Institut für Experimentelle Kernphysik WS 2003/04

Klausur 2003 Physik I (Mechanik) 29.01.2004

Prof. W. de Boer, Dr. G. Barker, Dr. W. Wagner

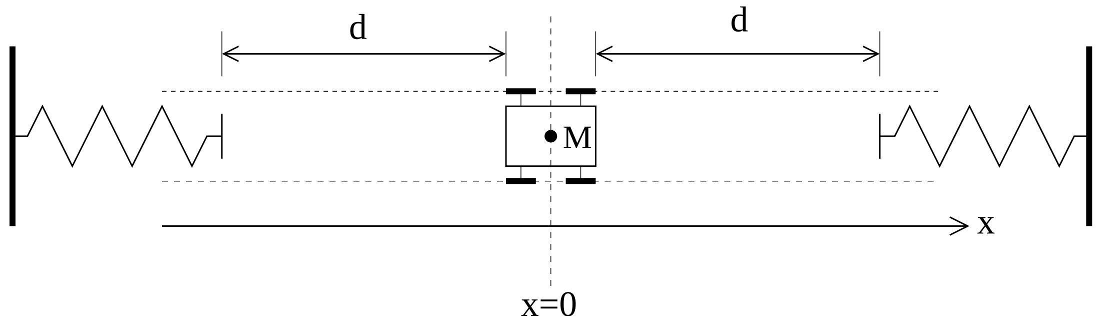
Benötigte Konstanten:

$$g = 10\text{m/s}^2 \qquad G = 7 \times 10^{-11}\text{m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$$

Sie dürfen die Näherung $\pi^2 \simeq 10$ verwenden.

Nr.	mögl.	erreicht
1	8	
2	6	
3	6	
4	8	
5	8	
6	8	
7	8	
8	6	
9	6	
10	10	
Gesamt	74	

1. Wagen zwischen zwei Pufferfedern (8 Punkte)



Ein Wagen bewege sich reibungsfrei auf Gleisen zwischen zwei Pufferfedern hin und her. Beide Federn haben eine Federkonstante $D = 72\,\mathrm{Nm}^{-1}$. M sei der Schwerpunkt des Wagens. Zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ durchlaufe M die Position $x = 0\,\mathrm{m}$ nach rechts mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0.36\,\mathrm{ms}^{-1}$ und treffe nach der Strecke $d = 18\,\mathrm{cm}$ auf die rechte Feder. Die Masse m des Wagens betrage 2 kg. Die Massen der Federn werden vernachlässigt.

(a) Wie lange berührt der Wagen die rechte Feder? (3 Punkte)

(b) Um welche Strecke Δs wird die Feder zusammengedrückt? (2 Punkte)

(c) An welchen Stellen x hat die Beschleunigung den größten Betrag? Geben Sie den Betrag der maximalen Beschleunigung an! (3 Punkte)

Lösung zu Aufgabe 1

Ist eine Abituraufgabe zur Einstimmung.

(a) Eine halbe Schwingungsperiode: $\Delta t = T/2$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} + Dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = D/m \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2kg}{Nm^{-1}}} = 2\pi\frac{1}{6}\sqrt{\frac{kg}{kgms^{-2}m^{-1}}}$

$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi}{6}s = 0.52s$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b)

- Lösungsweg 1: über die Energie
  Berechne die maximale Amplitude im Umkehrpunkt, wenn $W_{\mathrm{kin}} = 0$.
  $W_{\mathrm{Feder}} = \frac{1}{2}D\Delta s^2 \quad W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv_0^2$
  (kinetische Energie zum Zeitpunkt des Auftreffens auf die Feder)
  $W_{\mathrm{Feder}} = W_{\mathrm{kin}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
  $\Rightarrow D\Delta s^2 = mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta s = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = 0.36ms^{-1} \cdot \frac{1}{6}s$
  $\Rightarrow \Delta s = 0.06m = 6cm$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

- Lösungsweg 2: über die Lösung der Bewegungsgleichung
  $x(t) = d + \Delta s \cdot \sin(\omega t + \phi)$ (für die Teilbewegung an der rechten Feder)
  $\dot{x}(t) = \omega \cdot \Delta s \cdot \cos(\omega t + \phi)$ für $t = t_d : v_0 = \omega \cdot \Delta s$
  $\Rightarrow \Delta s = \frac{v_0 \cdot T}{2\pi} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$

(c) $\ddot{x} \neq 0$ nur während Schwingung an den Federn. Grösste Beschleuningung (betragsmässig) in den zwei Umkehrpunkten.

