Aufgabe 1:

a) (i) und (ii) und (iv) 1 Punkt
b) (i) 1 Punkt
c) (i) 1 Punkt
d) (iv) 1 Punkt
e) (B) 1 Punkt
f) (iv) 1 Punkt
g) (i) und (ii) 2 Punkte
h (i) und (iii) und (iv) und (v) 0.5 plus 0.5 Punkt

Aufgabe 2: **Venturi Rohr** (Punkte)

a. **Volumenstrom**
Für diesen Aufgabenteil wird nur die rechte Hälfte der Skizze benötigt.
Volumenstrom: $I_{Wasser} = I_W = v \cdot A$

$$\text{BERNOULLI}: \quad p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \varrho g h_2 = KONSTANT \tag{1}$$

$$\text{Kontinuitätsgleichung}: \quad v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_2} \tag{2}$$

$A = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$
BERNOULLI (kleiner Querschnitt auf großen Querschnitt) (Höhe konstant):

$$p_1 + \frac{\varrho_W}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho_W}{2} v_2^2 = KONSTANT \tag{3}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\varrho_W}{2}(v_2^2 - v_1^2) v_2 = \frac{\varrho_W}{2}\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = \frac{\varrho_W}{2}\left(1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\right) \tag{4}$$

Venturi Rohr, Druckunterschiedsmessung via Bernoulli (diesmal mittels h):

$$\Delta p = g h \varrho_{HG} - h \varrho_W = g h (\varrho_{HG} - \varrho_W) \tag{5}$$

(5) in (4) auflösen nach v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{\frac{2gh}{\varrho_W}(\varrho_{HG} - \varrho_W)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \tag{6}$$

Volumenstrom:

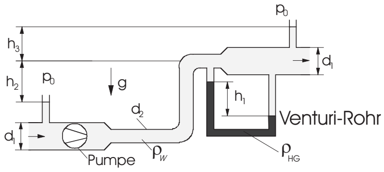
$$I_W = \frac{\pi}{4} d_2^2 \sqrt{\frac{2gh(\frac{\varrho_{HG}}{\varrho_W} - 1)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \tag{7}$$

b. **Pumpleistung**
Wieder Bernoulli, diesmal wird der h-Term genutzt, der v-Term bleibt gleich.
Man beachte, die Pumpe beeinflusst nicht den Fluss, sie wird nur benötigt, um die Höhe zu überwinden, bei einer Geschwindigkeitsänderung würde nämlich der Startdruck p_0 sinken und damit auch die Startsäule! Ausserdem würde die Kontiniutätsgleichung verletzt.
Betrachtung und und oben:

$$p_{Pumpe} + p_0 + \frac{1}{2}\varrho_W v_1^2 + 0 = p_0 + \frac{1}{2}\varrho_W v_1^2 + \varrho_W g(h_2 + h_3) \tag{8}$$

$$p_{Pumpe} = \varrho_W g(h_2 + h_3) \tag{9}$$

$$Pumpleistung: \Delta p \cdot I_W = \Delta p \cdot v_2 \cdot A_2 = \varrho_W g(h_2 + h_3) \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2 \sqrt{\frac{2gh(\frac{\varrho_{HG}}{\varrho_W} - 1)}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \tag{10}$$



Aufgabe 3: Harry Potter und Hagrid: (Punkte)
Dieser Aufgabe liegt ein umgekehrter inelastischer Stoss zugrunde oder auch die Erhaltung des Schwerpunktimpulses. Als Zwischenrechnung muss ein schiefer Wurf gerechnet werden. Schlussendlich eine Energiebetrachtung.

$m_{Auto} = m_a = 800\ kg,\ m_{Hagrid} = m_h = 400\ kg,\ h = 105\ m:\ v_0 = 20\frac{m}{s},\ t = 5\ s,\ x = 85\ m$
(m_{Auto} schließt Harry Potter, nicht aber Hagrid mit ein!)
Achtung 1 Vorzeichen beachten! Hagrid springt zwar nach hinten, wegen seiner aktuellen Eigenbewegung v_0 landet er schlussendlich im positiven Bereich, der schiefe Wurf geht in positive Richtung. $\Rightarrow$ Vorzeichen, d.h. $|v_0| > |v_{hx}|$
Achtung 2: Beachten, ob im CMS oder im Bodensystem (aussenstehender Betrachter) gerechnet wird. Die ist für x-Richtung relevant, da Hagrid eine Grundgeschwindigkeit vom Auto mitnimmt. Diese Rechnung komplett im Bodensystem:

a. **Skizze**

b. E_{KIN}; zuerst schiefer Wurf!

$$(m_a + m_h) \cdot \vec{v}_0 = m_h \cdot \vec{v}_h + m_a \cdot \vec{v}_{end} \tag{1}$$

