird.

Aufgabe 4: Hohlzylinder

Ein Hohlzylinder rollt eine schiefe Ebene mit $\alpha = 40^o$ herunter. Der Zylinder startet in einer Höhe h. (Vernachlässigen sie Reibung.) (Für die Lösung benutze ich immer $m = m_{HZ} = m_{Hohlzylinder}$

a. Berechnen sie das Trägheitsmoment eines Holzylinders, mit der Länge l, dem Innenradius r und dem Aussenradius R bezüglich seiner Symmetrie-Rotationsachse.
A: Trägheitsmoment eines **Zylinder** bezüglich seiner Symmetrieachse (hier z):

$$\text{Volumenelement in Zylinderkoordinaten}: \; dV = rdrd\phi dz$$

$$\theta_Z = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int\int\int (x^2+y^2)\cdot dx\cdot dy\cdot dz \Rightarrow \rho \int\int\int r^2\cdot r\cdot dr\cdot d\phi\cdot dz \quad (7)$$

Konkret mit Grenzen:

$$\theta_Z = \rho \int_0^l \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz = \rho \frac{R^4 \pi l}{2} = \frac{mR^2}{2}$$

Hohlzylinder: Integrationsgrenzen der Radius nur von r bis R

$$\theta_{HZ} = \rho \int_0^l \int_r^R \int_0^{2\pi} r^3 \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz = \rho \frac{(R^4 - r^4)\pi l}{2} = \quad (8)$$

Masse des Hohlzylinders:

$$M_{HZ} = m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi (R^2 - r^2) l \quad (9)$$

Trägheitsmoment des Hohlzylinders (9) in (8):

$$\theta_{HZ} = \rho \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)\pi l}{2} = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2) \quad (10)$$

θ_{aussen} bezüglich des Aussenradius: Steinerscher Satz:

$$\theta_{aussen} = \theta_{HZ} + mR^2 = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} + mR^2 = \frac{m}{2}(3R^2 + r^2) \quad (11)$$

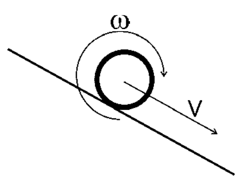
kann für den b-Teil verwendendet werden, geht aber auch anders (siehe die beiden alternative Lösungen)

b. Berechnen sie die Geschwindigkeit des Hohlzylinders am unteren Ende der Ebene. **A:**
Energiebetrachtung; keine intermediären Lösungen (keine Bewegungsgleichung)
Hier gibt es 2 alternative Lösungsmöglichkeiten:

- Man betrachte eine Rotation bezüglich des Rotations-Symmetrie-Achse

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \theta_{HZ} \omega^2 \quad (12)$$

ω ausgedrückt in v mit $(U = 2\pi R)$:
Die Punktgeschwindigkeit am Aussenrand = der Fortbewegungsgeschwindigkeit:



$$v = \frac{s}{t} = \frac{U}{T} = 2\pi R \frac{\omega}{2\pi} = R \cdot \omega \;\Rightarrow\; \omega = \frac{v}{R} \tag{13}$$

(13) in (12):

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2R^2} \theta_{HZ} v^2 \tag{14}$$

aufgelöst nach v

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{1}{R^2}\theta_{HZ}}} \tag{15}$$

mit $\theta_{HZ} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{1}{R^2}\frac{m}{2}(R^2 + r^2)}} = \sqrt{\frac{4gh}{3 + \frac{r^2}{R^2}}} \tag{16}$$

- Die kinetische Energie versteckt sich in der Rotationsenergie! Man betrachte eine beschleunigte Rotation bezüglich des Aussenrandes des Hohlzylinders, damit fällt der $\frac{1}{2}mv^2$-Term weg.

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}\theta_{aussen}\omega^2 = \frac{1}{2}\theta_{aussen}\left(\frac{v}{R}\right)^2 \tag{17}$$

$$v = \sqrt{2\frac{mghR^2}{\theta_{aussen}}} \tag{18}$$

mit $\theta_{aussen} = \frac{m}{2}(3R^2 + r^2)$

$$v = \sqrt{2\frac{mghR^2}{\frac{m}{2}(3R^2 + r^2)}} = \sqrt{\frac{4gh}{3 + \frac{r^2}{R^2}}} \tag{19}$$

Wie erwartet sind die Endgeschwindigkeiten bei beiden Rechenwegen gleich (16)=(19)

c. Geben sie die Geschwindigkeit nach einer Rolllänge von $10m$ (nachdem der Zylinder unten angekommen ist) an.
A: dieselbe wie in b (Energieerhaltung da keine Reibung)

Aufgabe 5: Fallschirm

a. $F_{beschl} = m \cdot a = \dot{v}; \quad F_R = -C \cdot v; \quad G = m \cdot g$
DGL:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = G - F_R \tag{20}$$

$$m\frac{dv}{dt} = m \cdot g - C \cdot v \tag{21}$$

$k = \frac{C}{gm}$
item Lösen durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{1-kv} = gdt; \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{1-kv} = g\int_0^t dt \tag{22}$$

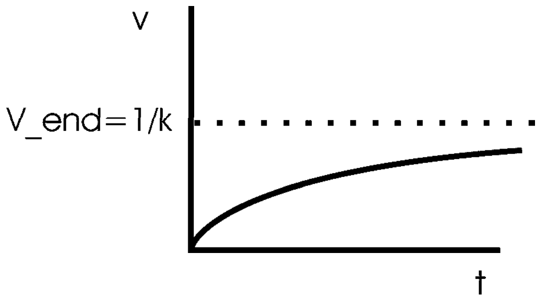
$$\left[-\frac{1}{k}\ln(1-kv)\right]_{v_0}^{v} = -\frac{1}{k}\ln(1-kv) + \frac{1}{k}\ln(1-kv_0) = -\frac{1}{k}\ln\left|\frac{1-kv}{1-kv_0}\right| = gt \tag{23}$$

(Achtung oben: Minuszeichnen gedreht!)

$$\frac{1-kv}{1-kv_0} = e^{-kgt} \tag{24}$$

$$v(t) = \frac{1}{k}(1-(1-kv_0)e^{-gkt}) = \frac{gm}{C}(1-(1-kv_0)e^{-gkt}) \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{gm}{C}(1-e^{-\frac{C}{m}t}) = \frac{gm}{C} \tag{26}$$



v(t) des Fallschirmspringers mit Grenzgeschwindigkeit $v_{end} = \frac{1}{k} = \frac{gm}{C}$;
Zeichnung für $v_0 = 0$

b. Ort $x(t)$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{1}{k}\int_0^t (1-(1-kv_0)e^{-kgt})dt = \frac{1}{k}\left(t + (1-kv_0)\frac{1}{kg}e^{-kgt} - (1-kv_0)\right) \tag{27}$$

$$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{gm}{C}\int_0^t (1-(1-\frac{C}{gm}v_0)e^{-\frac{C}{m}t})dt = \frac{gm}{C}\left(t + (1-\frac{C}{gm}v_0)\frac{m}{C}e^{-\frac{C}{m}t} - (1-\frac{C}{gm}v_0)\right) \tag{28}$$

c. Da die Geschwindigkeit gegen einen konstanten Wert geht, geht die Beschleunigung gegen 0, d.h. verschwindet.