Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 1) **Fahrrad**

Ein Fahrrad bremst gleichmäßig ohne Schlupf von einer Geschwindigkeit $v_0 = 8{,}4\frac{m}{s}$ über eine Strecke von 115m bis zum Stillstand ab. Die Räder des Fahrrades haben einen Außendurchmesser von 68cm.
Berechnen sie:

a) Die Winkelgeschwindigkeit ω_0 der Räder zu Beginn des Bremsvorganges.

b) Die Anzahl der Umdrehungen der Räder während des Bremsvorganges bis zum Stillstand.

c) Die Winkelbeschleunigung α der Räder während des Bremsvorganges.

d) Die Zeitdauer t des Bremsvorganges.

a) Winkelgeschwindigkeit der Räder: $\underline{\underline{\omega_0}} = \frac{v_0}{r} \hat{=} \frac{8{,}4\,\frac{m}{s}}{0{,}34\,m} = \underline{\underline{24{,}7\,s^{-1}}}$

b) Anzahl der Radumdrehungen: $\underline{\underline{n}} = \frac{\ell}{2\pi r} \hat{=} \frac{115\,m}{2\pi \cdot 0{,}34\,m} = \underline{\underline{53{,}83}}$

c) Winkelbeschleunigung: aus $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$
und $\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\varphi$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha}} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \frac{0 - (24{,}7)^2\,s^{-2}}{2 \cdot 2\pi \cdot 53{,}83} = \underline{\underline{-0{,}902\,s^{-2}}}$$

(Verzögerung von ω_0 zum Stillstand über 53,83 Radumdrehungen)

(Alternativ: $\varphi = \frac{\ell}{r} = \frac{115\,m}{0{,}34\,m} = 338{,}2$)

d) Zeit bis zum Stillstand:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \Leftrightarrow \underline{\underline{t}} = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} \hat{=} \frac{0 - 24{,}7\,s^{-1}}{-0{,}902\,s^{-2}} = \underline{\underline{27{,}38\,s}}$$

Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 2) **Zylinderrennen**

Ein Vollzylinder und ein dünnwandiger Hohlzylinder mit gleicher Masse m und gleichem Außenradius R rollen mit gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0 auf einer horizontalen Ebene und danach eine schiefe Ebene hinauf. Bei welcher Höhe h kehren sie um? ($R = 0{,}1\,\mathrm{m}$; $\omega_0 = 15\,\mathrm{s}^{-1}$)

kinetische Energie setzt sich aus Rotations- und Translationsenergie zusammen:

$$E_{kin} = E_{rot} + E_{trans} = \frac{1}{2} J\omega_0^2 + \frac{1}{2} MR^2\omega_0^2 \qquad (v = R\cdot\omega_0)$$

$$E_{pot} = M\cdot g\cdot h = E_{kin} \Leftrightarrow h = \frac{E_{kin}}{m\cdot g} = \frac{\omega_0^2}{2mg}\left(J + MR^2\right)$$

- Vollzylinder:

$$\underline{J} = \int r^2\,dm = 2\pi\varrho l \int_0^R r^3\,dr = 2\pi\varrho l \frac{1}{2} R^4 = \underline{\frac{1}{2} MR^2}$$

$$dm = \varrho\, dV = 2\pi l\varrho\cdot r\,dr$$

$$M = \int dm = 2\pi l\varrho \int_0^R r\,dr = 2\pi l\varrho \frac{1}{2} R^2 = \pi l\varrho R^2$$

$$\Rightarrow \underline{h} = \frac{\omega_0^2}{2Mg}\left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right) = \frac{\omega_0^2}{2g}\cdot\frac{3}{2}R^2 = \underline{\frac{3}{4}\frac{\omega_0^2 R^2}{g}}$$

$$\hat{=} \frac{3}{4}\frac{(15)^2 s^{-2}\cdot(0{,}1)^2 m^2}{9{,}81\, m\cdot s^{-2}} = \underline{0{,}172\,m}$$

- Hohlzylinder:

$$\underline{J} = \int r^2\,dm = 2\pi\varrho l \int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = 2\pi\varrho l \frac{1}{4}\left[R_2^4 - R_1^4\right] = \frac{1}{2}\pi\varrho l\,(R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2) = \frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2) = \underline{MR^2}$$

$$M = 2\pi l\varrho \int_{R_1}^{R_2} r\,dr = 2\pi l\varrho \frac{1}{2}(R_2^2 - R_1^2) = \pi l\varrho (R_2^2 - R_1^2)$$

Dünnwandig: $R_1 \approx R_2$

$$\Rightarrow \underline{h} = \frac{\omega_0^2}{2Mg}(MR^2 + MR^2) = \underline{\frac{\omega_0^2 R^2}{g}} \hat{=} \frac{(15)^2 s^{-2}(0{,}1)^2 m^2}{9{,}81\, m\, s^{-2}} = \underline{0{,}229\,m}$$

Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 3) **Planet**

Die Schwerebeschleunigung am Äquator eines Planeten beträgt $g_P = 11{,}6\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, die Zentripetalbeschleunigung $a = 0{,}3\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ und die Fluchtgeschwindigkeit bei senkrechtem Abschuss $v_{Fl} = 23{,}6\frac{\text{km}}{\text{s}}$. In einer Höhe von 5000km über der Oberfläche ist $g = 8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Wie groß sind der Radius und die Masse des Planeten? b) Wie schnell rotiert er?

