- Maximale Bearbeitungszeit: 2 Stunden
- Schreiben Sie auf alle verwendeten Blätter ihren Namen und ihre Matrikelnummer. Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem eigenen Blatt.
- Taschenrechner oder andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt.
- Vergessen Sie nicht die Angabe der Einheiten beim Ergebnis.
- Bitte schreiben Sie leserlich und halten Sie ihren Studentenausweis bereit.
- Zahlen und Konstanten: $\pi = 3$, $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, $\sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \sqrt{\frac{3}{4}}$

Aufgabe 1: **(4 Punkte)**

Eine Skifahrerin hat gerade begonnen, aus dem Stillstand heraus einen Abhang (mit ebener Oberfläche) mit einem Neigungswinkel von 30° hinab zu fahren. Der Luftwiderstand soll vernachlässigt werden. Nehmen Sie aber an, dass eine Gleitreibung (Gleitreibungszahl $\mu = 1/\sqrt{12}$) im Schnee die Fahrt hemmt.

(a) Berechnen Sie die anfängliche Beschleunigung der Skifahrerin.

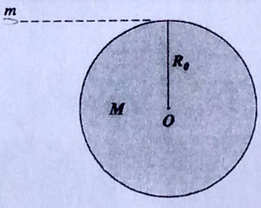
(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die sie nach 4 s erreicht haben wird.

Auf einem anderen Abhang sei der Schnee matschig. Die Skifahrerin fährt diesen Abhang mit einer konstanten Geschwindigkeit hinab. Der Neigungswinkel des Hanges sei θ.

(c) Bestimmen Sie eine Formel für die Gleitreibungszahl μ im matschigen Schnee in Abhängigkeit von θ.

Aufgabe 2: **(4 Punkte)**

Ein Geschoss mit der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, trifft den Rand eines Zylinders mit der Masse M und dem Radius R_0 (siehe Abbildung). Bei dem Stoß bleibt es im Zylinder stecken. Dadurch beginnt sich der anfangs ruhende Zylinder um seine ortsfeste Symmetrieachse reibungslos zu drehen.



(a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω des Zylinders nach dem Stoß. *Hinweis:* Das Trägheitsmoment eines Zylinders ist $I_Z = \frac{1}{2}MR_0^2$. Fassen Sie das Geschoss als Massepunkt mit dem Trägheitsmoment $I_K{=}mR_0^2$ auf.

(b) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie im Anfangszustand in diesem Stoß nicht vollständig in kinetische Energie im Endzustand überführt wird. *Hinweis:* Der Differenzbetrag bei diesem inelastische Stoß wird in Wärmeenergie umgewandelt.

Aufgabe 3: **(4 Punkte)**

Eine Astronautin überlegt, ob sie auf einem kleinen Planetoiden (Masse M_P) mit sich selbst Tennis spielen kann, indem sie einen Ball (Masse m_B) in eine kreisförmige Umlaufbahn schlägt, sich umdreht und den Ball wieder zurück schlägt. Bestimmen Sie

(a) eine Formel für die erforderliche Ballgeschwindigkeit v_B und

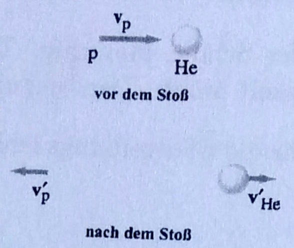
(b) die Umlaufzeit des Balls T_B als Funktion des Planetoidenradius R und der Planetoidendichte ρ,

unter den unten angegebenen Annahmen:

- Der Planetoid sei eine exakte Kugel.
- Er hat keine Atmosphäre.
- Der Abstand des Balls von der Oberfläche werde vernachlässigt.