$x(t) = d + \Delta s \cdot \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow \quad x_1 = d + \Delta s \qquad x_2 = -d - \Delta s$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

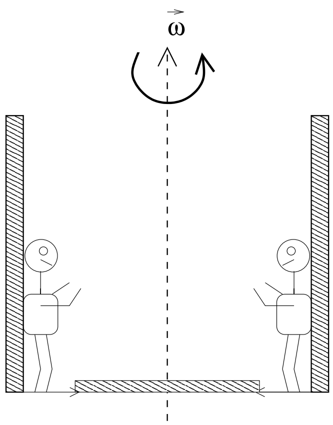
$\ddot{x}(t) = -\Delta s\, \omega^2 \sin(\omega t + \phi)$

$\Rightarrow \quad |\ddot{x}|_{\max} = \Delta s\, \omega^2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}}\, \frac{D}{m} = v_0 \sqrt{\frac{D}{m}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$|\ddot{x}|_{\max} = 0.36\, ms^{-1} \sqrt{\frac{72\, Nm^{-1}}{2\, kg}} = 0.36\, ms^{-1} \cdot 6\, s^{-1} = 2.16\, ms^{-2}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Alternativ: $|\ddot{x}|_{\max} = a_{\max} = \frac{F_{\max}}{m} = \frac{D \cdot \Delta s}{m} \quad \ldots$

2. Rotor auf dem Jahrmarkt (6 Punkte)



Mit welcher Frequenz f muss sich ein zylinderförmiger Rotor von $d = 4.5\,\mathrm{m}$ Durchmesser mindestens drehen, damit Menschen an seiner Innenwand haften bleiben, wenn der Boden unter ihren Füßen weggezogen wird? Die Reibungszahl zwischen der Wand des Rotors und dem Rücken eines Menschen betrage $\mu = 0.1$.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Zentrifugalkraft drückt den Menschen gegen die Wand. F_z wirkt als Normalkraft. Die Reibungkraft kompensiert die Gewichtskraft des Menschen.

$F_g = m\, g \qquad F_R = F_N \cdot \mu_r = \mu_r \cdot F_z = \mu_r\, m\, \omega^2\, r$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

$F_g = F_R \qquad m\, g = \mu_r\, m\, \omega^2\, \frac{d}{2} \qquad \left(r = \frac{d}{2}\right)$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

mit $\omega = 2\,\pi\, f$:

$\Rightarrow \quad f^2 = \frac{g}{\mu_r\, 2\,\pi^2\, d}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$f = \sqrt{\frac{10\, ms^{-2}}{0.1 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4.5\, m}} = \sqrt{\frac{1}{0.9}}\, Hz = 1.05\, Hz$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

3. Gravitation – Marsmission (6 Punkte)

Wir schreiben das Jahr 2020. Die erste bemannte Marssonde befindet sich im Landeanflug. Aufgrund eines Missverständnisses landet die Besatzung nicht auf dem Mars selbst, sondern auf dem Marsmond Deimos. Die Gravitation auf Deimos ist ziemlich schwach, denn die Masse beträgt nur $2 \cdot 10^{14}$ kg bei einem Durchmesser von $d = 13\,\text{km}$. Mit den Worten "Dies ist ein großer Schritt für die Menschheit ..." springt der erste Astronaut aus dem Raumschiff. Zu seiner großen Überraschung landet er nicht auf dem Boden, sondern beginnt eine Umrundung des Marsmondes.

(a) Wie lange dauert es, bis der Astronaut den Mond Deimos umrundet hat und zum Raumschiff zurückkehrt? Nehmen Sie an, dass sich der Astronaut auf einer Kreisbahn wenige Meter über der Mondoberfläche bewegt und Deimos kugelförmig ist. Beim Absprung habe er lediglich eine Horizontalgeschwindigkeit (4 Punkte).