Gegeben ist: Gravitationskonstante: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$

- Fluchtgeschwindigkeit: 1-dim Problem: $a = -\frac{GM}{r^2}$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = \frac{dv}{dr}v \Rightarrow dv \cdot v = -\frac{GM}{r^2}dr \quad \int$$

$$\frac{1}{2}v^2 = +\frac{GM}{r} + C.$$

Bestimme C für $r = R$ $(t = t_0 = 0)$

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{GM}{R} + C \Leftrightarrow C = \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_0^2}{2} - gR \quad / \text{ mit } g = \frac{GM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v_0^2}{2} + GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

für $r \to r_{max}$ geht $v \to 0$ $\Rightarrow \frac{GM}{r_{max}} = \frac{GM}{R} - \frac{v_0^2}{2} \Leftrightarrow r_{max} = \frac{GM}{\frac{GM}{R} - \frac{v_0^2}{2}}$

Fluchtgeschwindigkeit heißt: $r_{max} \to \infty$

$$\Rightarrow \frac{GM}{R} = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \underline{\underline{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR}}}$$

Radius: $\Rightarrow \underline{\underline{R = \frac{v_0^2}{2g}}} \mathrel{\hat{=}} \frac{(23{,}6 \cdot 10^3)^2\,\frac{m^2}{s^2}}{2 \cdot 11{,}6\,m \cdot s^{-2}} = 2{,}4 \cdot 10^7\,m = \underline{\underline{24000\,km}}$

Zentripetalbeschleunigung: $a = \omega^2 R \Rightarrow \underline{\omega = \sqrt{\frac{a}{R}}} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{0{,}3\,m \cdot s^{-2}}{2{,}4 \cdot 10^7\,m}} = \underline{\underline{1{,}12 \cdot 10^{-4}\,s^{-1}}}$

„Tageslänge": $\underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega}}} = \frac{2\pi}{1{,}12 \cdot 10^{-4}\,s^{-1}} \approx 56200\,s \mathrel{\hat{=}} \underline{15{,}6\,h}$

Masse: $g = \frac{GM}{R^2} \Leftrightarrow \underline{\underline{M = \frac{gR^2}{G}}} \mathrel{\hat{=}} \frac{11{,}6\,m \cdot s^{-2} \cdot (2{,}4 \cdot 10^7)^2\,m^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,m^3 kg^{-1} s^{-2}} = \underline{\underline{1{,}002 \cdot 10^{26}\,kg}}$

Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 4) Zweistufige Rakete

Eine zweistufige Rakete entfernt sich mit der Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}6c$ von der Erde. Die zweite Stufe löst sich von der ersten Stufe und entfernt sich in Flugrichtung mit einer Relativgeschwindigkeit $v_2 = 0{,}8c$ von der ersten Stufe (die mit unverminderter Geschwindigkeit weiter fliegt).

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der zweiten Stufe relativ zur Erde?

b) Wie groß ist die relativistische Masse der zweiten (ersten) Stufe, wenn ihre Ruhemasse 1t (10t) beträgt?

c) Ein Komet (Durchmesser 1km), der sich mit einer Geschwindigkeit $v_K = 3000\,\mathrm{km/s}$ auf die Erde zu bewegt, begegnet der zweiten Stufe der Rakete. Wie groß ist der Komet (in Flugrichtung) aus der Sicht eines Raumfahrers in der zweiten Raketenstufe?

a) relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten: (x-Richtung)

$$\underline{\underline{v}} = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_2 v_1}{c^2}} \hat{=} \frac{0{,}8c + 0{,}6c}{1 + \frac{0{,}8 \cdot 0{,}6 c^2}{c^2}} = \frac{1{,}4c}{1{,}48} = \underline{\underline{0{,}946\,c}}$$

b) relativistische Massenzunahme:

$$m(v) = \gamma \cdot m_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0$$

erste Stufe: $\underline{\underline{m(v_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}6)^2 c^2}{c^2}}} 10t = \underline{\underline{12{,}5\,t}}$

zweite Stufe: $\underline{\underline{m(v_2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}946)^2 c^2}{c^2}}} \cdot 1t = \underline{\underline{3{,}085\,t}}$

c) $$\underline{\underline{v_{St.2,Komet}}} = \frac{v + v_K}{1 + \frac{v \cdot v_K}{c^2}} \hat{=} \frac{0{,}946c + 0{,}01c}{1 + \frac{0{,}946 \cdot 0{,}01 c^2}{c^2}} = \frac{0{,}956c}{1{,}00946} = \underline{\underline{0{,}947\,c}}$$

