Prof. Dr. J. Blümer, Dr. H. Dembinski (Institut für Kernphysik)

Name, Vorname	
Matrikelnummer	
Tutorium	(Gruppennummer oder Name des Tutors oder Raumnummer)

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Max. Punkte	5	7	9	7	6	8	42
Erreicht							

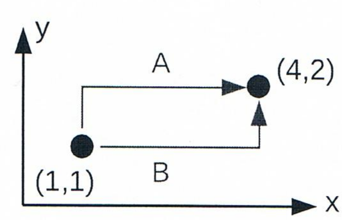
- Maximale Bearbeitungszeit: 2 Stunden
- Schreiben Sie auf **alle** verwendeten Blätter ihren Namen und ihre Matrikelnummer. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem **eigenen** Blatt.
- Taschenrechner sind **nicht** erlaubt und werden auch nicht gebraucht. Lassen Sie Wurzeln und irreduzible Brüche im Endergebnis stehen (z.B. 1/3 oder $\sqrt{2}$). Vergessen Sie nicht die Angabe der Einheiten beim Ergebnis – es droht sonst Punktabzug.
- Legen Sie Ihren Studentenausweis neben sich auf den Tisch, so dass er während der Klausur kontrolliert werden kann.
- Zahlen und Konstanten:

$$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad G = 7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$$
$$\pi = 3 \qquad c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$
$$\cos 30° = \sqrt{3}/2 \qquad \sin 30° = 1/2$$
$$\cos 60° = 1/2 \qquad \sin 60° = \sqrt{3}/2$$
$$\rho_{\text{Wasser}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$$

- pq-Formel: $x^2 + px + q = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

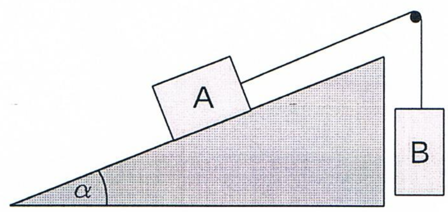
Aufgabe 1: *5 Punkte*

Gegeben sei ein Kraftfeld $\vec{F} = 3x\,\vec{e}_y\,\mathrm{N/m}$. Ist das Kraftfeld konservativ? Berechnen Sie die Arbeit W die benötigt wird, um einen Körper entlang der Wege A und B vom Punkt $x_0 = 1\,\mathrm{m}$, $y_0 = 1\,\mathrm{m}$ zum Punkt $x_1 = 4\,\mathrm{m}$, $y_1 = 2\,\mathrm{m}$ zu bewegen.



Aufgabe 2: *7 Punkte*

Ein Metallblock A mit der Masse $m_A = 7\,\text{kg}$ gleitet auf einer schiefen Ebene, die mit der Horizontalen einen Winkel $\alpha = 30°$ einschließt. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Körper und Ebene beträgt $\mu_G = \sqrt{3}$. Der Metallblock A ist durch eine Schnur über eine Umleitung mit einem anderen Block B der Masse m_B verbunden, der unter Einfluss der Schwerkraft hängt. Die Schnur sei masselos, nicht dehnbar aber unendlich flexibel und gleitet über die Umleitung reibungsfrei.

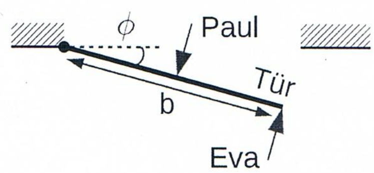


(a) Wenn der Metallblock A auf der schiefen Ebene mit konstanter Geschwindigkeit nach oben gleitet, wie groß ist m_B?

(b) Kann der Metallblock A auf der schiefen Ebene für eine andere Masse m_B auch mit konstanter Geschwindigkeit nach unten gleiten?

Aufgabe 3: *9 Punkte*

Die junge Eva rangelt mit ihrem älteren Bruder Paul. Paul versucht eine Tür auf zu drücken und drückt dabei in der Mitte der Tür mit der Kraft $F_P = 80\,\text{N}$. Eva versucht die Tür zu zu drücken und drückt am äußeren Ende der Tür mit der Kraft $F_E = 50\,\text{N}$. Beide drücken stets senkrecht auf die Tür. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Tür um $\phi = 0.05\,\text{rad}$ geöffnet und in Ruhe. Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.



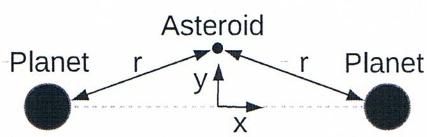
(a) Geht die Tür aufgrund der wirkenden Kräfte auf oder zu?

(b) Die Tür ist ein dünner Quader aus homogenen Material. Sie hat die Breite $b = 1\,\text{m}$ und Masse $m = 12\,\text{kg}$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Tür.

