Klausur zur Experimentalphysik I (Mechanik) am 4. März 2009

Bitte jedes Blatt mit Namen versehen und leserlich schreiben!

1. Aufgabe (8 Punkte)

Beim Bungee-Springen lässt sich ein Mann mit der Masse m, der an einem elastischen Kautschuk-Seil der Länge ℓ_0 festgebunden ist, von einer Brücke senkrecht nach unten fallen. Der Schwerpunkt des Mannes befindet sich zu Beginn auf gleicher Höhe wie der Befestigungspunkt des Seiles. Bei seinem weiteren „Flug" erreicht der Mann (mit seinem Schwerpunkt) gerade die unter der Brücke befindliche Wasseroberfläche, wobei das Seil auf seine doppelte Länge gedehnt wird.

a) Berechnen Sie die „Federkonstante" D des Seiles. Zahlenwert berechnen. Das Hooke´sche Gesetz sei gültig.

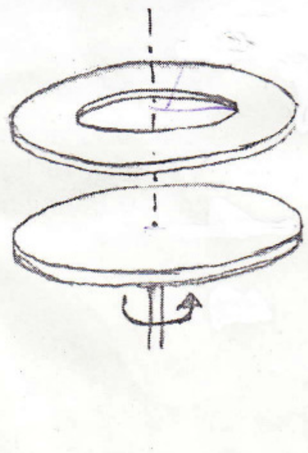
b) Zeichnen Sie in Diagrammen untereinander den Verlauf von Lageenergie E_{pot}, elastischer Energie des Seils E_{el} und kinetischer Energie E_{kin} als Funktion der Entfernung z des Mannes vom Befestigungspunkt des Seiles (verwenden Sie als Energiemaßstab die maximale Lageenergie $E_{pot,max}$). Geben Sie dazu die funktionelle Abhängigkeit $E_{pot}(z)$, $E_{el}(z)$ und $E_{kin}(z)$ an. Vernünftigerweise unterscheiden Sie dabei zwischen $0 \le z < \ell_0$ und $\ell_0 \le z \le 2\,\ell_0$.

Zahlenwerte: m = 80 kg, ℓ_0 = 20 m, g = 10 m/s^2

2. Aufgabe (4 Punkte)

Wie können Sie mit einer Waage, einem Topf, einer Stoppuhr und einem Regenschirm die Geschwindigkeit von Regentropfen bestimmen?
Skizzieren Sie zunächst den zeitlichen Verlauf des Gesamtgewichts G, das die Waage anzeigt, wenn der Schirm den Topf (Gewicht G_T) auf der Waage zuerst bedeckt, dann weggenommen und nach einer Zeitspanne Δt wieder über den Topf gehalten wird. Beachten Sie dabei den Impulsübertrag der 'kontinuierlich' in den Topf strömenden Regentropfen und erinnern Sie sich an das Raketenprinzip.

3. Aufgabe (5,5 Punkte)



Eine kreisförmige Scheibe aus einem Material der Dichte ρ mit der Dicke d und dem Radius R_a rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 reibungsfrei um ihre Symmetrieachse, die vertikal steht. Eine zweite, ringförmige und gleich dicke, nicht rotierende Scheibe (äußerer Radius R_a, innerer Radius $R_i = R_a / \sqrt{2}$) aus dem gleichen Material wird auf die erste Scheibe aufgelegt und von ihr 'mitgenommen'. Es stellt sich die Winkelgeschwindigkeit ω_2 ein.

a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Scheiben.

b) Wie groß ist ω_2 im Verhältnis zu ω_1?

c) Welcher Bruchteil der mechanischen Energie geht verloren?

Weitere Aufgaben auf der Rückseite beachten!

