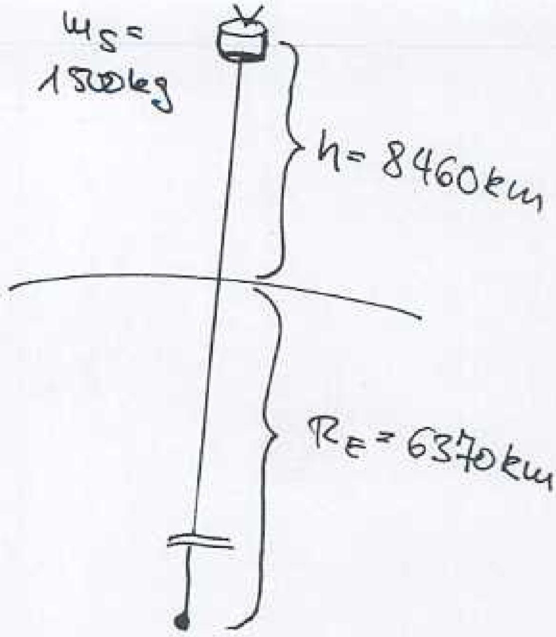
Aufgabe 1

a) potenzielle Energie:

$$\boxed{E_{pot} = -G \cdot \frac{m_S \cdot M_E}{r}}$$



$$r = R_E + h$$

$$r = 6370\,km + 8460\,km$$
$$= 14{,}83 \cdot 10^6\,m$$

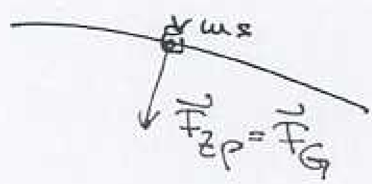
$$E_{pot} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 \cdot 1500\,kg \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{kg\,s^2 \cdot 14{,}83 \cdot 10^6\,m}$$

$$= -4{,}034 \cdot 10^{10}\,\frac{kg\,m^2}{s^2} = \underline{\underline{-4{,}034 \cdot 10^{10}\,J}}$$

b) kinetische Energie:

Ansatz 1

Kräftebetrachtung:



Zentripetalkraft

$$\vec{F}_{zp} = -G \cdot \frac{m_S \cdot M_E}{r^2}$$

$$= m_S \cdot a_{zp} = -\frac{m_S \cdot v^2}{r}$$

damit

$$-G \cdot \frac{m_S \cdot M_E}{r^2} = -\frac{m_S \cdot v^2}{r}$$

$$v^2 = \frac{G \cdot M_E}{r}$$

$$\frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{G \cdot m_S \cdot M_E}{2r}$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{G \cdot m_S \cdot M_E}{2r}}$$

$E_{kin} = -\frac{1}{2} E_{pot}$!

$$E_{kin} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} m^3 \cdot 1500\,kg \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg}{kg\, s^2 \cdot 2 \cdot 14{,}83 \cdot 10^6\,m}$$

$$\boxed{E_{kin} = 2{,}02 \cdot 10^{10}\,J}$$

Ansatz 2

Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_E} \cdot r^3$ ($T^2 - r^3$ Relation)

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2 \cdot r^3} = \frac{G \cdot m_E}{r}$$

! weiter wie oben

c) $E_{tot} = E_{pot} + E_{kin}$

$$= E_{pot} - \tfrac{1}{2} E_{pot} = \tfrac{1}{2} E_{pot}$$

$$\boxed{E_{tot} = -2{,}02 \cdot 10^{10}\,J}$$

neg. Vorzeichen wichtig!