(b) Welche Horizontalgeschwindigkeit hatte der Astronaut? Geben Sie das Ergebnis in km/h an! (2 Punkte)

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Kreisbahn: $m\,\omega^2\,R = G\,\frac{m\,M}{R^2}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

mit $R = \frac{d}{2}$ $\quad \omega = \frac{2\,\pi}{T}$: $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\Rightarrow \quad 4\,\pi^2\,R^3 = G\,M\,T^2$

$\Rightarrow \quad T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{R^3}{G\,M}}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{(6.5 \cdot 10^3)^3\,m^3}{7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{14}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}\,kg}} = 2\,\pi\,10^3\,\sqrt{\frac{6.5^3}{14}}\,s = 27.8 \cdot 10^3\,s$

$T = 7.73\,h$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b) $v = \omega\,R = \frac{2\,\pi\,R}{T} = \frac{\pi\,d}{T} = \frac{\pi\,13\,km}{7.7\,h} = 5.3\,\frac{km}{h}$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

4. Gravitation – Potential einer Kreisplatte (8 Punkte)

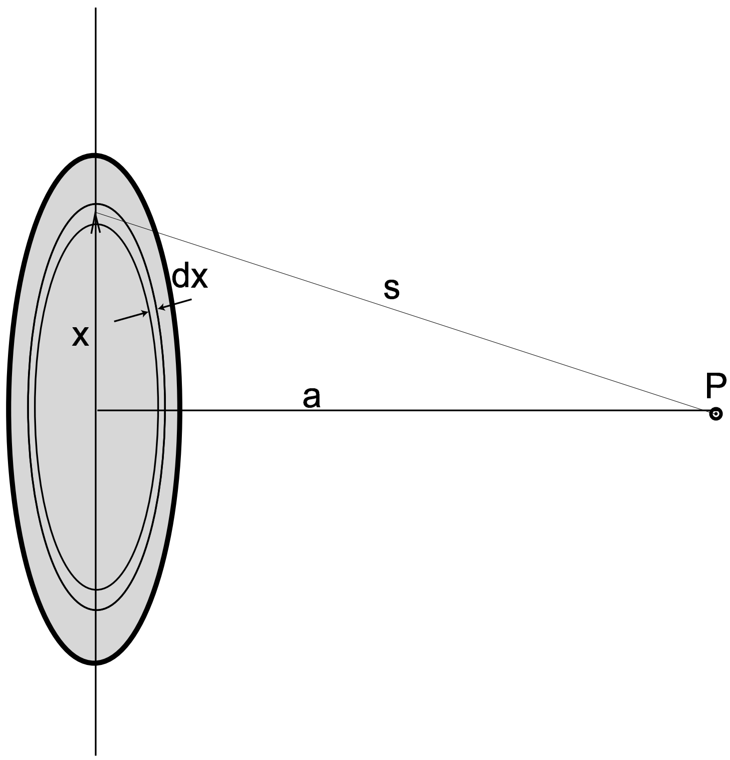
Betrachten Sie eine Kreisplatte mit Masse m und Radius R. Die Dicke der Platte sei vernachlässigbar ($d << R$), siehe Skizze.

(a) Leiten Sie her, dass das Gravitationspotential $\Phi(a)$ für einen Ort P auf der zur Platte senkrecht stehenden Mittelpunktsachse im Abstand a von der Platte

$$\Phi(a) = -\,G\,\frac{2\,m}{R^2}\,\left[\sqrt{R^2+a^2}-a\right]$$

beträgt. Integrieren Sie dazu über den Beitrag $d\Phi$ eines Flächenelementes dF der Platte (6 Punkte).

(b) Skizzieren Sie das Potential (2 Punkte).