(c) Falls Sie bei a) finden, dass die Tür sich schließt, berechnen Sie die Zeitdauer T bis die Tür geschlossen ist ($\phi = 0$). Falls die Tür sich öffnet, berechnen Sie statt dessen die Zeitdauer T bis die Tür geöffnet ist ($\phi = \pi/2$).

Aufgabe 4: *7 Punkte*

Ein Asteroid der Masse m befindet sich im Schwerefeld zweier Planeten mit jeweils der Masse M. Der Abstand r zu beiden Planeten ist gleich groß.



Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich alle drei Körper in Ruhe. Im Folgenden soll die Bewegung des Asteroiden betrachtet werden. Die Bewegung des Asteroiden erfolgt so schnell, dass die Positionen der Planeten trotz der gegenseitigen Anziehung über die betrachtete Zeitskala näherungsweise konstant sind.

(a) Berechnen Sie den Vektor der auf den Asteroiden wirkenden Gesamtkraft in dem skizzierten Koordinatensystem.

(b) Schreiben Sie vektoriell die Bewegungsgleichung für den Asteroiden hin.

(c) Was ist die Zeitdauer T für eine volle Periode der Bewegung des Asteroiden für den Fall dass der Abstand y zur Verbindungslinie der Planeten sehr klein gegenüber r ist?

Aufgabe 5: *6 Punkte*

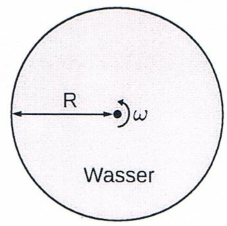
Ein Astronaut in einer Raumkapsel fliegt mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 180\,000\,\mathrm{km/s}$ an der Erde vorbei und beobachtet durch ein Fernrohr ein Fadenpendel auf der Erde. Das Fadenpendel schwingt senkrecht zur Bewegungsrichtung der Raumkapsel.

(a) Ein Physiker auf der Erde vermisst die Kreisfrequenz des Pendels und findet $\omega = 40\,\mathrm{Hz}$. Welche Kreisfrequenz misst der Astronaut?

(b) Ein identisches Pendel wird neben das erste aufgebaut und ausgelenkt. Der Physiker auf der Erde misst wieder die Kreisfrequenz $\omega = 40\,\mathrm{Hz}$, diesmal ist die Pendelbewegung jedoch parallel zur Bewegungsrichtung der Kapsel. Welche Kreisfrequenz misst der Astronaut für dieses Fadenpendel, die gleiche oder eine andere? Es reicht, wenn Sie diesen Aufgabenteil argumentativ lösen.

Aufgabe 6: *8 Punkte*

Eine zylindrische Zentrifuge mit Radius $R = 2\,\mathrm{m}$ und Höhe $h = 30\,\mathrm{cm}$ ist komplett mit Wasser gefüllt. Die Zentrifuge rotiert mit einer konstanten Kreisfrequenz $\omega = 10\,\mathrm{Hz}$. Gravitation ist zu vernachlässigen, ebenso Reibungseffekte und Viskosität. Betrachten Sie Wasser als inkompressibel.



(a) Leiten Sie eine Formel für den Druck P in der Zentrifuge als Funktion des Abstands r von der Rotationsachse her und berechnen Sie den Druck $P(R)$ an der Außenwand. Zeigen Sie dafür zunächst, dass für den differentiellen Druckunterschied $\mathrm{d}P(r) = \rho\omega^2 r\mathrm{d}r$ gilt. *Hinweis:* Betrachten Sie für die Herleitung ein differentielles Volumenelement $\mathrm{d}V = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}h$ des Zylinders.

(b) Für die Zentrifuge gilt eine modifizierte Bernoulli-Gleichung. Der hydrostatische Druck in der Standardgleichung muss durch den bei a) gefundenen Druck $P(r)$ ersetzt werden. Mit welcher Geschwindigkeit v würde Wasser durch ein kleines Loch im Außenmantel strömen, wenn außerhalb der Zentrifuge ein Druck $P_0 = 1.5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ herrscht?

A1 geg: $\vec{F} = 3x\vec{e}_y \frac{N}{m} \Rightarrow F_x = 0\,,\ F_y(x) = 3x\frac{N}{m}$

Ein Kraftfeld ist konservativ, falls auf allen Wegen zwis zwei beliebigen Punkten die gleiche Arbeit verrichtet ~~w~~ wird. (1)

Wir widerlegen, dass das Kraftfeld konservativ ist indem wir zwei Wege zeigen auf denen unterschiedliche Arbeit verrichtet wird

Ansatz (1)