AUFGABE 2

ges: Gravitationspotential einer homogenen Vollkugel

$$E_{pot(r)} = \frac{G \cdot m \cdot M_E}{2 R_E^3} \left(r^2 - 3 R_E^2 \right)$$

es gilt Energieerhaltung:

am Startpunkt in London ($r = R_E$, Oberfläche der Erde)

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$= \phi + \frac{G \cdot m \cdot M_E}{2 R_E^3} \left(R_E^2 - 3 R_E^2 \right)$$

$$\boxed{E_{tot} = - \frac{G \cdot m \cdot M_E}{R_E}}$$

(kann auch direkt 'aus dem Kopf' eingesetzt werden!)

wichtig: $E_{tot} = 0$ liefert falsche Resultate, der Zug startet mit neg. Energie, da im grav. potential gebunden!

damit:

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$- \frac{G \cdot m \cdot M_E}{R_E} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{G \cdot m \cdot M_E}{2 R_E^3} \left(r^2 - 3 R_E^2 \right)$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \frac{G \cdot \cancel{m} \cdot M_E}{2 R_E^3} \left(r^2 - 3 R_E^2 \right) + \frac{G \cdot \cancel{m} \cdot M_E}{R_E}$$

$$(1) \qquad \boxed{v^2_{(r)} = \frac{G \cdot M_E}{R_E^3} \left(r^2 - 3 R_E^2 \right) + \frac{2 \cdot G \cdot M_E}{R_E}}$$

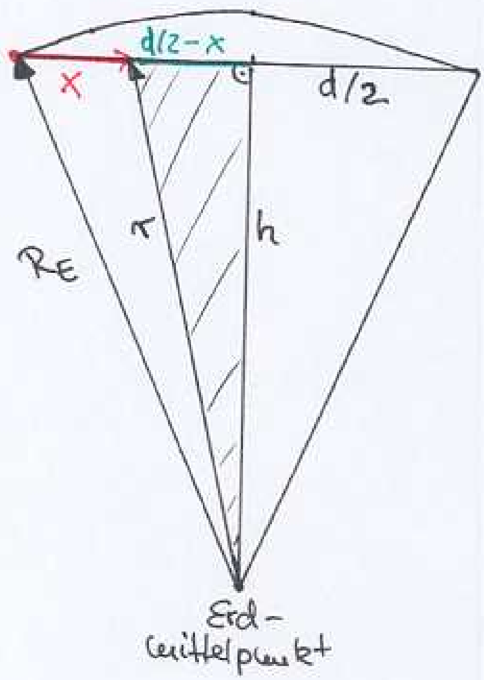
a) Bestimmung des $\boxed{\text{Ortes } x_{max}}$, an dem v_{max} (max. Geschwindigkeit) erreicht wird

bisher: $v^2(r)$ (r = Abstand vom Erdmittelpkt.)

erforderlich: $v^2(x)$ (x = Abstand vom Startort)

$\leadsto$ Transformation $v^2(r) \Rightarrow v^2(x)$

dazu: <u>Geometriebetrachtung:</u>



<u>2 × Pythagoras:</u>

(I): $R_E^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$

$$h^2 = R_E^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (*)$$

(II): $r^2 = \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + \underset{\uparrow \text{ aus}(*)}{h^2}$

$$r^2 = \left(\frac{d}{2} - x\right)^2 + R_E^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - d \cdot x + x^2 + R_E^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\boxed{r^2 = x^2 - d \cdot x + R_E^2}$$

einsetzen in (1)

$$(2) \quad \boxed{v^2(x) = \frac{G \cdot M_E}{R_E^3}\left(x^2 - d \cdot x + R_E^2 - 3R_E^2\right) + \underbrace{\frac{2 \cdot G \cdot M_E}{R_E}}_{= \text{const.}}}$$

max. Geschwindigkeit $\frac{d}{dt} v^2(x) \stackrel{!}{=} 0$

$$\frac{d}{dt} v^2(x) = \frac{G \cdot M_E}{R_E^3}\left(2 \cdot x_{max} - d\right) = 0$$

$$2 \cdot x_{max} = d \leadsto \boxed{x_{max} = \frac{d}{2} = 150\,\text{km}}$$

der Zug erhält seine maximale Geschwindigkeit bei $x_{Max} = 150\,km$, d.h. 'in der Mitte', da hier das Gravitationspotential am kleinsten ist!