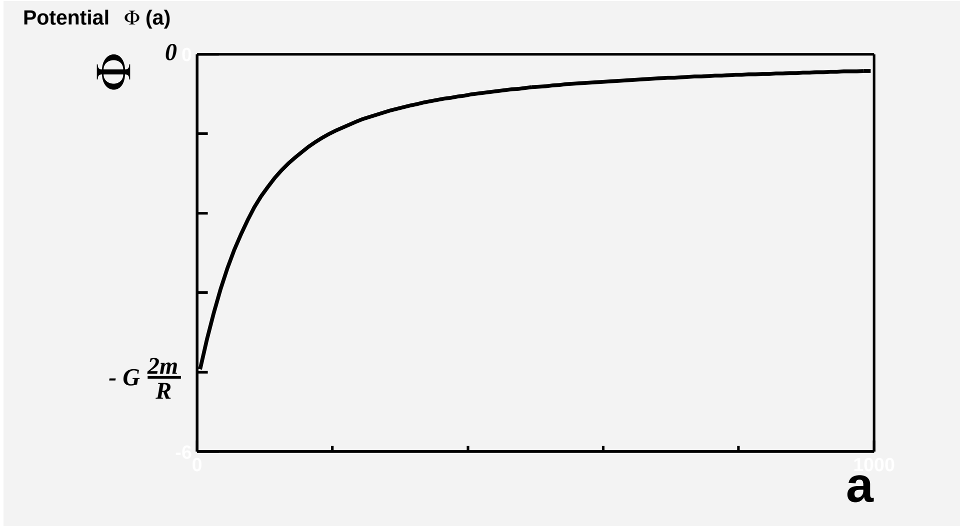
Lösung zu Aufgabe 4

(a) Flächenmassendichte: $\sigma = \frac{m}{\pi\,R^2}$
Umschreiben des Differentials:
$d\Phi = -\,G\,\frac{dm}{s} = -\,G\,\frac{\sigma}{s}\,dA = -\,G\,\frac{m}{\pi\,R^2}\,\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\,2\,\pi\,r\,dr$ $\boxed{\text{3 Punkte}}$

$\Phi(a) = -\int\limits_0^R G\,\frac{2\,m}{R^2}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+a^2}}\,dr = -\,G\,\frac{2\,m}{R^2}\,\left[\sqrt{r^2+a^2}\right]_0^R$

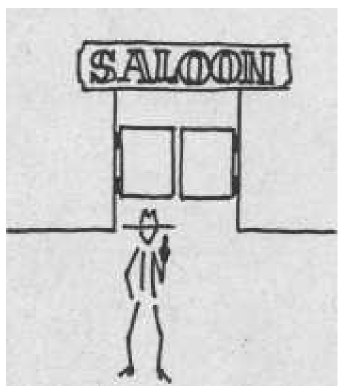
$\Rightarrow \quad \Phi(a) = -\,G\,\frac{2\,m}{R^2}\,\left[\sqrt{R^2+a^2}-a\right]$ $\boxed{\text{3 Punkte}}$

(b) Negativer Wert bei $a = 0$ und $\Phi(a\to\infty)\to 0$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$



5. Drehimpuls – Saloontür (8 Punkte)

Ein übermütiger Cowboy möchte sich eine Saloontür mit einem Revolverschuß öffnen. Die Schwingtür (Masse M, Breite b) werde ganz am Rand, d.h. im Abstand b vom Scharnier, getroffen und die Kugel (Masse m, Geschwindigkeit v) bleibe stecken.



(a) Leiten Sie einen Ausdruck für das Trägheitsmoment der Tür bezüglich der Drehachse her (3 Punkte).

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit ω her, mit der die Tür unmittelbar nach dem Einschlag aufschwingt (3 Punkte).

(c) Um wieviel Grad öffnet sich die Tür maximal bei einer Winkelrichtgröße D^* der Scharnierfeder? (2 Punkte)
Zahlenwerte: $M = 10$ kg, $b = 0.6$ m, $m = 10$ g, $v = 500$ m/s, $D^* = 1.2$ Nm

Lösung zur Aufgabe 5:

(a) Trägheitsmoment der Saloontür (Dicke << Höhe, Breite) $\boxed{\text{3 Punkte}}$

$$\theta_T = \int r^2 dm = \int_0^b r^2 h \cdot d \cdot \rho dr = \frac{dh\rho b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3}$$