4. Aufgabe (4,5 Punkte)

Ein Becherglas ist mit Wasser gefüllt und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse. Die Wasseroberfläche nimmt die Form eines Rotationsparaboloids an.

a) Welche Bedingung gilt für ein Flüssigkeitselement Δm an der Wasseroberfläche im Gleichgewicht?

b) Skizzieren Sie die relevanten Kräfte auf das Massenelement Δm sowohl im rotierenden System als auch im Laborsystem (von außen betrachtet). Beschreiben Sie kurz beide Betrachtungsweisen im Hinblick auf die Gleichgewichtsbedingung a).

c) Leiten Sie den funktionalen Zusammenhang für die Wasseroberfläche her!

5. Aufgabe (8 Punkte)

Ein Federpendel mit der Masse m, der Federkonstanten D und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung ($\sim b\dot{x}$) wird durch eine zeitlich periodische, harmonische Kraft der Amplitude F_0 und der Kreisfrequenz ω (d.h. $F(t) = F_0 \cdot e^{i\omega t}$) angeregt.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für dieses System auf.

b) Betrachten Sie zunächst den Fall ohne anregende Kraft und ohne Dämpfung. Das Pendel werde bis zu einer Amplitude A_0 ausgelenkt und dann losgelassen. Geben Sie für diesen Fall die Lösung der Bewegungsgleichung an. Mit welcher Kreisfrequenz ω_0 schwingt die Masse?

c) Betrachten Sie nun den Fall ohne anregende Kraft, aber mit Dämpfung. Benutzen Sie den Lösungsansatz $x = c \cdot e^{\lambda t}$ und bestimmen Sie für den Fall schwacher Dämpfung die Frequenz ω_S sowie die Abklingkoeffizienten für Amplitude und Energie des Oszillators. Diskutieren Sie kurz den aperiodischen Grenzfall und den Fall starker Dämpfung.

d) Lösungsansatz für die durch die Kraft $F(t)$ angeregte Schwingung ist $x = c \cdot e^{i\omega t}$. Unter welcher Bedingung ist dieser Ansatz vernünftig? Skizzieren Sie den Verlauf der Schwingungsamplitude $A(\omega)$ als Funktion der auf ω_0 normierten Anregungsfrequenz ω. Welcher Zusammenhang besteht zwischen c und A? Welche weitere Größe ist in c enthalten?

6. Aufgabe (4 Punkte)

a) Geben Sie eine Wellenfunktion für eine ebene, in –x-Richtung propagierende, harmonische Welle an und erklären Sie die auftretenden Größen.

b) Ein typischer Festkörper besitzt einen Schermodul von $G = 20 \cdot 10^9\ \mathrm{N/m^2}$ bei einer Dichte von $\rho = 5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$. Berechnen Sie daraus die Wellenlänge λ einer transversalen Wellen mit der Frequenz $\nu = 1$ kHz und geben Sie quantitativ die dazu gehörige Wellenfunktion mit einer Amplitude von 0,1 mm an.

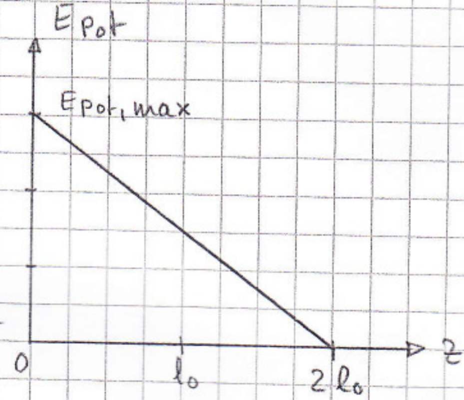
Aufgabe 1

a) Energieerhaltung $E_{el} = E_{pot}$

$$\frac{1}{2} D l_0^2 = m g h = m g 2 l_0$$

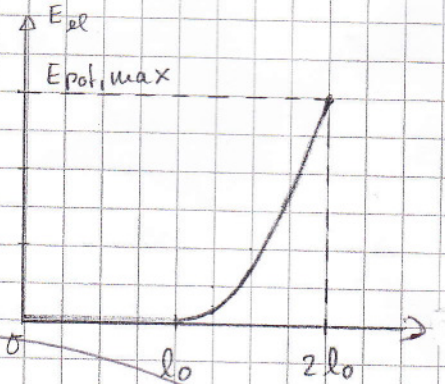
$$\Leftrightarrow D = \frac{4 m g}{l_0} = \frac{4 \cdot 80 \text{ kg} \cdot 10 \frac{m}{s}}{20 \text{ m}}$$

