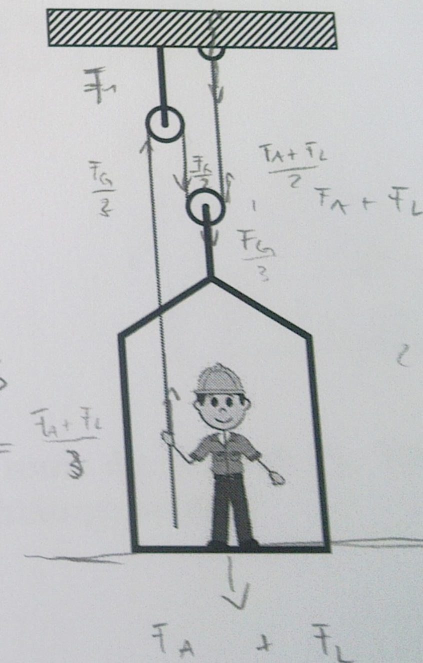
Aufgabe 1: (10 Punkte)

Ein Arbeiter steht in einem Lift, mit dem er sich durch eigene Kraft mittels eines Seils hochgezogen hat. Das Seil ist an der Decke befestigt und läuft durch zwei Rollen, von denen eine mit der Decke und die andere mit dem Lift fest verbunden ist (siehe Skizze). Seine eigene Gewichtskraft ist $F_A = 800\,\mathrm{N}$, die des Lifts beträgt $F_L = 400\,\mathrm{N}$.



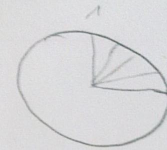
a) Mit welcher Kraft F_0 muss er an dem Seil ziehen, um sich und den Lift in der Schwebe zu halten?

b) Wie groß ist die Kraft F_1, welche die obere Rolle über die Befestigung auf die Decke ausübt?

c) Welche Arbeit W muss der Arbeiter aufwenden, um sich $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ weiter hochzuziehen?

$\frac{3}{2} F_G$

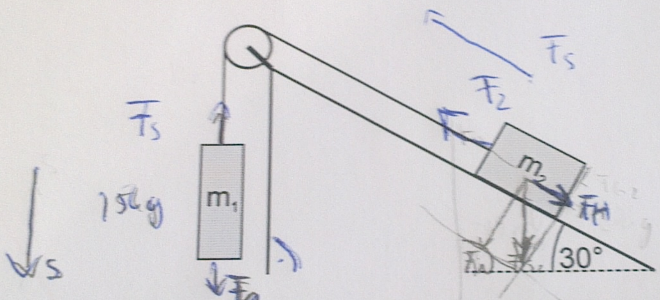
a) $\sum_i F_i = const \rightarrow a = 0$

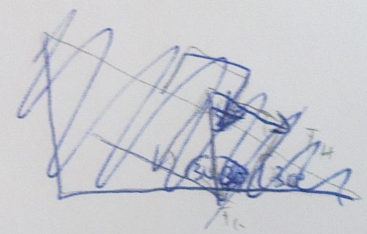


$\sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Ein im Schwerefeld frei hängender Körper der Masse $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$ zieht über ein Seil und einer Umlenkrolle mit der Kraft F_S an einen auf einer Schräge liegenden zweiten Körper der Masse $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ (vgl. Skizze). Der Steigungswinkel der Schräge ist $\varphi = 30°$.





Berechnen Sie die gemeinsame Beschleunigung a der Körper sowie die Seilkraft F_S. Reibungskräfte sowie die Massen von Seil und Rolle sollen vernachlässigt werden.

Zahlenwert: Erdbeschleunigung $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$\cos \varphi = \frac{F_H}{K_P}$

$\cos 30° \cdot mg = F_H$

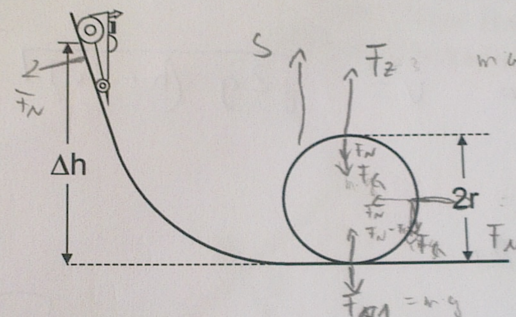
$F_H = -F_2 = -mg \cdot \sin 30°$

$(m_1 + m_2)\,a = F_1 + F_2$

$(m_1 + m_2)\,a = m_1 g + (-m_2 \cdot g \cdot \sin 30°) = g(m_1 - m_2 \sin 30°$

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Ein Spielzeugauto mit Masse $m = 0.1\,\mathrm{kg}$ wird in einer Höhe $z = 1\,\mathrm{m}$ losgelassen, schießt eine steile Fahrbahn über $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ herab und durchfährt dann einen Looping mit Radius $r = 20\,\mathrm{cm}$.