Aufgabe 4: **(3 Punkte)**

Ein Proton mit einer Masse von $m_p = 1u$ (u ist die atomare Masseneinheit), das sich mit einer Geschwindigkeit von $v_p = 5 \cdot 10^4$ m/s bewegt, stößt elastisch und zentral mit einem ruhenden Heliumkern ($m_{He} \approx 4u$). Berechnen Sie die Geschwindigkeiten des Protons und des Heliumkerns nach dem Stoß (siehe Abbildung).



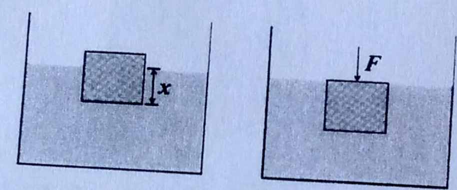
Aufgabe 5: **(3 Punkte)**

Ein Holzwürfel mit der Masse $m = 500$ g und der Dichte $\rho = 0{,}5$ g/cm^3 wird in ein mit Wasser gefülltes Becken gelegt (siehe Abbildung).

(a) Berechnen Sie zunächst das Volumen und die Kantenlänge des Holzwürfels.

(b) Berechnen Sie die Eintauchtiefe x des Holzwürfels in das Wasser.

(c) Berechnen Sie die Kraft, die Sie aufwenden müssen, um den Holzwürfel vollständig unter Wasser zu drücken.



$\rho_W = 1 \frac{g}{cm^3}$

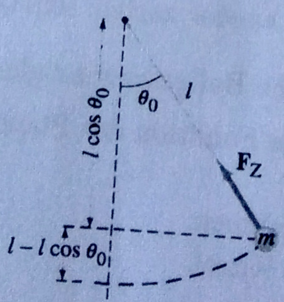
Aufgabe 6: **(6 Punkte)**

Das in der Abbildung dargestellte Pendel besteht aus einer Masse m, das an einem masselosen Faden mit der Länge l aufgehängt ist. Die Masse wird (ohne Schub) bei einem Winkel $\theta = \theta_0$ losgelassen. Vernachlässigen Sie Reibung und Luftwiderstand.

(a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit v des Pendels in Abhängigkeit von θ durch $v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$ gegeben ist.

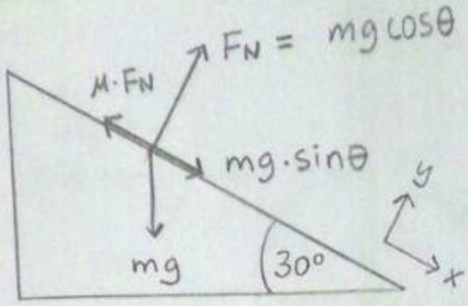
(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten des Pendels am tiefsten und an den höchsten Punkten.

(c) Bestimmen Sie die Zugkraft $F_Z(\theta)$ im Seil.



Aufgabe 1: 4 Punkte

1(a)



$$\Sigma F_x = m a_x$$

$$mg\sin\theta - \mu F_N = m a_x$$

$$\Sigma F_y = m a_y$$

$$F_N - mg\cos\theta = 0 \quad , \text{ da } a_y = 0$$

$$\Rightarrow F_N = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\sin\theta - \mu \cdot \cancel{m}g\cos\theta = \cancel{m}\boxed{a_x}$$ (0,5)

$$\Rightarrow a_x = g \cdot (\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$= g \cdot \left(\sin 30° - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \cos 30°\right)$$

$$= g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right)$$

$$= g \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4} g$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4} g = \frac{1}{4} \cdot 10 \frac{m}{s^2} = \underline{2{,}5 \frac{m}{s^2}}$$ (0,5)

$$v = a \cdot t$$

$$= 2{,}5 \frac{m}{s^2} \cdot 4s$$

$$= \underline{10 \frac{m}{s}}$$

c) Konst. Geschwindigkeit $\Rightarrow$ $a=0$

Gleichungen aus (a):