$$\underline{\underline{D = 160 \text{ N/m}}}$$



b) $E_{pot} = mg\,(2 l_0 - z)$

$\forall z \,;\, 0 \leq z \leq 2 l_0$



$E_{el} = 0 \quad , \; z \leq l_0$

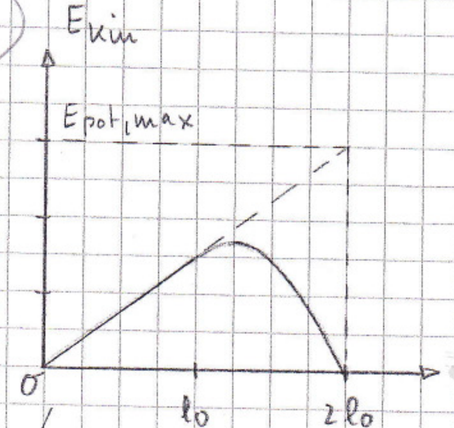
$E_{el} = \frac{1}{2} D (z - l_0)^2 \quad , \; z > l_0$

$E_{kin} + E_{pot} = \text{konst.} = E_{pot,max}$ für $z < l_0$

$E_{kin} + mg\,(2 l_0 - z) = mg\,2 l_0$

$\Leftrightarrow E_{kin} = mgz$ für $z < l_0$

$E_{kin} + E_{pot} + E_{el} = \text{konst} = E_{pot,max}$
für $z \geq l_0$



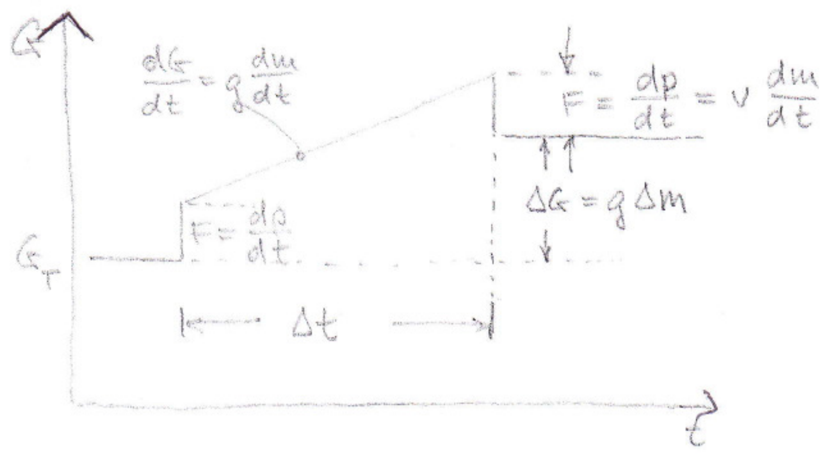
$E_{kin} + mg\,(2 l_0 - z) + \frac{1}{2} D (z - l_0)^2$

$= mg\,2 l_0$

$\Rightarrow E_{kin} = mgz - \frac{1}{2} D (z - l_0)^2$

für $z \geq l_0$

Aufgabe 2



Gewichtszunahme ΔG in Δt $\rightarrow$ $\frac{\Delta G}{\Delta t} = \frac{dG}{dt} = g\frac{dm}{dt}$

Regenschirm weg/hin $\rightarrow$ Stufe $F = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = v\frac{\Delta G}{\Delta t\, g}$

