Prof. Dr. J. Blümer, Dr. H. Dembinski (Institut für Kernphysik)

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Tutorium	(Gruppennummer oder Name des Tutors oder Raumnummer)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Max. Punkte	6	4	5	9	9	9	42
Erreicht							

- Maximale Bearbeitungszeit: 2 Stunden
- Schreiben Sie auf **alle** verwendeten Blätter ihren Namen und ihre Matrikelnummer. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem **eigenen** Blatt.
- Taschenrechner sind **nicht** erlaubt und werden auch nicht gebraucht. Lassen Sie Wurzeln und irreduzible Brüche im Endergebnis stehen (z.B. 1/3 oder $\sqrt{2}$). Vergessen Sie nicht die Angabe der Einheiten beim Ergebnis – es droht sonst Punktabzug.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis neben sich auf den Tisch, so dass er während der Klausur kontrolliert werden kann.
- Zahlen und Konstanten:

$$
\begin{array}{ll}
g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} & G = 7\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}} \\
\pi = 3 & c = 3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\
m_{\mathrm{Erde}} = 1\cdot 10^{25}\,\mathrm{kg} & m_{\mathrm{Mond}} = 1\cdot 10^{23}\,\mathrm{kg} \\
\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2 & \sin 30^\circ = 1/2 \\
\cos 60^\circ = 1/2 & \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2
\end{array}
$$

- pq-Formel: $x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Aufgabe 1: *6 Punkte*

Eine kleine Stahlkugel mit einer Masse von 5 g wird in Ruhe gehalten und dann plötzlich losgelassen, so dass sie frei fällt. In einer (20 ± 1) cm tiefer liegende Lichtschranke wird die Geschwindigkeit gemessen. Was für eine Geschwindigkeit sagen Sie voraus und wie unsicher ist diese Vorhersage? *Die Luftreibung ist zu vernachlässigen.*

Aufgabe 2: *4 Punkte*

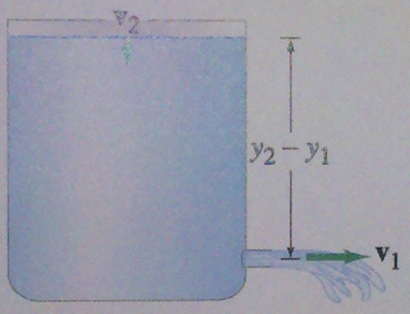
Das böse Alienvolk der Ur-Quan will die Menschheit zerstören. Dazu beschleunigen die Aliens einen Asteroid mit einer Masse von 4000 t auf eine Geschwindigkeit von $v = 180\,000$ km/s in Richtung Erde. Berechnen Sie die kinetische Energie des Asteroiden.

Aufgabe 3: *5 Punkte*

Der Mond zieht Körper ebenso wie die Erde an. Gibt es entlang der Verbindungslinie zwischen Erde und Mond einen kräftefreien Punkt? Falls ja, in welcher Distanz x zur Erde ist dieser Punkt, wenn der Abstand zwischen Erde und Mond r ist? Vernachlässigen Sie die Rotation des Monds um die Erde.

Aufgabe 4: *9 Punkte*

Ein Tank ohne Deckel mit Querschnitt A_2 ist bis zur Höhe y_2 gefüllt. Auf der Höhe y_1 strömt die Flüssigkeit durch eine schmale Öffnung mit Querschnitt A_1 wie in der Abbildung dargestellt:



(a) Zeigen Sie unter Verwendung der hydrodynamischen Prinzipien für eine inkompressible Flüssigkeit, dass der Flüssigkeitspegel $h = y_2 - y_1$ mit einer Geschwindigkeit

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}}$$

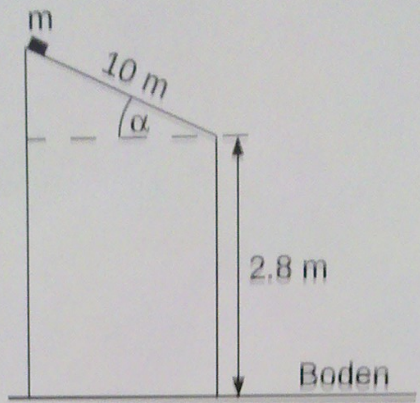
fällt. Viskosität und Reibungseffekte sind zu vernachlässigen.