(b) Drehimpuls der Revolverkugel um das Scharnier, $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\vec{L_K} = \vec{r} \times \vec{p},\ L_K = m \cdot v \cdot b$$

Nach dem Einschlag der Kugel schwingt die Tür mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf. Das Trägheitsmoment der Kugel um das Scharnier $\theta_K = mb^2$ kann gegenüber dem Trägeheitsmoment der Saloontür vernachlässigt werden. Es gilt also für das Gesamtsystem "Drehtür-Kugel" nach dem Einschlag $\theta_{T+K} \simeq \theta_T$.
Das Drehmoment des Systems ist daher in guter Näherung $|\vec{L}_{T+K}| = \theta_T \cdot \omega$.
Drehimpulserhaltung: $|\vec{L}_{T+K}| = \theta_T\omega = L_K = m \cdot v \cdot b$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\Rightarrow \omega = \frac{L_K}{\theta_T} = \frac{m \cdot v \cdot b \cdot 3}{Mb^2} = \frac{3mv}{Mb} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

(c) Maximale Öffnung: Energieerhaltung $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\frac{1}{2}\theta_T\omega^2 = \frac{1}{2}D^*\phi_m^2 \qquad \Rightarrow \qquad \phi_{\max} = \omega\sqrt{\frac{\theta_T}{D^*}} = \frac{3mv}{Mb} \cdot \sqrt{\frac{Mb^2}{3\,D^*}} = mv \cdot \sqrt{\frac{3}{M D^*}}$$

Der maximale Auslenkungswinkel ist unabhängig von b. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$$\phi_{\max} = 5\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{3}{10\,\text{kg}1.2\,\text{Nm}}} = 2.5$$

$$2.5\,\text{rad} = 2.5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 143^\circ$$

6. Rollende Zylinder (8 Punkte)

Ein Hohlzylinder und ein Vollzylinder mit jeweils gleicher Masse m und gleichem Radius $R = 0.1\,\text{m}$ rollen mit gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 15\,\text{s}^{-1}$ auf einer horizontalen Ebene und danach eine schiefe Ebene hinauf. Die Wandstärke des Hohlzyliners sei vernachlässigbar gegenüber des Radius.

(a) Berechnen Sie die Formel für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders und des Vollzylinders (4 Punkte).

(b) Bei welchen Höhen (auch Zahlenwerte berechnen) kehren die Zylinder jeweils um? Reibungsverluste werden vernachlässigt (4 Punkte).

Lösungen zu Aufgabe 6

(a) Hohlzylinder:
$d\Theta = R^2\,dm$ Jedes Massemelement hat das gleiche Trägheitsmoment.
$\Rightarrow \quad \Theta = \int R^2\,dm = m\,R^2$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Vollzylinder:

$d\Theta = r^2\,dm = \sigma\,r^2\,dA = \frac{m}{\pi R^2}\,r^2\,r\,d\phi\;dr$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\Theta = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} \frac{m}{\pi R^2}\,r^3\,d\phi\,dr = \frac{m}{\pi R^2}\;\left[\frac{1}{4}\,r^4\right]_0^R = \frac{m\,R^2}{2}$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

(b) Energieansatz: $W_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}\,m\,v_0^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\,\omega_0^2 = m\,g\,h$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

$\Theta = k\,m\,R^2 \qquad k = 1$ für Hohlzylinder $\qquad k = \frac{1}{2}$ für Vollzylinder

$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\,m\,\omega_0^2\,R^2 + \frac{1}{2}\,k\,m\,\omega_0^2\,R^2 = m\,g\,h$

$\Rightarrow \qquad h = \frac{1}{2\,g}\,\omega_0^2\,R^2\,(1+k)$

Hohlzylinder: $\qquad h_{\mathrm{H}} = \frac{R^2\,\omega_0^2}{g} = \frac{\left(1.5\,ms^{-1}\right)^2}{10\,ms^{-2}} = 22.5\,cm$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Vollzylinder: $\qquad h_{\mathrm{V}} = \frac{3\,R^2\,\omega_0^2}{4\,g} = 0.75 \cdot 22.5\,cm = 16.9\,cm$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

7. Schwerpunkt und Trägheitsmoment eines Kreissektors (8 Punkte)

(a) (5 Punkte) Abbildung 1 zeigt eine Scheibe (die Dicke der Scheibe werde vernachässigt) in Form eines Kreissektors mit Radius R, Masse M und Öffnungswinkel 2α. Zeigen Sie, dass der Massenschwerpunkt (Punkt C in Abb. 1) auf der Mittelachse liegt und den Abstand

$$d \quad = \quad \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$

vom Kreismittelpunkt (Punkt O in Abb. 1) hat.