$$mg\sin\theta - \mu F_N = ma_x = 0$$

$$F_N - mg\cos\theta = ma_y = 0$$

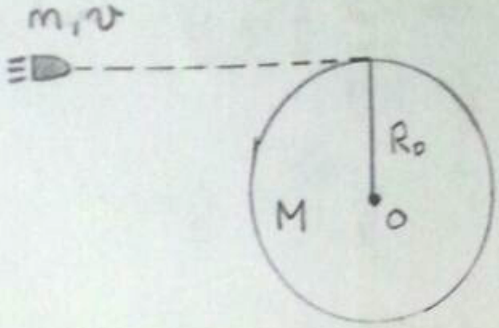
$$\Rightarrow F_N = mg\cos\theta$$ (1)

$$\Rightarrow \cancel{mg}\sin\theta - \boxed{\mu}\,\cancel{mg}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta}$$

(1)

Aufgabe 2: 4 Punkte



- (a) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (0,5)

Drehimpuls der Kugel vor dem Stoß
in Bezug auf Symmetrieachse des Zylinders:

1) $L_K = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \sin\alpha$

$= R_0 \cdot m v \cdot \sin 90^\circ$

$= R_0 \, m v$ (0,5)

Drehimpulserhaltung:

(1) $L_K = L_Z + L_K'$

(0,5)

$\Rightarrow R_0 m v = I_Z \cdot \omega + I_K \cdot \omega$

$\Rightarrow \cancel{R_0} m v = \left(\frac{1}{2} M R_0^{\cancel{2}} + m R_0^{\cancel{2}}\right) \cdot \boxed{\omega}$

$\Rightarrow \omega = \dfrac{m v}{\left(\frac{1}{2} M + m\right) R_0}$ (0,5)

b) $E_{kin,e} - E_{kin,a}$

$$= \frac{1}{2} I_Z \omega^2 + \frac{1}{2} I_K \omega^2 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} M R_0^2 + m R_0^2 \right) \cdot \boxed{\omega^2} - \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{\left(\frac{1}{2} M + m \right)} \cdot \cancel{R_0^2} \cdot \frac{m^2 v^2}{\left(\frac{1}{2} M + m \right)^{\cancel{2}} \cdot \cancel{R_0^2}} - \frac{1}{2} m v^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m^2}{\left(\frac{1}{2} M + m \right)} \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

$$= \underbrace{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{\left(\frac{1}{2} M + m \right)} - \frac{1}{2} m \right)} \cdot v^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2m^2}{M + 2m} - m \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2m^2 - mM - 2m^2}{M + 2m}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{-mM}{M + 2m} \cdot v^2$$

$$= - \frac{mM}{2M + 4m} \cdot v^2 \quad < 0$$

$\Rightarrow E_{kin,e} < E_{kin,a}$

Aufgabe 3: 4 Punkte

(a)

Gravitationskraft = Zentripetalkraft (1)

$$F_G = F_Z$$

$$G \cdot \frac{M_P \cdot \cancel{m_B}}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_B} \cdot \boxed{v_B^2}}{\cancel{R}}$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{G \cdot \frac{M_P}{R}}$$

$$M_P = V \cdot \rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho = \frac{4}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3} \cdot R^3 \cdot \rho = 4 R^3 \rho$$

$$= \sqrt{G \cdot \frac{4 \cdot R^{\cancel{3}\,2} \cdot \rho}{\cancel{R}}}$$

$$= \sqrt{4G \cdot R^2 \cdot \rho}$$

$$= \underline{2R\sqrt{G \cdot \rho}}$$ (1)

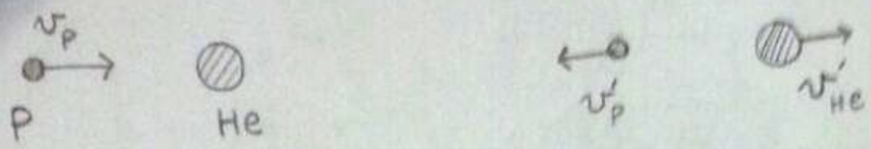
(b) $v_B = \frac{2\pi R}{T_B}$ (1)

(1) $\Rightarrow T_B = \frac{2\pi R}{v_B} = \frac{2\pi \cancel{R}}{2R\sqrt{G \cdot \rho}} = \underline{\frac{\pi}{\sqrt{G \cdot \rho}}}$

(1)

Damit ist T_B unabhängig von R !

