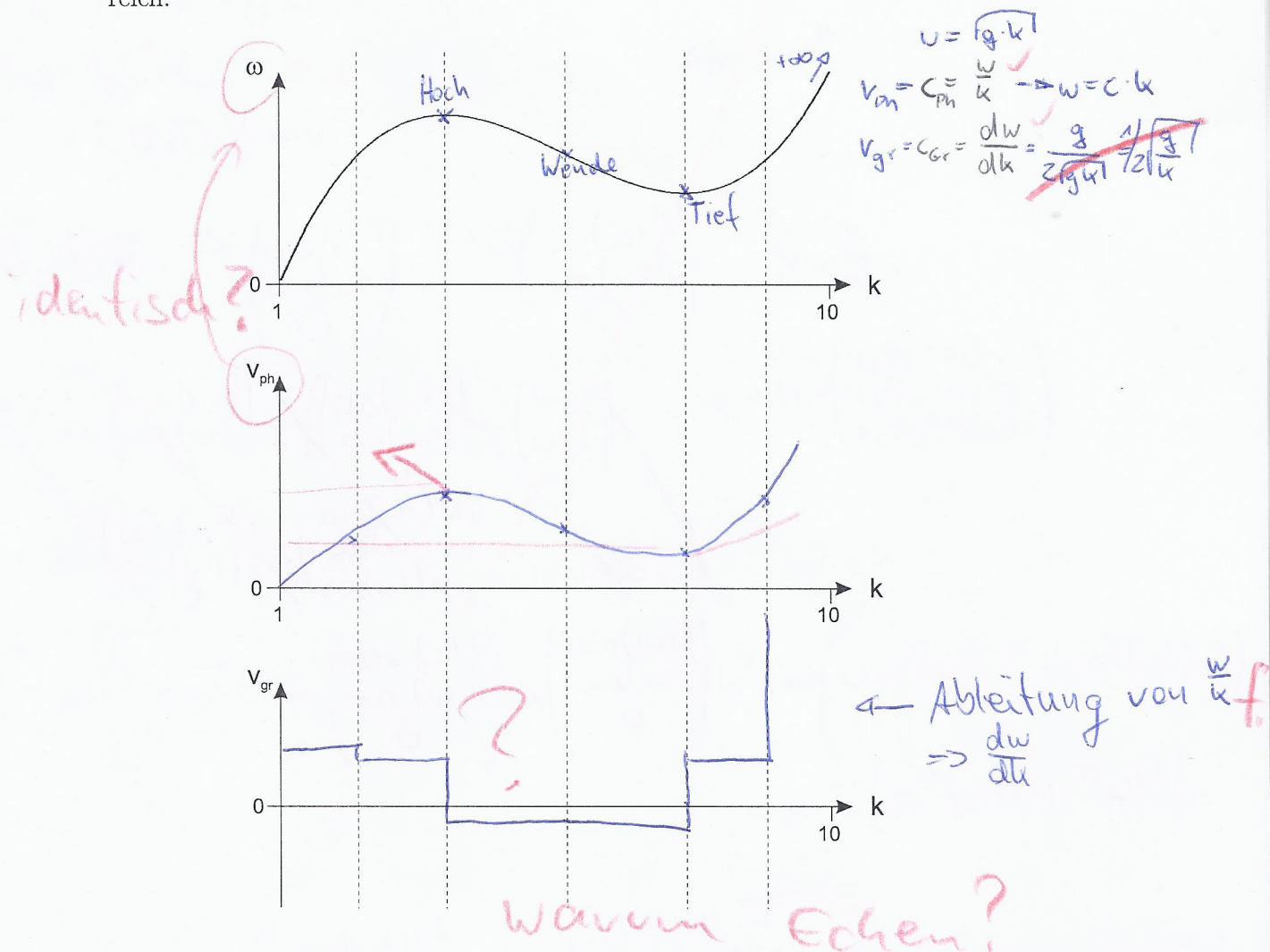


Aufgabe 1: (8 Punkte)

Zwei Forschungs-U-Boote wollen unter Wasser mit Hilfe von Schallwellen kommunizieren. Um die Schallsignale auch über weite Strecken weitgehend verzerrungsfrei übertragen zu können, wird ein schmaler Frequenzbereich benötigt, in dem die Gruppengeschwindigkeit v_{gr} nahezu unabhängig vom Wellenvektor k wird. Die Wissenschaftler haben daher die Kreisfrequenz ω der Schallwellen in Abhängigkeit des Wellenvektors k sorgfältig vermessen (siehe Skizze).