NB: $x_{max} = d/2$ kann auch aus der Physik (s.o.) sauber begründet werden, es muß keine Rechnung vorliegen ($\Rightarrow$ Extrapkt bei Rechnung!)

b) Bestimmung von $\boxed{v_{MAX}}$

(2) $$v^2(x) = \frac{G \cdot M_E}{R_E^3}\left(x^2 - d\cdot x - 2R_E^2\right) + \frac{2\cdot G\cdot M_E}{R_E} \cdot \frac{R_E^2}{R_E^2}$$

$$v^2(x) = \frac{G\cdot M_E}{R_E^3}\left(x^2 - d\cdot x \underbrace{- 2R_E^2 + 2R_E^2}_{=0}\right)$$

mit $x_{Max} = d/2$

$$v^2(x_{Max}) = \frac{G\cdot M_E}{R_E^3}\left(\frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2}\right)$$

$$=_{(-)} \frac{G\cdot M_E}{R_E^3}\cdot\frac{d^2}{4}$$

$$v_{max}^2 = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,m^3 \cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\,kg}{kg\,s^2\cdot (6{,}37\cdot 10^6)\,m^3}\cdot\frac{(3\cdot 10^5)^2\,m^2}{4}$$

$$= 1{,}56\cdot 10^{-6}\,\frac{1}{s^2}\cdot 2{,}25\cdot 10^{10}\,m^2$$

$$v_{Max}^2 = 3{,}47\cdot 10^4\,\frac{m^2}{s^2}$$

$$\boxed{v_{Max} = 186{,}2\,m/s} = 670\,km/h$$

(doppelt so schnell wie ein ICE3!)

$$\frac{1}{2} m_s v^2 = \frac{G \cdot m_S \cdot M_E}{2r}$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{G \cdot m_S \cdot M_E}{2r}}$$

$E_{kin} = -\frac{1}{2} E_{pot}$!

$$E_{kin} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3 \cdot 1500\, kg \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\, kg}{kg\, s^2 \cdot 2 \cdot 14{,}83 \cdot 10^6\, m}$$

$$\boxed{E_{kin} = 2{,}02 \cdot 10^{10}\, J}$$

Ansatz 2

Kepler: $T^2 = \frac{4\pi^2}{G \cdot m_E} \cdot r^3$ ($T^2 - r^3$ Relation)

$$v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$v^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^2 \cdot G \cdot m_E}{4\pi^2 \cdot r^3} = \frac{G \cdot m_E}{r}$$

weiter wie oben

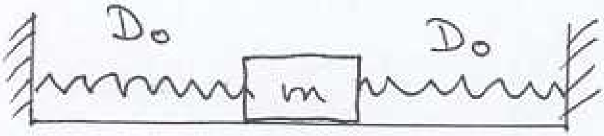
c) $E_{tot} = E_{pot} + E_{kin}$

$$= E_{pot} - \frac{1}{2} E_{pot} = \frac{1}{2} E_{pot}$$

$$\boxed{E_{tot} = -2{,}02 \cdot 10^{10}\, J}$$

neg. Vorzeichen wichtig!

AUFGABE 3



Klotz mit $m = 3\,kg$

Gleitreibung $\mu_g = 0{,}2$

Haftreibung $\mu_h = 0{,}9$

III die durch die Gleitreibung des Klotzes geleistete Arbeit W entspricht der Differenz ΔE_{pot} der potentiellen Energien in den Umkehrpunkten x_n

$$\boxed{\Delta E_{pot} = W}$$

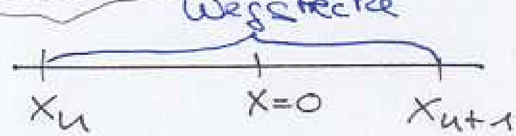
wichtig: Federkräfte D_0 addieren sich zur Gesamtfederkraft $D = 2 D_0$

$$\rightarrow \quad E_{pot}(x_n) = \frac{1}{2} D \cdot x_n^2 = D_0 \cdot x_n^2$$

$$\Delta E_{pot} = E_{pot}(x_n) - E_{pot}(x_{n+1}) = D_0 \left(x_n^2 - x_{n+1}^2 \right)$$

$$= D_0 \left(|x_n| + |x_{n+1}| \right) \cdot \left(|x_n| - |x_{n+1}| \right)$$

$$\rightarrow \quad W = \underbrace{\mu_g \cdot g \cdot m}_{\text{Kraft}} \cdot \underbrace{\left(|x_n| + |x_{n+1}| \right)}_{\text{Wegstrecke}}$$



$$\Delta E_{pot} = W$$

$$D_0 \cdot \underbrace{\left(|x_n| - |x_{n+1}| \right)}_{\Delta x} = \mu_g \cdot g \cdot m$$

$$|x_n| - |x_{n+1}| = \Delta x = \frac{\mu_g \cdot g \cdot m}{D_0}$$

Δx ist die Amplitudenabnahme pro halber Periode, d.h. die Einhüllende ist eine Gerade mit negativer Steigung $2 \cdot \Delta x$ (pro Periode!) Dämpfung nicht geschwindigkeitsabhängig!