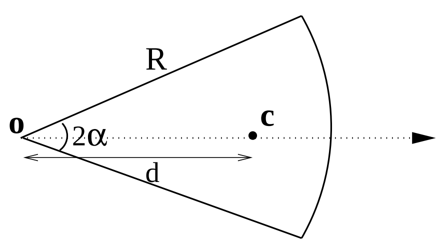


Abbildung 1:

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment des Kreissektors aus Aufgabe (a) bezüglich der Achse durch O senkrecht zur Kreisebene gegeben ist durch: $I = \frac{MR^2}{2}$.

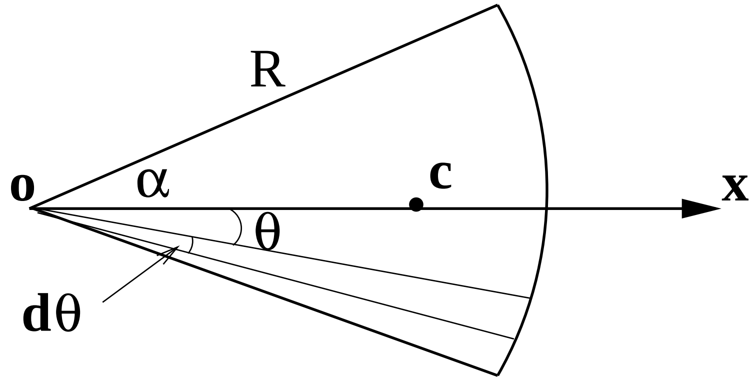
Lösung:

(a) (5 Punkte)

$$\text{Dichte } \rho \quad = \quad \frac{M}{\alpha r^2} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

$$\text{Masse eines Elementes} \quad = \quad \rho \times \text{Fläche} = \rho \cdot \frac{1}{2} r d\theta r = \frac{M}{\alpha r^2} \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{M d\theta}{2\alpha} \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

Das Element ist ein Dreieck und hat somit einen Schwerpunkt, der $\frac{2}{3}r$ vom Ursprung O



entfernt ist.
$\Rightarrow$ x-Koordinaten des Schwerpunktes $x = \frac{2}{3} r \cos\theta$.

Wende nun $\vec{C} = \frac{1}{M} \sum_i M_i \vec{r}_i$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$ an (aus Symmetriegründen muss C entlang der x-Achse liegen.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{1}{M} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{M}{2\alpha} d\theta \cdot \frac{2}{3} r \cos\theta = \frac{r}{3\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta d\theta \quad \boxed{\text{1 Punkt}} \\
C &= \frac{r}{3\alpha} [\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha} = \frac{2r \sin\alpha}{3\alpha} \quad \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}
$$

(b) (3 Punkte)

$$
\begin{aligned}
\text{Dichte } \rho &= \frac{M}{\pi a^2} \\
\text{Fläche eines Elementes} &= 2\pi R dR \\
\text{Masse eines Elementes} &= \left(\frac{M}{\pi a^2} \right) \cdot 2\pi R dR \quad \boxed{\text{1 Punkt}}
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment eines Elementes $= \frac{2MRdR}{a^2} \cdot R^2$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$
$\Rightarrow I = \int_0^a \frac{2M}{a^2} R^3 dR = \frac{2M}{a^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^a = \frac{Ma^2}{2}$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

8. Schrei des Mauerseglers (6 Punkte)

Ein Biologe, ein Musiker und ein Physiker gehen in der Nähe der Falkensteinfelsen bei Bad Herrenalb spazieren. Dicht über ihren Köpfen fliegt ein Mauersegler vorbei. Der Musiker stellt fest, dass das Intervall des Tones bei Annäherung und Entfernung eine kleine Terz war (kleine Terz: Frequenzverhältnis $f_A/f_E = 6/5$). Der Biologe bemerkt, dass Mauersegler mit einer Geschwindigkeit von mehr als 100 km/h fliegen können. Kann der Physiker dies aufgrund der soeben gemachten Beobachtung bestätigen? Die Schallgeschwindigkeit in Luft betrage $340\,\mathrm{ms}^{-1}$.