- Tragen Sie den qualitativen Verlauf der Phasengeschwindigkeit v_{ph} und der Gruppengeschwindigkeit v_{gr} in die entsprechend vorbereiteten Koordinatensysteme ein. (Die Skalen sind linear und in willkürlichen Einheiten.)
- Welche mathematische Beziehung muss die Dispersionsrelation für den benötigten Frequenzbereich erfüllen? Markieren Sie in dem $\omega(k)$ -Diagramm den gesuchten Bereich.



Aufgabe 2: (10 Punkte)

Eine Punktmasse m bewegt sich in einem Potential der Form $V(r) = m K r^3$ ($K > 0$), wobei r dem Abstand der Masse zum Ursprung entspricht.

- Berechnen Sie Drehimpuls L , kinetische Energie E_{kin} und Gesamtenergie E_{ges} der Punktmasse für eine Kreisbahn (Radius a) um den Ursprung.
- Wie groß ist die Periodendauer T der Kreisbewegung?

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) \quad \vec{F} = -\text{grad } V(\vec{r})$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

$$E_{ges} = E_{Rot} + E_{kin} + E_{Pot} \\ = \frac{1}{2} \Theta \vec{\omega}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$= -\frac{1}{4} m K r^4$$

$$\Theta = m r^2$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = m \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \omega = m \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \omega_z \\ \cos(\omega t) \omega_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \omega = m \begin{pmatrix} \cos^2(\omega t) \omega_z + \sin^2(\omega t) \omega_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m \omega_z (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))$$

$$= m \omega_z$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \omega \right)^2 = \frac{1}{2} m \left(\begin{pmatrix} \sin^2(\omega t) \\ \cos^2(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \omega^2 \right) = \frac{1}{2} m (\sin^2(\omega t) \omega_z^2 + \cos^2(\omega t) \omega_z^2)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_z^2$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m \omega^2$$

$$b) T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ für Kreisbewegung}$$

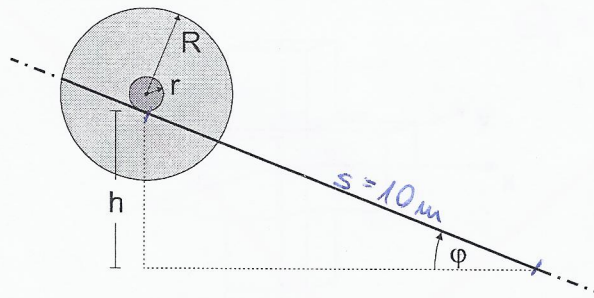
2

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Eine homogene Kreisscheibe mit Radius R , Masse m und Trägheitsmoment $\Theta = \frac{1}{2}mR^2$ ist symmetrisch auf einer Achse mit Radius r montiert (siehe Skizze). Die Scheibe rollt über die Achse schlupffrei eine schräg stehende Schienenbahn herunter.

- Berechnen Sie die Zeit T , die das anfangs ruhende Rad benötigt, die Höhe h herabzurollen. Vernachlässigen Sie dabei Masse und Trägheitsmoment der seitlichen Achsenstücke.
- Wie groß ist die Beschleunigung des Schwerpunkts der Scheibe im Vergleich zu der über den gesamten Umfang rollenden Scheibe?

Zahlenwerte: $R/r = 4$; $h = 5 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$; $\sin(\varphi) = 0.5$



$$\sin(\varphi) = \frac{h}{s} \rightarrow s = \frac{h}{\sin(\varphi)} = \frac{5 \text{ m}}{0.5} = 10 \text{ m} \quad h = s \cdot \sin(\varphi)$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \Theta \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \omega \times \cancel{R} r \quad f$$

$$= \omega R, \text{ da } \omega \perp R$$

~~$$\frac{m \cdot g \cdot h}{2 R^2 \omega} = \frac{1}{2} m v^2$$~~

~~$$\frac{g \cdot h}{2 R^2 \omega} = \frac{1}{2} v^2$$~~
~~$$\frac{g \cdot h}{2 R^2 \omega} = \frac{1}{2} v^2$$~~

~~$$g \cdot h = \frac{1}{4} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} v^2$$~~

~~$$\frac{g \cdot h}{4 R^2 \omega} = \frac{1}{2} v^2$$~~

~~$$v^2 = \frac{g \cdot h}{2 R^2 \omega}$$~~
~~$$\omega^2 R^2 = \frac{g \cdot h}{2 R^2 \omega} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot h}{2}} = 5 \text{ 1/s}$$~~