a) Einsetzen

$$\Delta x = |x_n| - |x_{n+1}| = \frac{\mu_G \cdot g \cdot m}{D_0}$$

$$\Delta x = \frac{0{,}2 \cdot 9{,}81 \cdot 3}{180} \frac{m\ s^2\ kg}{s^2\ kg\ m} = 0{,}0327\ m$$

$$\boxed{\Delta x = 3{,}27\ cm}$$

b) damit der Klotz am Umkehrpunkt liegen bleibt, muß gelten:

$$\underbrace{F_{Feder}}_{\text{Rückstellkraft}} < \underbrace{F_H}_{\text{Haftreibungskraft}}$$

$$F_H = \mu_H \cdot m \cdot g$$

$$F_{Feder} = 2 \cdot D_0 \cdot x$$

$$\mu_H \cdot m \cdot g = 2 \cdot D_0 \cdot x_{krit}$$

x ist Auslenkung, wo beide Kräfte gleich sind

$$x_{krit} = x_0 - r \cdot \underbrace{\Delta x \cdot 2}_{\text{Abnahme pro Periode}}$$

r: Anzahl der Schwingperioden

$$\frac{\mu_H \cdot m \cdot g}{2 D_0} = x_0 - 2 \cdot r \cdot \Delta x$$

$$2r \cdot \Delta x = x_0 - \frac{\mu_H \cdot m \cdot g}{D}$$

$$2r = \frac{1}{\Delta x}\left(x_0 - \frac{\mu_H \cdot m \cdot g}{D}\right)$$

$$\Delta x = \frac{\mu_G \cdot g \cdot m}{D_0}$$

$$2r = \frac{x_0}{\Delta x} - \frac{\mu_H}{2\mu_G}$$

$$2r = \frac{0{,}25\ m}{0{,}0327\ m} - \frac{0{,}9}{2 \cdot 0{,}2} = 5{,}39$$

bei x_{krit} $(2r = 5{,}39)$ ist die Haftreibung = Rückstellkraft

der Klotz wird daher bis zum 6. Umkehrpunkt weitergleiten, dann ist es in Ruhe $\curvearrowright$ $F_H > F_{Feder}$

$$2r = 6$$

$$r = 3$$

Nach der 3. Schwingungsperiode ruht der Klotz

c) ist $x_0 = +25\,cm$ ist der 6. Umkehrpunkt

$$x_{ruhe} = x_6 = (25\,cm - 6 \cdot 3{,}27\,cm) = \underline{\underline{5{,}38\,cm}}$$

4) Gedämpfter harmonischer Oszillator

Für die Kreisfrequenz eines gedämpften harmonischen Oszillators gilt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

gegeben war: $\omega = 0{,}99\,\omega_0$

$$\omega^2 = 0{,}99^2\,\omega_0^2$$

damit: $\omega_0^2 - \gamma^2 = 0{,}99^2\,\omega_0^2$

$$(1 - 0{,}99^2)\,\omega_0^2 = \gamma^2$$

$$\gamma = \sqrt{1 - 0{,}99^2}\;\omega_0$$

$$\underline{\gamma = 0{,}141\,\omega_0}$$

($\gamma < \omega_0$, schwache Dämpfung!)

a) für das Amplitudenverhältnis gilt:

$$\frac{x(t+T)}{x(t)} = e^{-\gamma T} \qquad \text{mit } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= e^{-\frac{\gamma \cdot 2\pi}{\omega}} = e^{-\frac{0.141\,\omega_0 \cdot 2\pi}{0.99\,\omega_0}}$$

$$= e^{-\frac{0.141 \cdot 2 \cdot \pi}{0.99}} = e^{-0.895}$$

$$= \underline{\underline{0{,}4085}}$$

Die Amplitude verringert sich pro Periode um einen Faktor 2.448!