(b) Zeigen Sie, dass der Ansatz $h(t) = (-\alpha t + \sqrt{h_0})^2$ die Differentialgleichung aus (a) löst für den Fall dass $h = h_0$ bei $t = 0$. Bestimmen Sie α.

(c) Wie lange würde es dauern bis der Tank ausläuft, wenn der Zylinderdurchmesser 10 cm beträgt, er mit 6 Liter Wasser gefüllt ist und sich die Öffnung mit 1 cm Durchmesser am Boden des Zylinders befände? Nutzen Sie die Näherung: $(A_2^2 - A_1^2) \approx A_2^2$.

Aufgabe 5: *9 Punkte*

Ein Block der Masse $m = 500$ g gleitet aus dem Stand eine schiefe Ebene hinab, die mit der Horizontalen einen Winkel $\alpha = 30°$ einschließt. Nach 10 m Gleitstrecke ist die schiefe Ebene zu Ende und der Block fällt 2.8 m frei zu Boden.



(a) Wieviel potentielle Energie wurde in kinetische umgewandelt kurz bevor der Block auf dem Boden aufschlägt?

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Blocks zum Zeitpunkt des "Absprungs" von der schiefen Ebene?

(c) Wie lange dauert der Fall zu Boden vom Zeitpunkt des "Absprungs" an?

Aufgabe 6: *9 Punkte*

Ein dünner Stab der Länge l, der Masse m, und der homogenen Längendichte $\rho = dm/dl$ wird mit dem unteren Ende leicht in die Erde gesteckt so dass der Fußpunkt fixiert ist. Nun wird der Stab zur vertikalen Achse um einen kleinen Winkel ϕ ausgelenkt und dann losgelassen, so dass er frei fällt. Das untere Ende des Stabes bewege sich dabei nicht.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Stabes für diese Bewegung.

(b) Berechnen Sie das durch die Gravitation entstehende Drehmoment M durch Integration der infinitesimalen Drehmomente $dM = |\vec{r} \times d\vec{F}|$ die auf Längenelemente dl entlang des Stabes wirken. Zeigen Sie, dass das Drehmoment M so wirkt, als würde die gesamte Gewichtskraft am Schwerpunkt in der Mitte des Stabes angreifen.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel ϕ auf und lösen Sie sie für kleine Winkel ϕ.

A1 geg: $h = (20 \pm 1)\,cm = (0{,}2 \pm 0{,}01)\,m$ ges: v

$v_0 = 0$

Freier Fall: $\ddot{y} = -g$ $\uparrow y$

[Masse irrelevant] $\dot{y} = -g \cdot t + \underbrace{v_0}_{=0}$ (mit $t_0 = 0$) ①

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + y_0$

$$\left[\frac{2(y_0 - y)}{g}\right]^{1/2} = t$$

ges: $v = \dot{y} = -[2g\underbrace{(y_0 - y)}_{=h}]^{1/2} = -(2gh)^{1/2}$ ①

$$= -[2 \cdot 10 \cdot 0{,}2]^{1/2} \frac{m}{s}$$

$$= -2\,\frac{m}{s} = -200\,\frac{cm}{s}$$ ①

Fehlerfortpflanzung: $\sigma[v] = \left|\frac{\partial v_y}{\partial h}\right| \sigma[h]$ ①

$$\frac{\partial v}{\partial h} = -\frac{1}{2}(2gh)^{-1/2} \cdot 2g = -\left(\frac{g}{2h}\right)^{1/2} = -\left(\frac{10}{0{,}4}\right)^{1/2} \frac{1}{s}$$ ①

$$= -\left(\frac{100}{4}\right)^{1/2} \frac{1}{s} = -\frac{10}{2} \frac{1}{s} = -5\,\frac{1}{s}$$

$$\sigma[v] = 5 \cdot \frac{1}{s} \cdot 0{,}01\,m = 0{,}05\,\frac{m}{s} = 5\,\frac{cm}{s}$$ ①

(alternativ: Energieansatz

$\frac{1}{2} m v^2 = mgh \Rightarrow |v| = (2gh)^{1/2}$

gleiches Ergebnis)