~~$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5} \pi \text{ s}$$~~

~~$$g \cdot h = \frac{1}{4} R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} R^2 \omega^2$$~~
~~$$\frac{g \cdot h}{3/4 R^2} = \omega^2$$~~

$\Rightarrow$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \vec{\omega}^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \omega R$$

$$\mu \cdot g \cdot h = \frac{1}{4} \mu R^2 \vec{\omega}^2 + \frac{1}{2} \mu \omega^2 R^2$$

$$\sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3 R^2}} = \omega = \sqrt{\frac{4 g h}{3 R^2}}$$

$$g \cdot h = \frac{3}{4} R^2 \vec{\omega}^2$$

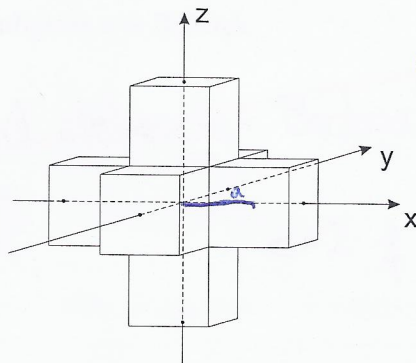
$$\vec{\omega} = \sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h}{3 R^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Der unten skizzierte homogene Körper der Masse M ist aus sieben gleichen Würfeln (Seitenlänge a , Masse m) zusammengesetzt, die in Form eines dreidimensionalen Kreuzes um den Ursprung des Koordinatensystems angeordnet sind.

- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment Θ_z des Körpers bzgl. der z -Achse als Funktion von M und a . Berechnen Sie dazu zunächst das Trägheitsmoment eines einzelnen Würfels.
- Wie groß ist das Trägheitsmoment Θ_1 bezüglich der Drehachse durch den Schwerpunkt in $(1,1,1)$ -Richtung? Begründen Sie Ihre Antwort!



$$\Theta_k = \Theta_u + m a^2 \quad \text{Satz von Steiner}$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad \Theta_u &= \rho \iiint_V r^2 dV = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy dz \\
 &= \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (x^2 + y^2) dx dy = \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \left[\frac{1}{3} x^3 + y^2 x \right]_{-a/2}^{a/2} dy \\
 &= \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{1}{3} \frac{a^3}{8} + \frac{a}{2} y^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} \frac{a^3}{8} + \frac{a}{2} y^2 \right) dy \\
 &= \rho a \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{a^3}{12} + a y^2 \right) dy = \rho a \left[\frac{a^3}{12} y + \frac{1}{3} y^3 a \right]_{-a/2}^{a/2} \\
 &= \rho a \left(\left(\frac{a^4}{24} + \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} a \right) - \left(-\frac{a^4}{24} - \frac{1}{3} \frac{a^3}{8} a \right) \right) = \rho a \left(\frac{1}{12} a^4 + \frac{1}{12} a^4 \right) \\
 &= \frac{1}{6} a^5 \rho = \frac{1}{6} M a^2 = \Theta_u \text{ für einzelnen Würfel}
 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{M}{a^3}$$

Da der Körper aus 7 solcher Würfel besteht, ist das Drehmoment entsprechend 7 mal größer für den gesamten Körper.

~~$\Theta_z = 7 \cdot \Theta_u = \frac{7}{6} M a^2$~~ Dabei muss man aber beachten, dass 4 Körper den Abstand a von der Drehachse besitzen, sie nach dem Satz von Steiner ein anderes Trägheitsmoment besitzen.

$$\Theta_z = 3 \cdot \frac{1}{6} M a^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{6} M a^2 + M a^2 \right) = \frac{1}{2} M a^2 + \frac{28}{6} M a^2 = \frac{31}{6} M a^2 \quad \checkmark$$

b) Wenn man die Drehachse von der z-Achse auf eine Gerade durch den Schwerpunkt und den Punkt $P(1/1/1)$ legt, bleibt das Trägheitsmoment des Körpers erhalten, da man lediglich die Drehachse leicht neigt, das Trägheitsmoment aber vom Abstand der einzelnen Masse-
teilchen zur Drehachse abhängen. D.h., dass sich, bei einer gleichmäßigen Neigung der Drehachse die Körper-
drehung ändert, aber das Trägheitsmoment erhalten bleibt, da die Drehachse weiterhin durch den Schwerpunkt geht.