Lösung zu Aufgabe 8:

Der Mauersegler sende einen Ton der Frequenz f_0 aus.

Doppler-Effekt bei Annäherung: $f_A = f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right)^{-1}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Doppler-Effekt bei Entfernung: $f_E = f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)^{-1}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

mit: c: Schallgeschwindigkeit in Luft v: Geschwindigkeit des Vogels

$f_A : f_E = 6 : 5$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\frac{f_A}{f_E} = \frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} = \frac{6}{5} \quad \Rightarrow \quad 5 + 5\,\frac{v}{c} = 6 - 6\,\frac{v}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \frac{1}{11}$ $\boxed{\text{2 Punkte}}$

$v = \frac{c}{11} = 30.9\,ms^{-1} = 111\,km/h$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

9. Spezielle Relativitätstheorie – Myonspeicherring (6 Punkte)

Es wurde vorgeschlagen, Kollisionen von Myonen ($m_\mu = 105$ MeV) zu untersuchen, indem diese in einem Speicherring mit Radius $r = 2$ km auf eine kinetische Energie von 2 TeV beschleunigt werden. Ein Student führt aus, dass Myonen eine Lebensdauer von $\tau_\mu = 2 \cdot 10^{-6}$ s hätten und sie daher nur eine maximale Entfernung von nur $c\tau_\mu = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} =$ 600 m zurücklegen könnten, d.h. sie könnten nicht einmal eine einzige Umdrehung im Speicherring vollenden! Hat der Student recht? Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen, die die Myonen im Speicherring tatsächlich vollführen, indem Sie die Zeitdilation berücksichtigen, bevor Sie die zurückgelegte Wegstrecke der Myonen berechnen.

Lösung zu Aufgabe 9:

$$E = \gamma m_0 c^2 = E_{kin} + m_0 c^2 \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

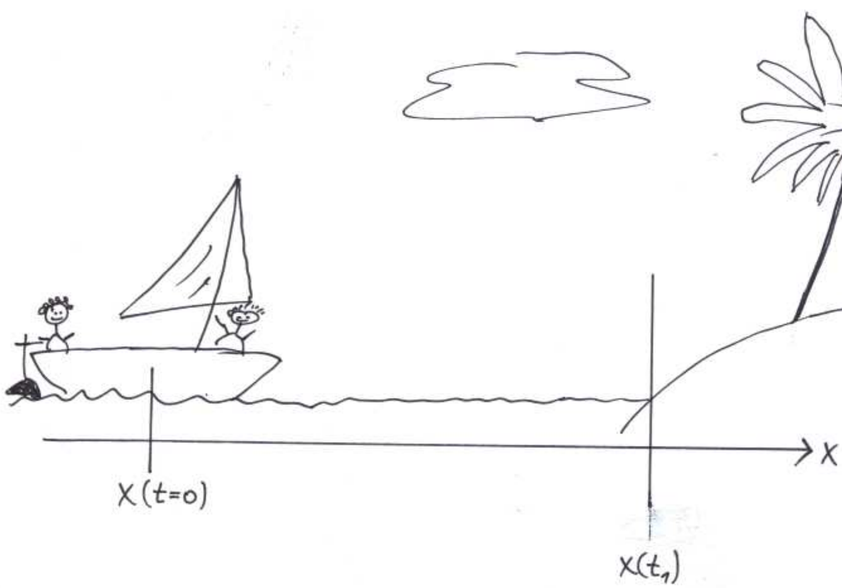
$$\Rightarrow \gamma = \frac{E_{kin} + m_0 c^2}{m_0 c^2} = \frac{2000.105\,\mathrm{GeV}}{0.105\,\mathrm{GeV}} = 19048.6 \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Der Umfang des Speicherrings ist $C = 2\pi r$.
Die Anzahl der Umdrehungen n bei Berücksichtigung der Zeitdilation ist:

$$n \;=\; \frac{c\gamma\tau_\mu}{2\pi r} = \frac{3\gamma}{20\pi} = 909.5 \qquad \boxed{\text{2 Punkte}}$$

Somit hat sich der Student ziemlich getäuscht!