Aufgabe 4: 3 Punkte



vor dem Stoß

nach dem Stoß

(0,5)

Impulserhaltung:

$$m_p v_p + 0 = m_p v_p' + \boxed{m_{He}} v_{He}'$$

$$\Rightarrow \cancel{m_p} v_p = \cancel{m_p} v_p' + 4 \cancel{m_p} v_{He}'$$

$$\Rightarrow v_p = v_p' + 4 v_{He}'$$

$$\Rightarrow v_p' = v_p - 4 v_{He}'$$

$$\Rightarrow v_p'^2 = v_p^2 + 16 v_{He}'^2 - 8 v_p \cdot v_{He}'$$

(0,5)

Energieerhaltung:

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m_p} v_p^2 + 0 = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m_p} v_p'^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} \underbrace{\boxed{m_{He}}}_{=4\cancel{m_p}} v_{He}'^2$$

$$\Rightarrow v_p^2 = \boxed{v_p'^2} + 4 v_{He}'^2$$

$$\Rightarrow \cancel{v_p^2} = \cancel{v_p^2} + 16 v_{He}'^2 - 8 v_p \cdot v_{He}' + 4 v_{He}'^2$$

$$\Rightarrow 8 v_p \cancel{v_{He}'} = 20 v_{He}'^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow v_{He}' = \frac{8}{20} v_p = \frac{2}{5} v_p = \frac{2}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} \cdot 10^4 \frac{m}{s} = \underline{\underline{2 \cdot 10^4 \frac{m}{s}}}$$

(1)

$$\Rightarrow v_p' = v_p - 4\,\underbrace{v_{He}'}$$

$$= v_p - 4 \cdot \frac{2}{5} v_p$$

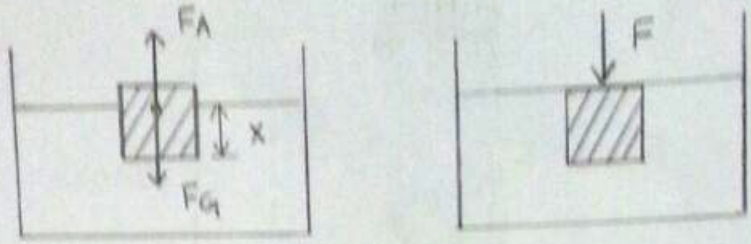
$$= -\frac{3}{5} v_p$$

$$= -\frac{3}{\cancel{5}} \cdot \cancel{5} \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

$$= -3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}$$

Das Minus bedeutet, dass sich das Proton wieder zurück bewegt!

Aufgabe 5: 3 Punkte



(a) $V = d^3 = \frac{m}{\rho} = \frac{500\,g}{0{,}5\,\frac{g}{cm^3}} = 1000\ cm^3$

$\Rightarrow \underline{d = 10\ cm}$

(1)

(b) Gewichtskraft des Holzwürfel = Auftriebskraft

$F_G = F_A$ (0,5)

$\Rightarrow mg = \rho_{wasser} \cdot g \cdot V_{verdr.}$

$\Rightarrow m\cancel{g} = \rho_{wasser} \cdot \cancel{g} \cdot \boxed{x} \cdot A$

$\Rightarrow x = \frac{m}{\rho_{wasser} \cdot A}$

$= \frac{m}{\rho_{wasser} \cdot d^2}$

$= \frac{500\,\cancel{g}}{1\,\frac{\cancel{g}}{cm^{\cancel{3}}} \cdot 100\,\cancel{cm^2}}$