b) logarithmisches Dekrement

$$\delta = \ln\left[\frac{x(t)}{x(t+T)}\right] = \gamma \cdot T$$

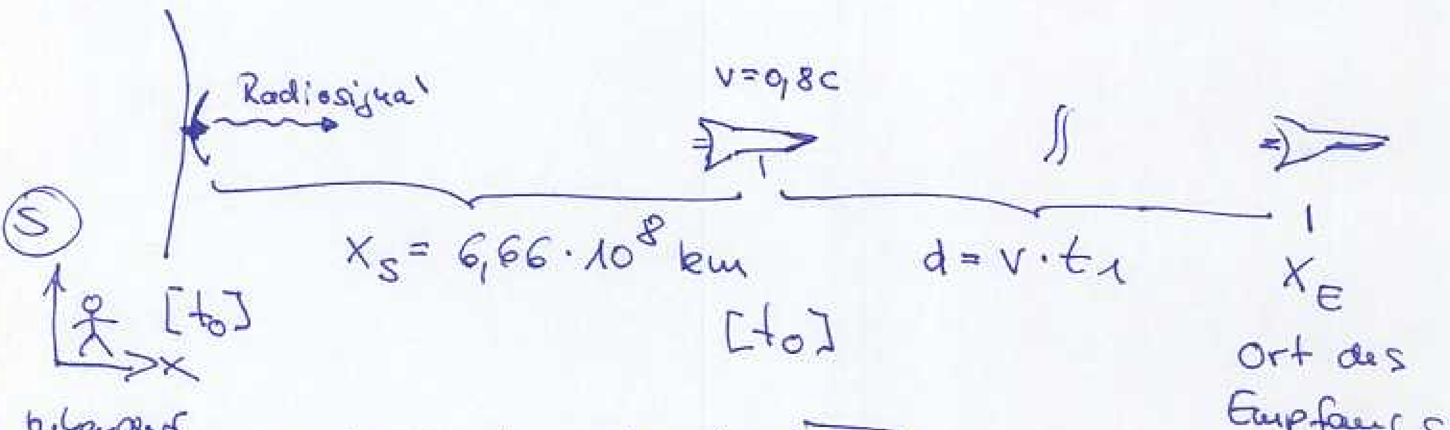
$$\delta = 0{,}141 \cdot \omega_0 \cdot \frac{2\pi}{0{,}99\,\omega_0} = \frac{0{,}141 \cdot 2\pi}{0{,}99}$$

$$\underline{\underline{\delta = 0{,}895}}$$

bzw. siehe a) $e^{-\gamma T} = e^{-0.895}$

$$\rightsquigarrow \underline{\delta = 0.895} \quad \checkmark$$

Aufgabe 5 Radiosignale an Raumschiff



a) in S-Koordinaten $\boxed{x, t}$:

Zum Zeitpunkt $\boxed{t_0 = 0}$ werden die Radiosignale losgeschickt, sie treffen zum Zeitpunkt t_1 bei der Rakete ein!

Lichtlaufweg $x_E = c \cdot t_1$

Raketenflugweg $x_E = x_S + v \cdot t_1$

$$\boxed{c \cdot t_1 = x_S + v \cdot t_1} \quad 1$$

$$(c - v) t_1 = x_S$$

$$t_1 = \frac{x_S}{c - v} = \frac{x_S}{c(1 - 0{,}8)} = \frac{x_S}{0{,}2c} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$t_1 = \frac{6{,}66 \cdot 10^8 \text{ km s}}{0{,}2 \cdot 3 \cdot 10^5 \text{ km}} = \underline{\underline{11\,100 \text{ s}}}$$

$$\boxed{t_1 = 185 \text{ min} = 3 \text{ h } 05 \text{ m} = 3{,}08 \text{ h}} \quad \tfrac{1}{2}$$

Zusatz: $x_E = c \cdot t_1 = 3{,}33 \cdot 10^{12} \text{ m} = 5 \cdot x_S$

b) der Zeitpunkt t_1' in Raumschiffkoordinaten zu dem das Signal am Ort x_E empfangen wird (Rakete bzw. S' bewegt sich mit v)