$v_a = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{v}_h = \begin{pmatrix} v_{h1} \\ v_{h2} \end{pmatrix} =?; \qquad \vec{v}_{end} =?$

Betragsrechnung:

$$x = v_{hx}t \quad \Rightarrow \quad v_{hx} = \frac{x}{t} = 17)\frac{m}{s}; \quad \Rightarrow \text{im CMS } v_{hx-CMS} = v_{hx} - v_0 = -3\ \frac{m}{s} \tag{2}$$

$$h + v_{hy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{hy} = \frac{1}{2}gt - \frac{h}{t} = 25\ \frac{m}{s} - 21\ \frac{m}{s} = 4\ \frac{m}{s} \tag{3}$$

$$\vec{v}_h = \begin{pmatrix} v_{hx} \\ v_{hy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{t} \\ \frac{1}{2}gt - \frac{h}{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$$

$$\vec{v}_{end} = \frac{m_a + m_h}{m_a}\vec{v}_0 - \frac{m_h}{m_a}\vec{v}_h = \frac{3}{2}\vec{v}_0 - \frac{1}{2}\vec{v}_h \tag{4}$$

$$\vec{v}_{end} = \frac{1}{m_a}\left[(m_a + m_h) \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} - m_h \cdot \begin{pmatrix} \frac{x}{t} \\ \frac{1}{2}gt - \frac{h}{t} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{m_a}\begin{pmatrix} m_a \cdot v_0 + m_h \cdot v_0 - m_h\frac{x}{t} \\ +m_h\frac{h}{t} - m_h\frac{1}{2}gt \end{pmatrix} \tag{5}$$

Mit Zahlen:

$$\vec{v}_{end} = \left[\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix}\right]\frac{m}{s} = \begin{pmatrix} \frac{43}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\frac{m}{s} \quad \Rightarrow \text{im CMS } \vec{v}_{end-CMS} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\frac{m}{s} \tag{6}$$

Energie:

$$E_{KIN-Auto} = \frac{1}{2}m_a(\vec{v}_{end})^2 = \frac{1}{2}m_a\left(\frac{1}{m_a}\begin{pmatrix} m_a \cdot v_0 + m_h \cdot v_0 - m_h\frac{x}{t} \\ +m_h\frac{h}{t} - m_h\frac{1}{2}gt \end{pmatrix}\right)^2 \tag{7}$$

Mit Zahlen:

$$E_{KIN-Auto} = 400\left(\begin{pmatrix} \frac{43}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\right)^2 J = 400\left(\left(\frac{43}{2}\right)^2 + 4\right)J = 186,5kJ \tag{8}$$

c. Energiedifferenz:

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_a\vec{v}_{end}^2 + \frac{1}{2}m_h\vec{v}_h^2 - \frac{1}{2}(m_a + m_h)\vec{v}_0^2 \tag{9}$$

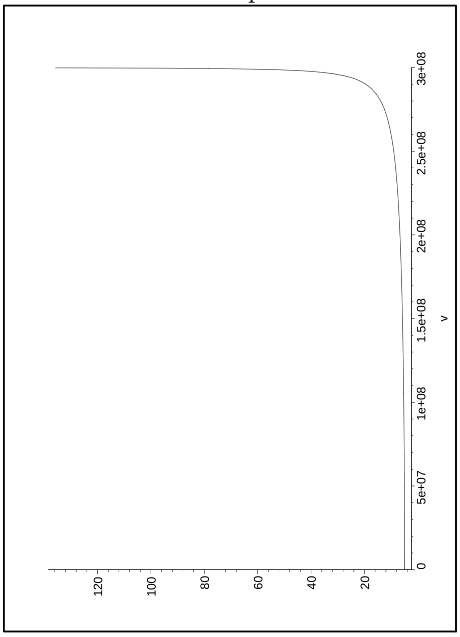
$$\Delta E = 186,5kJ + 200((17)^2 + 16)J - 600 \cdot 400J = (186,5 + 61 - 240)kJ = 7,5kJ \tag{10}$$

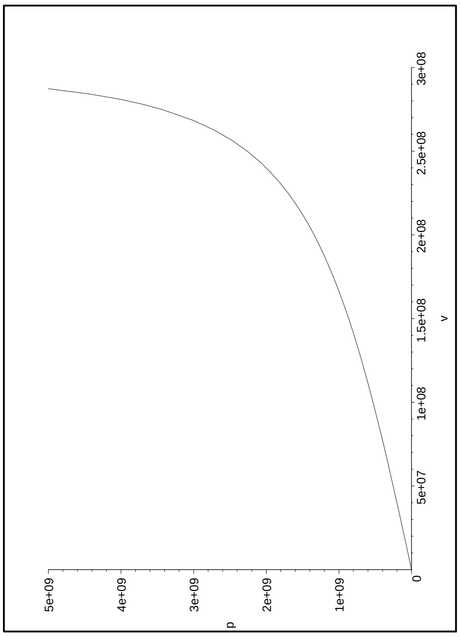
Aufgabe 4: *Relativitätstheorie* (Punkte)
Voyager und Camelot

a. Längenkontraktion:

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l = \sqrt{1 - \frac{(c/2)^2}{c^2}} \cdot 344m = 0,866\dot{3}44m = 297,91 \tag{1}$$

b. Skizze Masse und Impuls vs. v





c. Betrachten wir die Ereignisse im Bezugssystem S: Damit das Paket die Camelot erreicht, das in einem x-Abstand $\delta x = d$ entlangfliegt, muss es ebenso wie die Camelot eine Geschwindigkeit $U_y = \frac{c}{2}$ besitzen. Somit muss in S für die Geschwindigkeiten gelten:

$$u_y = \frac{c}{2}; \qquad u_x = \sqrt{u^2 - u_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3c}{4}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}c$$

System S' sei das Ruhesystem der Voyager mit den Koordinaten x', y' und z' parallel zu den Koordinaten x, y und z von S. Da sich S' gegenüber S mit der Geschwindigkeit $v_1 = -\frac{c}{2}$ in y-Richtung bewegt, ergibt sich die Lorentztransformation der Geschwindigkeiten wie folgt:

$$u'_y = \frac{u_y - v_1}{1 - \frac{v_1 u_y}{c^2}}; \qquad u'_x = \frac{u_x}{\gamma(1 - \frac{v_1 u_y}{c^2})}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

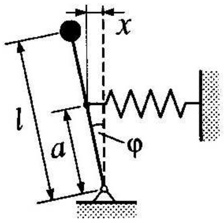
Somit erhalten wir

$$u'_y = \frac{c/2 + c/2}{1 + 0.5 \cdot 0.5} = \frac{4}{5}c; \qquad u'_x = \frac{\sqrt{5}/4}{2/\sqrt{3} \cdot (1 + 0.5 \cdot 0.5)}c = \frac{\sqrt{15}}{10}c$$

Die Voyager muss also das Paket unter dem Winkel α' in Richtung der Camelot abwerfen, der gegeben ist durch:

$$\tan\alpha' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{8}{\sqrt{15}}; \quad \alpha' = 64.2^o$$

Aufgabe 5: *Harmonische Drehschwingung* (Punkte)



a. **A:**

Drehbewegung	Lineare Bewegung
φ	s=x
$\omega = \dot{\varphi}$	$v = \dot{s} = \dot{x}$
$a = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$	$a = \dot{v} = \ddot{s} = \ddot{x}$
M	F
θ	m
$M = \theta\ddot{\varphi}$	$F = ma$
$c \cdot \varphi + \theta \cdot \ddot{\varphi} = 0$	$k \cdot x + m \cdot \ddot{x} = 0$

Normalform Schwingungsgleichung (frei ungedämpft):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0; \qquad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

b. DLG:
Benötigt:
Trägheitsmoment: $\Theta = l^2 m$
$x = a \sin\varphi$
KLEINE WINKELNÄHERUNG: $\sin\varphi \approx \varphi; \qquad \cos\varphi = 1$
Drehmoment der Feder $M = -Fa = -kxa = -ka^2\varphi$
Drehmoment aus Gewichtskraft mg: $M = mgl\sin\varphi = mgl\varphi$
Drehmoment allgemein $M = \Theta \cdot \ddot{\varphi}$

$$\text{DGL} \qquad (-ka^2 - mgl)\varphi = ml^2\ddot{\varphi}$$

$$\text{DGL} \qquad \ddot{\varphi} + \frac{ka^2 - mgl}{ml^2}\varphi = 0 \qquad (= \ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi) \tag{1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{ka^2 - mgl}{ml^2} \tag{2}$$

c. **Lösen**

$$\varphi(t) = A\sin(\omega_0 \cdot t) \text{ with } \omega_0 \neq \omega \tag{3}$$

$$\dot{\varphi}(t) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \tag{4}$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \tag{5}$$

$$\text{Lösung}: \quad \varphi(t) = A\sin(\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{g}{l}} \cdot t) \tag{6}$$

d. **Eigenfrequenz:**
(3) und (5) einsetzten in (1) $\Rightarrow$ (2)

$$-A \cdot \omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + \frac{ka^2 - mgl}{ml^2} A\sin(\omega_0 \cdot t) = 0 \qquad \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{ka^2 - mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{g}{l}} \tag{7}$$

e. Bei einer harmonischen Schwingung gilt $\omega_0^2 > 0$

$$\omega_0^2 = \frac{ka^2 - mgl}{ml^2} \Rightarrow a > \sqrt{\frac{mgl}{k}} \tag{8}$$