A2| geg: $m = 4000\,t = 4 \cdot 10^6\,kg$ ges: E_{kin}

$v = 180\,000\,km/s$

$c = 300\,000\,km/s$

$\beta = \frac{v}{c} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} > 10\%$ ⇒ relativistisch rechnen! 1

kinetische Energie = Gesamtenergie − Ruheenergie 1

$E_{kin} = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)\,mc^2$ 1

[NR: $\gamma = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{9}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$]

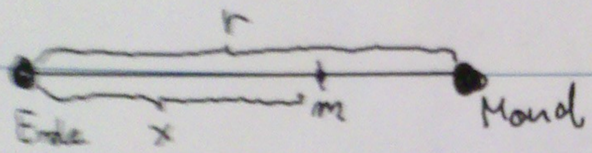
$= \left(\frac{5}{4}-1\right) \cdot 4 \cdot 10^6\,kg \cdot 9 \cdot 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2} = 9 \cdot 10^{22}\,J$

1

A3 geg: $m_E = 10^{25}\,kg$

$m_M = 10^{23}\,kg$

a) Kräftefreier Körper => Kräftegleichgewicht 1



$$F_E \overset{!}{=} F_M$$

$$\cancel{G} \frac{\cancel{m}\, m_E}{x^2} = \cancel{G} \frac{\cancel{m}\, m_M}{(r-x)^2}$$ 1

$$m_E(r^2 - 2rx + x^2) = m_M x^2$$

$$x^2(m_E - m_M) - 2r m_E x + m_E r^2 = 0$$

$$x^2 - \underbrace{\frac{2r m_E}{\Delta m}}_{=p} x + \underbrace{\frac{m_E r^2}{\Delta m}}_{=q} = 0 \quad \text{mit } \Delta m = m_E - m_M$$ 1

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right)^{1/2} = \frac{r m_E}{\Delta m} \pm \left(\frac{r^2 m_E^2}{\Delta m^2} - \frac{m_E r^2}{\Delta m}\right)^{1/2}$$ 1

$$= \frac{r m_E}{\Delta m} \pm \frac{r m_E}{\Delta m}\left(1 - \frac{\Delta m}{m_E}\right)^{1/2} = r \frac{m_E}{\Delta m}\left(1 \overset{(+)}{-} \frac{1}{10}\right)$$

Wir suchen Lsg. zw. Erde und Mond!

$$\text{NR: } \left(1 - \frac{\Delta m}{m_E}\right)^{1/2} = \left(\frac{m_M}{m_E}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{100}\right)^{1/2} = \frac{1}{10}$$

$$\frac{m_E}{\Delta m} = \frac{1}{1 - \frac{m_M}{m_E}} = \frac{1}{\frac{100-1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$= r \cdot \frac{100}{99} \frac{9}{10} = r \cdot \frac{10}{11} \;//$$ 2

a) Kontinuitätsgleichung: $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \Leftrightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2$ 1

Bernoulli-gleichung : $P_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g y_1$ 1

$= P_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g y_2$

mit $P_1 = P_2 \Rightarrow$ $v_1^2 - v_2^2 = 2g(y_2 - y_1)$

$$v_2^2\left(\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1\right) = 2gh$$

$$v_2 = \left[\frac{2gh}{\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1}\right]^{1/2} = \left[\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}\right]^{1/2}$$

$v_2 \downarrow \uparrow \frac{dh}{dt} \Rightarrow v_2 = -\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\left[\frac{2ghA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}\right]^{1/2}$ // 1

b) Ansatz: $h(t) = (-\alpha t + \sqrt{h_0})^2$

$\dot{h} = (-\alpha t + \sqrt{h_0})(-\alpha) = -\alpha h^{1/2}$ 1

Vergleich mit (a): $\alpha = \left[\frac{2gA_1^2}{A_2^2 - A_1^2}\right]^{1/2}$ // 1

c) $h(t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \alpha t = \sqrt{h_0}$ 1

$$t = \left[\frac{h_0(A_2^2 - A_1^2)}{2gA_1^2}\right]^{1/2} \approx \left[\frac{h_0}{2g}\right]^{1/2}\frac{A_2}{A_1}$$ 1

geg: $d_1 = 1\,cm = 10^{-2}\,m$ $d_2 = 10\,cm = 10^{-1}\,m$ $V = 6\,l = 6\cdot 10^{-3}\,m$