Lorentz-Transformation für Zeit

$$t_1' = \gamma \cdot \left(t_1 - \frac{v \cdot x_E}{c^2}\right) \quad \frac{1}{2}$$

wichtig: richtiger Ort!

mit $\boxed{x_E = c \cdot t_1}$

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v \cdot c \cdot t_1}{c^2}\right)$$

$$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{v \cdot t_1}{c}\right)$$

$$t_1' = \gamma \cdot t_1\left(1 - \frac{v}{c}\right) \quad \frac{1}{2} \qquad [t_1' = \gamma \cdot t_1 (1-\beta)]$$

Lorentzfaktor: $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

mit $v = 0{,}8c$ $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}8^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{1}{0.6}$

$$\gamma = 5/3$$

also: $t_1' = \frac{5}{3} \cdot t_1 (1 - 0{,}8) = \frac{1}{3} t_1 \quad \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1' &= 11\,100\,s \cdot \frac{1}{3} = 3.700\,s \\ &= 61\,min\ 40\,s \\ &= 1{,}028\,h \end{aligned}} \quad \frac{1}{2}$$

↳ Position x_E des Raumschiffs

$$x_E = c \cdot t_1$$

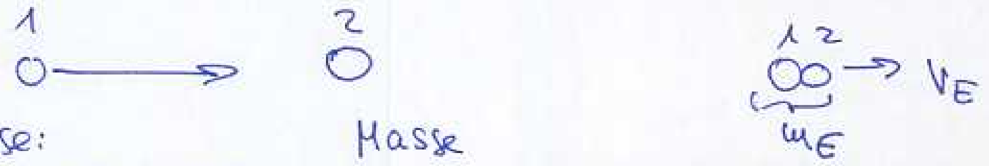
$$x_E = 3 \cdot 10^5 \frac{km}{s} \cdot 11\,100\, s = \underline{\underline{3{,}33 \cdot 10^9\, km}}$$ $\frac{1}{2}$

$$\boxed{x_E = 5 * x_S}$$

$$x'_E = 0$$

da mitbewegtes Koordinatensystem! $\frac{1}{2}$

Aufgabe 6: vollständig inelast. relativ. Stoß



Masse: $m_1 = 2\,MeV/c^2$, $E_{kin,1} = 3\,MeV$

Masse $m_2 = 4\,MeV/c^2$ ruhend

$(1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J)$

a) Gesamtimpuls vor dem Stoß?

$$E_{tot,1} = E_{kin,1} + m_1 c^2$$
$$= 3\,MeV + 2\,MeV = \underline{5\,MeV}$$

$$E_{tot,1}^2 = p_1^2 c^2 + (m_1 c^2)^2$$

$$p_1 c = \sqrt{E_{tot,1}^2 - (m_1 c^2)^2}$$
$$= \sqrt{(5\,MeV)^2 - (2\,MeV)^2}$$
$$p_1 c = \sqrt{21}\,MeV$$
$$p_1 = 4{,}58\,MeV/c$$

b) Geschwindigkeit nach Stoß β_E

$$\boxed{\frac{v_E}{c} = \beta = \frac{p_E \cdot c}{E_{tot,E}}}$$

I. $\boxed{E_{tot,E} = E_{tot,1} + E_{tot,2}}$
$= 5\,MeV + 4\,MeV = 9\,MeV$

II. Impulserhaltung beim inel. Stoß $\boxed{p_E = p_1}$

$$\beta_E = \frac{p_E \cdot c}{E_E} = \frac{4{,}58\,MeV}{9\,MeV} = 0{,}509$$

c) Masse des 2-Teilchensystems m_E

naiv: $m_E = m_1 + m_2 = 2\,MeV + 4\,MeV$

richtig
$$E_{tot,E}^2 = (p_E c)^2 + (m_E c^2)^2$$
$$(9\,MeV)^2 = (4{,}58\,MeV)^2 + (m_E c^2)^2 \Rightarrow m_E = 7{,}75\,MeV$$

Massen-Zuwachs! entspr. Verlust an Kinet. Energie