(0,5)

$= \underline{5\ cm}$

(0,5)

1 (c) $F + F_G - F_A = 0$

$$\Rightarrow F = F_A - F_G$$

$$= \rho_{wasser} \cdot g \cdot V - mg$$

$$= 1 \frac{g}{\cancel{cm^3}} \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1000 \cancel{cm^3} - 500g \cdot 10 \frac{m}{s^2}$$

$$= 1 \, kg \cdot 10 \frac{m}{s^2} - 0{,}5 \, kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}$$

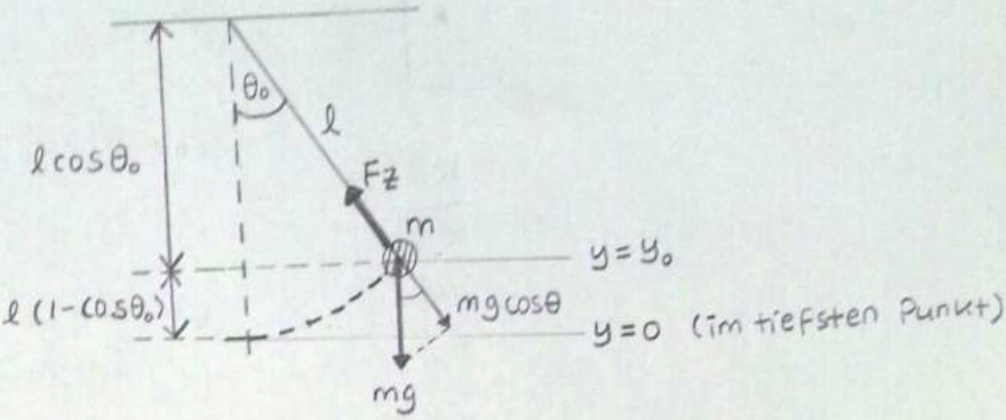
$$= 5 \, kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$= \underline{5 \, N}$$

(0,5)

Aufgabe 6: 6 Punkte

(a)



Bei $t=0$: $\quad y = y_0 = \ell - \ell\cos\theta_0 = \ell(1-\cos\theta_0)$

Zum Zeitpunkt des Loslassens:

(0,5)

$$E = mg\,y_0 \quad , \text{ da } v = v_0 = 0$$

In jedem anderen Punkt der Schwingungsbewegung

(0,5)

gilt: $\quad E = \frac{1}{2}mv^2 + mg\boxed{y} = mg\boxed{y_0}$

$$\Rightarrow \underbrace{mg}\cdot\ell(1-\cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2 + \underbrace{mg}\cdot\ell(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \cancel{m}g\ell(1-\cos\theta_0 - 1 + \cos\theta) = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$\Rightarrow 2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0) = v^2$$

(1)

$$\Rightarrow \underline{\underline{v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}}}$$

b) Im tiefsten Punkt ist $\theta = 0° \Rightarrow \cos\theta = 1$

(1)

$$\Rightarrow \underline{v = \sqrt{2gl\,(1-\cos\theta_0)}}\ //$$

In den höchsten Punkten ist natürlich $\underline{v = }$

da dies die Starthöhe ist und alle kinetis

Energie wieder in potentielle Energie

umgewandelt wurde.

2 (c) Das zweite Newtonsche Axiom: $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow ma = m\boxed{\frac{v^2}{l}} = F_z - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow m \cdot 2g\cancel{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \cdot \frac{1}{\cancel{l}} = F_z - mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2\underbrace{mg}(\cos\theta - \cos\theta_0) = \boxed{F_z} - \underbrace{mg}\cos\theta$$

$$\Rightarrow F_z = mg(2\cos\theta - 2\cos\theta_0 + \cos\theta)$$

$$= \underline{mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)}\ //$$