$\rightarrow v = \frac{F \cdot g \cdot \Delta t}{\Delta G}$; $F, \Delta G, \Delta t$ ablesen

Aufgabe 3

a) Scheibe: $\Theta_S = \int r^2 dm$, $dm = \rho dV = \rho d\, 2\pi r\, dr$

$$\Theta_S = \rho d 2\pi \int_0^{R_a} r^3 dr = \rho\frac{d\pi}{2} R_a^4$$

Ring: $\Theta_R = \rho d 2\pi \int_{R_i}^{R_a} r^3 dr = \frac{\rho d\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4) = \frac{\rho d\pi}{2} R_a^4 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\Theta_S$

b) Drehimpulserhaltung, inelastischer "Stoß"

(vorher) $\Theta_S \omega_1 = (\Theta_S + \Theta_R)\omega_2$ (nachher)

$$\omega_2 = \frac{\Theta_S}{\Theta_S + \Theta_R}\omega_1 = \frac{\Theta_S}{\Theta_S \cdot \frac{7}{4}} = \frac{4}{7}\omega_1;$$

c) Energie vorher: $E_1 = \frac{1}{2}\Theta_S \omega_1^2$

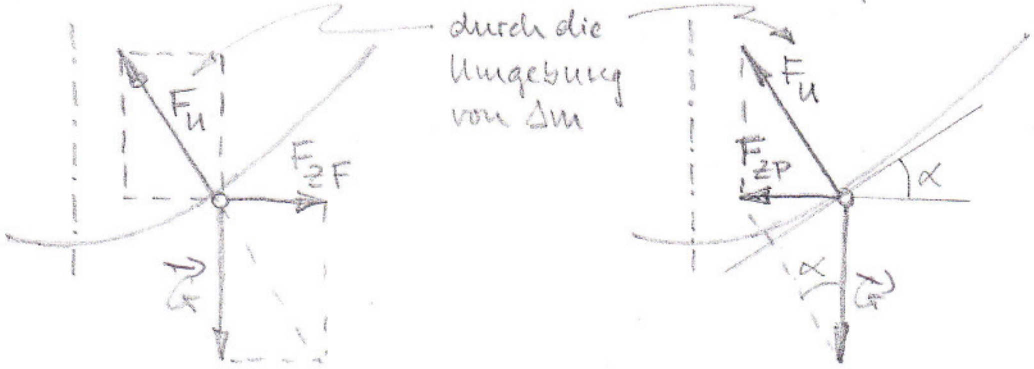
Energie nachher: $E_2 = \frac{1}{2}(\Theta_S + \Theta_R)\omega_2^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}\Theta_S\omega_2^2 = \frac{1}{2}\Theta_S\frac{7}{4}\left(\frac{4}{7}\omega_1\right)^2 = \underline{\frac{4}{7}E_1}$

Energieverlust: $W_{Wärme} = \frac{3}{7}E_1$

Aufgabe

(4) a) Tangentialkomponente der resultierenden Kraft muss Null sein auf der Oberfläche OF

b) "von innen" "von außen"



Δm ruht! $\rightarrow F_{res} = 0$

$F_U \perp$ OF, schräg!

$\rightarrow$ es gibt eine Zentrifugalkraft F_{ZF}, die durch die horizontale Komponente von F_U kompensiert wird

$\vec{F}_U = -(\vec{G} + \vec{F}_{ZF})$

Δm ist auf einer Kreisbahn!

$\rightarrow$ Zentripetalkraft F_Z nötig!