Längenkontraktion: (im Bewegungsrichtung) $\underline{\underline{l}} = \frac{1}{\gamma} \cdot l_{eigen} \hat{=} \sqrt{1 - \frac{(0{,}947)^2 c^2}{c^2}} \cdot 1000\,m = \underline{\underline{321{,}2\,m}}$

Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 5) Schwingungen eines schwimmenden Zylinders

Ein Zylinder schwimmt aufrecht stehend in einem Wasserbad (Dichte $\rho_{H_2O} = 1 g/cm^3$). Die Masse des Zylinders beträgt $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$, der Durchmesser ist 0,1m. Wie groß ist die Schwingungsperiode, wenn man den Zylinder leicht herunter drückt und dann loslässt?

Der Zylinder wird um die Strecke $-z$ heruntergedrückt. Auf ihn wirken dann 2 Kräfte: Gewichtskraft: $\vec{F}_G = -mg \cdot \vec{e}_z$

Auftriebskraft: $\vec{F}_A = -\rho A g \cdot (z_0 - z)\vec{e}_z$

(z_0: Eintauchtiefe im Gleichgewicht) (A: Querschnittsfläche πr^2)

Im Gleichgewicht gilt: $\vec{F}_G = -\vec{F}_A(z_0) \Leftrightarrow m \cdot g = -\rho A g z_0$

$$\Leftrightarrow z_0 = -\frac{m}{\rho \cdot A}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_A = -\rho A g \cdot \left(-\frac{m}{\rho A} + z\right) = (mg - \rho A g z)\vec{e}_z$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{z} = F_G + F_A = -mg + mg - \rho A g z = -\rho A g z$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\rho A g}{m} \cdot z = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\rho A g}{m}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}}$$

$$\underline{\underline{T}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}} = \sqrt{\frac{0{,}5\,\mathrm{kg}}{1000\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \cdot \pi (0{,}05)^2\,\mathrm{m^2} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}}} = \underline{\underline{0{,}08\,\mathrm{s}}}$$

Physik I (Mechanik) **WS 2004/05**
Nachholklausur; Orientierungsprüfung
Mo. 04.04.2005, 14:30-16:30 Uhr, Gerthsen Hörsaal

Name: .... **Matrikelnummer:** ....

Aufgabe 6) **Masse auf Halbkugel**

Ein Teilchen der Masse m liegt auf dem „Nordpol" einer reibungslos glatten Halbkugel mit Radius $R = 1\,\mathrm{m}$. Das Teilchen gleite an der Oberfläche der Halbkugel hinab. ~~Wann~~ In welcher Höhe löst sich das Teilchen von der Oberfläche der Kugel? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt seine Geschwindigkeit?

Kräfte: Normalkraft: $\vec{N} = -mg \sin\vartheta \, \vec{e}_r$

Zentrifugalkraft: $\vec{Z} = \frac{mv^2}{R} \vec{e}_r$

Ablösungsbedingung: $\vec{N} + \vec{Z} = 0 \Leftrightarrow -mg\sin\vartheta + \frac{mv^2}{R} = 0$

Energiesatz:

$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} \Rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{1}{2} mv^2 + mgh$

$\Leftrightarrow v^2 = 2g(R-h) = 2gR(1-\sin\vartheta)$

Einsetzen in die Ablösungsbedingung:

$$0 \stackrel{!}{=} N + Z = -mg\sin\vartheta + \frac{m 2gR(1-\sin\vartheta)}{R} = 2mg(1-\sin\vartheta) - mg\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow 2(1-\sin\vartheta) = \sin\vartheta \Leftrightarrow 2 = 3\sin\vartheta \Leftrightarrow \sin\vartheta = \frac{2}{3}$$

Ablösungsgeschwindigkeit:

$$v^2 = 2gR(1-\sin\vartheta) = 2gR\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}gR \Leftrightarrow \underline{v = \sqrt{\frac{2}{3}gR}}$$

$$\hat{=} \sqrt{\frac{2}{3} 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 1m}$$

$$= \sqrt{6{,}54} \frac{m}{s} = \underline{2{,}56 \frac{m}{s}}$$

Höhe bei Ablösung:

$$v^2 = 2g(R-h) \Leftrightarrow \underline{h = -\frac{v^2}{2g} + R} = -\frac{2}{3}\frac{gR}{2g} + R = \frac{2}{3}R \hat{=} \underline{0{,}667\,m}$$