10. Anlanden eines Segelschiffs (10 Punkte)



Nach einem anstregenden Semester erholen sich zwei Karlsruher Studierende in der Karibik. Mit ihrer Jolle wollen sie sanft am Strand einer einsamen Insel landen. Zu diesem Zwecke holen die beiden zum Zeitpunkt $t = 0$ ihre Segel ein. Die Jolle wird danach durch die Reibungskraft F_R des Wassers abgebremst. F_R ist proportional zur Geschwindigkeit: $F_R = -b \cdot \dot{x}$. Die Anfangsgeschwindigkeit der Jolle sei $\dot{x}(t = 0) = v_0$. Zum Zeitpunkt t_1 der Landung am Strand betrage die Geschwindigkeit nur noch $\dot{x}(t = t_1) = v_1$, $v_1 < v_0$. Die Masse der Jolle sei m.

In welcher Entfernung $d = |x(t = 0) - x(t_1)|$ vom Strand müssen die beiden Studierenden ihr Segel einholen?

Arbeiten Sie zur Beantwortung dieser Frage die folgenden Punkte ab:

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Jolle auf, welche als Massepunkt betrachtet wird, und berechnen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung (4 Punkte).

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Anfangs- bzw. Nebenbedingungen $x(t)$ in Abhängigkeit der Parameter v_0, v_1, m und b (3 Punkte).

(c) Berechnen Sie d für folgende Wahl der Parameter: $v_0 = 12.5\,\mathrm{ms}^{-1}$, $v_1 = 0.5\,\mathrm{ms}^{-1}$, $m = 200\,\mathrm{kg}$ und $b = 8\,\mathrm{kgs}^{-1}$ (3 Punkte).

Lösung zu Aufgabe 10

(a) $m\ddot{x} = -b\,\dot{x} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = b\,\dot{x} = 0$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Ist eine homogene Dgl. mit konstanten Koeffizienten, also Ansatz: $x(t) = e^{\lambda\,t}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\Rightarrow \quad m\,\lambda^2 + b\,\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{b}{m}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Allgemeine Lösung mit zwei Integrationskonstanten:

$x(t) = C_1\,e^{-\frac{b}{m}\,t} + C_0$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

(b) Wir wählen den Nullpunkt des Koordinatensystems bei $x(t=0)$, also $x(t=0)=0$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Ausserdem: $\dot{x}(t=0)=v_0$

$x(t=0)=C_1+C_0 \quad \Rightarrow \quad C_0=-\,C_1$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\dot{x}(t=0)=C_1\left(-\frac{b}{m}\right)=v_0 \quad \Rightarrow \quad C_1=-\,v_0\,\frac{m}{b}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\Rightarrow \quad x(t)=-\,v_0\,\frac{m}{b}\,e^{-\frac{b}{m}\,t}+v_0\,\frac{m}{b}$

(c) $x(t_1)=-\,v_0\,\frac{m}{b}\,e^{-\frac{b}{m}\,t_1}+v_0\,\frac{m}{b}$

$\dot{x}(t_1)=v_0\,e^{-\frac{b}{m}\,t_1}=v_1 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{b}{m}\,t_1}=\frac{v_1}{v_0}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$\Rightarrow \quad x(t_1)=-\,v_1\frac{m}{b}+v_0\,\frac{m}{b}=(v_0+v_1)\,\frac{m}{b}$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$

$d=|x(t_1)|=(|12.5-0.5|)ms^{-1}\,\frac{200\,kg}{8\,kgs^{-1}}=\frac{2400}{8}\,m=300\,m$ $\boxed{\text{1 Punkt}}$