$m\omega^2 r - mg$

$F_{N1} = m \cdot g$

$F_{N2} = m\omega^2 r$

a) Berechnen Sie die Normalkraft F_N, die das Auto auf die Fahrbahn ausübt, bei drei verschiedenen Höhen z im Looping: beim Eintritt ($z = 0$), auf halber Höhe ($z = r$) und im Scheitel ($z = 2r$).

b) Wie groß kann der Loopingradius r für $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ maximal gewählt werden, ohne dass das Auto den Kontakt zur Fahrbahn verliert?

Vernachlässigen Sie Reibungsverluste und die räumliche Ausdehnung des Autos.

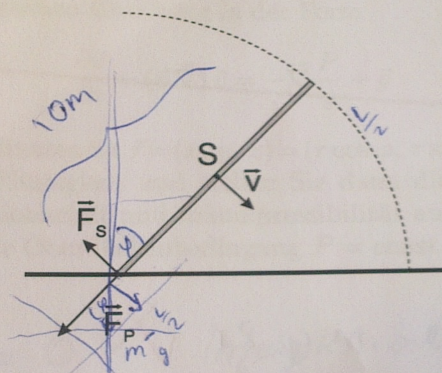
Zahlenwert: Erdbeschleunigung $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

a) Höhe $z=0$: Es wirkt nur die Gewichtskraft.

Aufgabe 4: (16 Punkte)

Ein zunächst ruhender, $L = 10\,\mathrm{m}$ hoher zylindrischer Holzmast der Masse $m = 150\,\mathrm{kg}$ fällt aus der senkrechten Position parallel auf den Boden. Eine Halterung fixiert den Fuß des Mastes im Kontaktpunkt, übt aber keinen Einfluß auf die radiale Bewegung aus.

$F_s =$



$F_s = \Theta \cdot L$, $M = \Theta \dot{\omega}$

$F_P =$

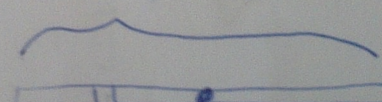
a) Leiten Sie das Trägheitsmoment des Mastes bezüglich seines Schwerpunkts als Funktion von L ab. Sein Durchmesser d kann dabei wegen $d \ll L$ vernachlässigt werden. $\Theta(L)$

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Schwerpunkts S kurz vor dem Aufprall auf den Boden.

c) Wie groß sind die von der Halterung auf den Mast ausgeübten Kräfte kurz vor dem Aufprall? Berechnen Sie dazu die Kraftkomponenten F_P und F_S parallel und senkrecht zur Achse des Holzmastes.

Zahlenwerte: $\sqrt{3} \approx 1.73$; Erdbeschleunigung $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$m = 150\,\mathrm{kg}$, Länge $= L$



a) $\Theta = \int L^2\, dm$ $\qquad dm = m\, dl$

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Eine inkompressible Flüssigkeit rotiert in einem zylindrischen Gefäß mit Radius r um seine z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Bestimmen Sie die stationäre Gestalt $z(x, y)$, welche die Oberfläche im Schwerefeld mit der Beschleunigung $\vec{g} = (0, 0, -g)$ einnimmt. Gehen Sie dazu aus von der Eulerschen Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\vec{\nabla}\,\frac{P}{\varrho} + \vec{g}\,.$$

Hinweis: In Zylinderkoordinaten ist $\vec{r} = (x,\ y,\ z) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)$. Berechnen Sie damit die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und stellen Sie dann die drei Differentialgleichungen unter Benutzung von Stationarität und Inkompressibilität auf. Lösen Sie so $P(x, y, z)$ und benutzen Sie schließlich die Oberflächenbedingung $P = \text{const}$ zur Ableitung von $z(x, y)$.

Stationarität: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ ✓ Inkompressibilität: $\frac{1}{\rho} = \text{const.}$ ✓

$\Rightarrow (\vec{v}\,\vec{\nabla})\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\,\vec{\nabla} p + \vec{g}$ ✓

$\left(\frac{\partial}{\ }\right) \left(v_x\right)$