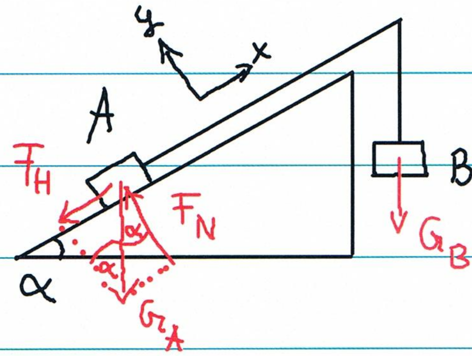
Weg A: $$W_A = \int_{(1,1)m}^{(4,2)m} d\vec{r}\,\vec{F} = yF_y(1m)\Big|_{1m}^{2m} + x\underbrace{F_x}_{0}\Big|_{1m}^{4m} = 3\,Nm$$ (1)

Weg B: $$W_B = x\underbrace{F_x}_{0}\Big|_{1m}^{4m} + yF_y(4m)\Big|_{1m}^{2m} = 12\,Nm$$ (1)

Also $W_A \neq W_B \Rightarrow \vec{F}$ ist nicht konservativ. (1)

A2 geg: $m_A = 7\,kg$, $\alpha = 30°$, $\mu_G = \sqrt{3}$

A bewegt sich mit konst. Geschwindigkeit aufwärts/abwärts
a) b)



Aus $\vec{v}$ = konst. folgt $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (1)

wegen $\dot{\vec{p}} = m \underbrace{\dot{\vec{v}}}_{=0} = \sum_i \vec{F}_i$

Reibung wirkt stets der Bewegung entgeg

x-Komponente: $-F_H \mp F_R + G_B = 0$ (1) mit $F_H = m_A g \sin\alpha$ (1)

y-Komponente: $F_N - G_A \cos\alpha = 0$ (2)

aus (2): $F_N = G_A \cos\alpha = m_A g \cos\alpha$

$\Rightarrow F_R = \mu_G F_N = \mu_G m_A g \cos\alpha$ (3)

(3) in (1): $-m_A \cancel{g} \sin\alpha \mp \mu_G m_A \cancel{g} \cos\alpha + m_B \cancel{g} = 0$

$\Leftrightarrow m_B = m_A(\sin\alpha \pm \mu_G \cos\alpha)$ (1)

$= 7\,kg \left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 7\,kg \left(\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\right)$

a) $m_B = 14\,kg$ (1)

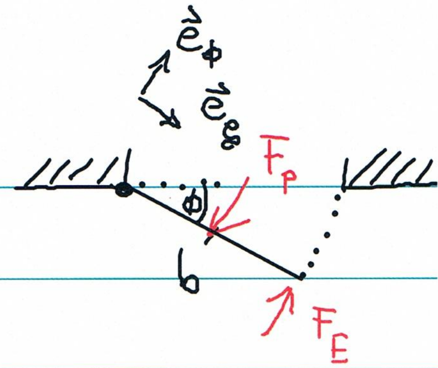
b) $m_B = -7\,kg$, keine physikalische Lösung. (3)

Es ist bei dieser Anordnung nicht möglich, dass sich der Block A mit konstanter Geschw nach unten bewegt.

•korrekte V
•Ergebnis
•Interpret
$m_B < 0$ zählt auch

A3| geg: $b = 1\,m$ $\qquad F_p = 80\,N$

$m = 12\,kg$ $\qquad F_E = 50\,N$



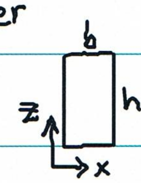
a) Bestimme resultierendes Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{M}_p + \vec{M}_E = \vec{r}_p \times \vec{F}_p + \vec{r}_E \times \vec{F}_E = -\frac{b}{2}\cdot F_p \cdot \vec{e}_z + b \cdot F_E \cdot \vec{e}_z$$ 1

$$= -\frac{1}{2}m \cdot 80\,N + 1\,m \cdot 50\,N = 10\,Nm$$ 1

$\Rightarrow$ Die Tür geht zu. 1

Ansatz 1 $\qquad$ homogener dünner Quader



b) Trägheitsmoment $\quad J = \int r^2 dm = \int x^2 \varrho\, dx$

$\varrho = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{b}$

$$J = \varrho \int_0^b x^2 dx = \varrho \frac{1}{3} b^3 = \frac{1}{3} m b^2$$ 1

$$= 4\,kg\,m^2 \,//$$ 1

c) ges: T bis Tür geschlossen

Bewegungsgleichung in Polarkoordinaten:

$$\dot{L}_z = J\ddot{\phi} = M_z \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{M_z}{J} = \alpha = \frac{10\,Nm}{4\,kg\,m^2} = \frac{5}{2}\,s^{-2} = \text{konst.}$$ Ansatz 1