Aufgabe 5: (10 Punkte)

Ein Polizeiwagen verfolgt auf einer geraden Landstraße einen flüchtenden PKW mit hoher gleichbleibender Geschwindigkeit und laut tönender Sirene. Ein musikalischer Mensch mit absolutem Gehör steht am Straßenrand und beobachtet die vorbeirasenden Autos. Dabei registriert er für das sich nähernde Polizeifahrzeug eine Sirenenfrequenz von $f_1 = 1680 \text{ Hz}$ und für das sich wieder entfernende Fahrzeug eine Frequenz von $f_2 = 1200 \text{ Hz}$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_p des Polizeiwagens und die Sirenenfrequenz f_0 des stehenden Fahrzeugs.

b) Welche Frequenz würde der Beobachter wahrnehmen, wenn er im flüchtenden Auto (Geschwindigkeit $v_f = 44 \text{ m/s}$) sitzen würde?

Zahlenwert: Schallgeschwindigkeit $c = 330 \text{ m/s}$.

a) 1. Bewegte Quelle und stehender Beobachter



$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\lambda_R = \lambda_Q + v_Q \cdot T$$

$$f_H = \frac{c}{\lambda_Q + v_Q \cdot T} = \frac{c}{\lambda_Q \left(1 + \frac{v_Q \cdot T}{\lambda_Q} \right)} = f_Q \left(\frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}} \right) = 1680 \text{ Hz}$$

2. Bewegte Quelle und stehender Beobachter



$$\lambda_R = \lambda_Q + v_Q \cdot T$$

$$f_H = \frac{c}{\lambda_Q + v_Q \cdot T} = \frac{c}{\lambda_Q \left(1 + \frac{v_Q \cdot T}{\lambda_Q} \right)} = f_Q \left(\frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}} \right) = 1200 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_Q = 1200 \text{ Hz} \cdot \left(1 + \frac{v_p}{c} \right)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 36 \\ 72 \\ 144 \\ 288 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \\ 12 \\ 24 \\ 48 \end{array} \quad \begin{array}{r} 101 \\ 122 \\ 144 \\ 172 \end{array} \quad \begin{array}{r} 6 \\ 12 \\ 24 \end{array}$$

$$1200 \text{ Hz} \cdot \left(1 + \frac{v_p}{c} \right) \cdot \left(1 - \frac{v_p}{c} \right) = 1680 \text{ Hz}$$

$$1200 \text{ Hz} \cdot \left(1 - \frac{v_p^2}{c^2} \right) = 1680 \text{ Hz}$$

$$1 - \frac{v_p^2}{c^2} = \frac{1680}{1200}$$

$$\frac{1200 \text{ Hz} \cdot \left(1 + \frac{v_p}{c} \right)}{1 - \frac{v_p}{c}} = 1680 \text{ Hz}$$

$$1200 \cdot \left(1 + \frac{v_p}{c} \right) = 1680 \cdot \left(1 - \frac{v_p}{c} \right)$$

$$1200 + 1200 \cdot \frac{v_p}{c} = 1680 - 1680 \cdot \frac{v_p}{c}$$

$$2880 \cdot \frac{v_p}{c} = 480$$

$$2880 \frac{v_p}{c} = 480$$

$$2880 \frac{v_p}{c} = 480 \cdot c$$

$$v_p = \frac{480 \cdot 330}{2880} =$$

$$288 \frac{v_p}{c} = 48$$

$$6 \frac{v_p}{c} = 1$$

$$\frac{v_p}{c} = \frac{1}{6}$$

$$v_p = \frac{1}{6} \cdot 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \underline{\underline{55 \frac{\text{m}}{\text{s}}}} \text{ der Polizeiwagen f\"ahrt } 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\Rightarrow f_a = 1200 \text{ Hz} \cdot \left(1 + \frac{v_p}{c}\right)$$

$$= 1200 \text{ Hz} + \frac{1}{6} \cdot 1200 \text{ Hz}$$

$$= \underline{\underline{1400 \text{ Hz}}} \text{ Die Sirenenfrequenz betr\"agt } 1400 \text{ Hz}.$$

b) $v_p = 55 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $v_f = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}} > \Delta v = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, da der Polizeiwagen sich n\"ahert.

So kann man das Fluchtauto als unbewegt ansehen, w\"ahrend sich das Polizeiauto mit $11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ n\"ahert.

$\Rightarrow$ bewegte Quelle, ruhiger Beobachter

$$\text{aus a) } f_H = f_a \left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta v}{c}} \right) = \frac{1400 \text{ Hz}}{1 - \frac{11}{330}} = 16$$