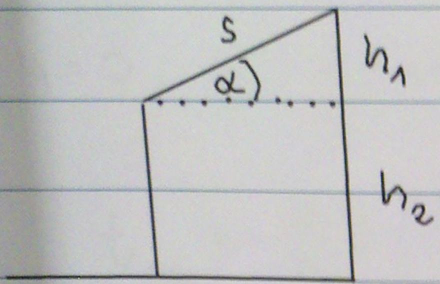
$\frac{\pi}{4} d_2^2 h_0 = V \Leftrightarrow h_0 = 8\cdot 10^{-3}\,m^3 / 10^{-2}\,m^2 = 0{,}8\,m$ 1

$t \approx \left[\frac{8}{10\cdot 20}\right]^{1/2} s \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-4}} = 10^{2}\cdot\frac{2}{10}\cdot s = 20\,s$ // 1

A5 geg: $m = 500\,g = 0{,}5\,kg$ $\qquad s = 10\,m$

$\alpha = 30°$ $\qquad h_2 = 2{,}8\,m$

a) ges: ΔE_{pot}



$$\Delta E_{pot} = mg\,(h_1 + h_2 - 0) \quad 1$$

[NR: $h_1 = \sin\alpha \cdot s = \frac{1}{2} \cdot 10\,m =$

$$= \frac{5}{10}\,kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot \frac{78}{100}\,m$$

$$= \frac{390}{100}\,J = \frac{39}{10}\,J \,// \quad 1$$

b) ges: v beim Absprung

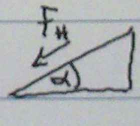
Energieerhaltung: $E_{kin_1} = E_{pot_0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh_1$ 1

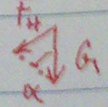
$$\Leftrightarrow v = (2gh_1)^{1/2}$$

$$v = (2 \cdot 10 \cdot 5)^{1/2}\,\frac{m}{s}$$

$$= 10\,\frac{m}{s} \,// \quad 1$$

alternativ, lösen via Dynamik:





$$F_H = \sin\alpha \cdot G = \sin\alpha\, mg$$

$$\cancel{m}\,\ddot{s} = F_H = \sin\alpha\, mg$$

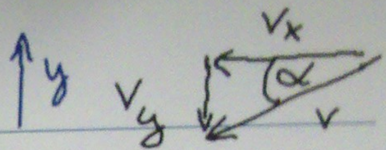
$$(v =)\ \dot{s} = \sin\alpha\, g t \Leftrightarrow t = \frac{\dot{s}}{\sin\alpha \cdot g}$$

$$s = \frac{1}{2}\sin\alpha\, g t^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2s}{\sin\alpha \cdot g} = \frac{\dot{s}^2}{\sin^2\alpha\, g^2} \Leftrightarrow v = \dot{s} = (2\underbrace{s \cdot \sin\alpha}_{= h_1} \cdot g)^{1/2}$$

gleiches Ergebnis

c) ges: t von Absprung bis Landung



$v_y = -\sin\alpha \cdot v = -5\,\frac{m}{s}$ 1

$\ddot{y} = -g \Rightarrow \dot{y} = -gt + v_{y_0}$ 1

$\Rightarrow y = -\frac{g}{2}t^2 + v_{y_0}t + y_0$

$y = 0,\ y_0 = 2{,}8\,m:\quad 0 = t^2 - \underbrace{\frac{2v_{y_0}}{g}}_{p}\,t - \underbrace{\frac{2y_0}{g}}_{q}$ 1

$$t_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \left(\frac{p^2}{4} - q\right)^{1/2}$$
$$= \frac{v_{y_0}}{g} \pm \left(\frac{v_{y_0}^2}{g^2} + \frac{2y_0}{g}\right)^{1/2} = -\frac{5}{10}\,s \pm \left(\frac{25}{100} + \frac{56}{100}\right)^{1/2} s$$
$$= -\frac{5}{10}\,s \pm \frac{9}{10}\,s$$

negative Lsg. unphysikalisch 1

$t = \frac{4}{10}\,s = 0{,}6\,s$ 1