$\int dt$: $\quad \dot{\phi} = \alpha t$ mit $\dot{\phi}(t=0) = 0$

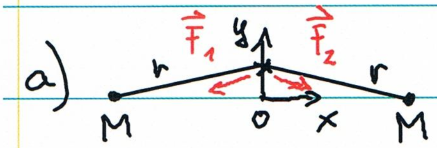
$\int dt$: $\quad \phi = \frac{1}{2}\alpha t^2 - \phi_0$ $\quad$ mit $\phi_0 = 0{,}05$ rad

$$T = \left(\frac{2\phi_0}{\alpha}\right)^{1/2}$$ 1

$$= \left(\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}\,s^2\right)^{1/2} = \frac{1}{5}\,s \,//$$ 1

A4) geg: m, M, r, y

a)



$$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2 = G \frac{mM}{r^2} \overbrace{\frac{1}{r}\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}}^{\hat r}$$ Ansatz 1

$$+ G \frac{mM}{r^2} \frac{1}{r}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$= G \frac{mM}{r^3}\begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix} = G \frac{mM}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -2y \end{pmatrix}$$ 1

b) 1 Ansatz

$$\dot{\vec p} = \vec F \Rightarrow \dot p_x = \cancel{m}\ddot x = 0$$ 1

$$\dot p_y = \cancel{m}\ddot y = -G \cancel{m} \frac{2yM}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$ 1

c) $y \ll r \Rightarrow \begin{cases} y \ll x \\ r \approx x = \text{konst.} \end{cases} \Rightarrow \ddot y \approx -\frac{2GM}{x^3} \approx -\frac{2GM}{r^3} y = -\underset{\text{konst.}}{\underset{\shortparallel}{\omega^2}} y$ 1

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r^{3/2}}{(2GM)^{1/2}} = \pi \sqrt{\frac{2r^3}{GM}}$$ 1

A5 geg.: $v = 180\,000\ km/s = 18 \cdot 10^7\ m/s$

$\omega = 40\ Hz$

a) Zeitdilatation: $T' = \gamma T$ (aus Sicht des Astronauten: T'; aus Sicht der Erde: T) (1)

$$\gamma = \left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\left(\frac{18}{30}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1-\frac{9}{25}\right)^{-1/2} = \left(\frac{16}{25}\right)^{-1/2} = \frac{5}{4}$$ (1)

[NR: $\frac{18}{30} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$]

$$\Rightarrow \omega' = \frac{2\pi}{T'} = \frac{1}{\gamma}\frac{2\pi}{T} = \frac{1}{\gamma}\omega = \frac{4}{5}\omega$$ (1)

$$= 32\ Hz$$ (1)

b) Auch hier beobachtet der Astronaut $\omega' = 32\ Hz$. Zwar ist aus seiner Sicht der Ausschlag verkürzt, aber gleichermaßen ist auch die Geschwindigkeit des Pendels nun verlangsamt. (2)
Ebenso kann man argumentieren, dass ein Pendel eine Uhr darstellt und das Phänomen der Zeitdilatation nicht von der Arbeitsweise der Uhr abhängen darf.

A6/ geg: $R = 2\,m$ $\quad \varrho = 1000\,kg\,m^{-3}$

$h = 0{,}3\,m$

a) Es wirkt die Zentrifugalkraft $F = m\omega^2 r$. 1

$dA = r\,d\phi\,dh$

$$dm = \varrho\,dV = \varrho\, r\,dr\,d\phi\,dh$$

$$dP = \frac{dF}{dA} \overset{1}{=} \frac{dm\,\omega^2 r}{r\,d\phi\,dh} = \varrho\omega^2 r\,\frac{\cancel{r}\,dr\,\cancel{d\phi}\,\cancel{dh}}{\cancel{r}\,\cancel{d\phi}\,\cancel{dh}}$$ 1

$$= \varrho\omega^2 r\,dr \;/\!/$$

(Man hätte auch direkt $dV = dr\,dA$ nutzen können.)

$$P(r) = \int_0^r dP(r') = \varrho\omega^2 \int_0^r r'dr' = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 \;/\!/$$ 1

$$P(R) = \frac{1}{2}\cdot 1000\,kg\,m^{-3}\,100\,s^{-2}\,4\,m^2 = 2\cdot 10^5\,Pa \;/\!/$$ 1

b) Modifizierte Bernoulli-Gl.: $P + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 r^2 = konst.$ 1

$$\frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\varrho v^2 + P_0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 R^2 = v^2 + \frac{2P_0}{\varrho}$$

$$\Leftrightarrow \quad v = \left(\omega^2 R^2 - \frac{2P_0}{\varrho}\right)^{1/2}$$ 1

$$= \left(100\,s^{-2}\cdot 4\,m^2 - \frac{3\cdot 10^5\,N\,m^{-2}}{10^3\,kg\,m^{-3}}\right)^{1/2} = 10\,m/s \;/\!/$$ 1