Sie wird von der horizontalen Komponente von F_U aufgebracht

$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_U + \vec{G}$

c) für die Tangente der OF bei Δm gilt

$$\frac{dy}{dx} = \tan\alpha = \frac{F_{ZP}}{G} = \frac{\cancel{\Delta m}\,\omega^2 x}{\cancel{\Delta m}\, g}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$$

Aufgabe 5

a) $F = m \cdot a = -D \cdot x - b\dot{x} + F_0 e^{i\omega t}$

$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x} + F_0 e^{i\omega t}$

$\ddot{x} + \frac{D}{m} x + \frac{b}{m}\dot{x} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$

b) $\ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

Lsg $x(t) = A_0 \cos \omega t$

$\dot{x}(t) = -\omega A_0 \sin \omega t$

$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A_0 \cos \omega t$

$-\omega_0^2 x(t) + \frac{D}{m} x(t) = 0$

$\omega_0 = \sqrt{D/m}$

c) $\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{D}{m} x = 0$

$x = c e^{\lambda t}$; $\dot{x} = \lambda c e^{\lambda t} = \lambda x$

$\ddot{x} = \lambda^2 c e^{\lambda t} = \lambda^2 x$

$\rightsquigarrow \lambda^2 x + \frac{b}{m}\lambda x + \underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega_0^2} x = 0$

$\lambda^2 + \frac{b}{m}\lambda + \omega_0^2 = 0$

$\lambda_{1/2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$x = e^{-\gamma t}\left[C_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right]$

schwache Dämpfung $\gamma < \omega_0$

$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2-\omega_0^2}_{<0}} = -\gamma \pm \sqrt{-\omega_s^2} = -\gamma \pm i\omega_s$

$\underline{\omega_s^2 = \omega_0^2 - \gamma^2}$

$x_1 = e^{-\gamma t} \underbrace{|c| e^{i\varphi_0}}_{\text{aus Anfangsbedingungen}} e^{i\omega_s t}$

$\tau_{Amplitude} = \frac{1}{\gamma}$

$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} D x_{max}^2 = \frac{1}{2} D |c|^2 e^{-2\gamma t}$

$\tau_{Energie} = \frac{1}{2\gamma} = \frac{m}{b}$

aperiodischer Grenzfall : $\lambda = -\gamma = -\omega_0$

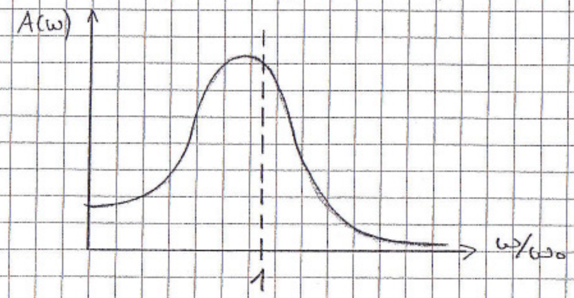
keine Schwingung !

starke Dämpfung : $\gamma > \omega_0$

$\lambda_{1/2} = -\gamma \pm \omega$ $\left(x = e^{-\gamma t}\left[C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}\right] \right)$

"Kriechfall" ; kein oszillatorischer Anteil

d) $x = c e^{i\omega t}$ Oszillator hat gleiche Frequenz wie Anregung / eingeschwungener Fall



c ist imaginär und enthält Amplitude + Phasenverschiebung zwischen Auslenkung x und Anregung

$A = \sqrt{c c^*}$

Aufgabe 6

a) $u(x,t) = u_0 \cos(kx + \omega t)$

$\uparrow$ −x-Richtung : gleiches VZ

u_0 ... Amplitude

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ... Wellenzahl

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ ... Winkelgeschwindigkeit

b)

aus Wellengleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \underbrace{\frac{G}{\varsigma}}_{v_{ph}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$v_{ph} = \sqrt{\frac{G}{\varsigma}}$

$v_{ph} = 2000 \frac{m}{s}$

$v_{ph} = \lambda \cdot \nu \Rightarrow \lambda = \frac{v_{ph}}{\nu} = \frac{2000 \frac{m}{s}}{1000 \frac{1}{s}}$

$\lambda = 2m$

$u(x,t) = 0{,}1\,mm \cos\left(\frac{2\pi}{2m} \cdot x + 2\pi \cdot 1000 \frac{1}{s} \cdot t\right)$