Aufgabe 1:

(12 Punkte)

Ein Arbeiter steht in einem Lift, mit dem er sich durch eigene Kraft mittels eines Seils hochgezogen hat. Das Seil ist an der Decke befestigt und läuft durch zwei Rollen, von denen eine mit der Decke und die andere mit dem Lift fest verbunden ist (siehe Skizze). Die Gewichtskraft des Arbeiters ist $F_A = 800\,\mathrm{N}$, die des Lifts beträgt $F_L = 400\,\mathrm{N}$.

a) Mit welcher Kraft F_0 muss der Arbeiter an dem Seil ziehen, um sich und den Lift in der Schwebe zu halten?

b) Wie groß ist die Kraft F_1, welche die obere Rolle über die Befestigung auf die Decke ausübt?

c) Welche Arbeit W muss der Arbeiter aufwenden, um sich mit dem Lift $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ weiter hochzuziehen?

d) Der Arbeiter stehe im Lift auf einer handelsüblichen Körperwaage. Welchen Wert zeigt die Waage an? Die Masse der Waage werde vernachlässigt.

Hinweis: Für die Erdbeschleunigung gelte $g \simeq 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Auf dem Rangierbahnhof stößt ein leerer Güterwagen G_1 der Masse $m_1 = 9\,\mathrm{t}$ auf gerader Strecke mit der Geschwindigkeit $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$ gegen einen ruhenden Waggon G_2 mit Gesamtmasse inklusive Ladung von $m_2 = 18\,\mathrm{t}$.

a) Eine automatische Schnellkupplung sorgt beim Kontakt für eine feste Verbindung beider Wagen. Berechnen Sie ihre gemeinsame Endgeschwindigkeit v_g' nach dem Stoß.

b) Die Schnellkupplung versagt, so dass es zu einem elastischen Stoß zwischen G_1 und G_2 kommt. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeiten v_1' und v_2' der Güterwagen nach dem Stoß.

Leiten Sie die erforderlichen Formeln elementar aus den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls her. Reibungsverluste zwischen Schiene und Rädern sowie die Trägheitsmomente der Räder seien vernachlässigbar.

a) Durch Energieerhalt.

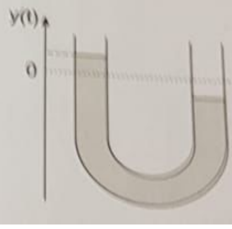
$m_1 = 9t$

Aufgabe 3: **(12 Punkte)**

In einem zu beiden Seiten offenen U-Rohr mit Querschnittsfläche F befindet sich eine Flüssigkeit der Dichte ρ und Masse $M = \rho F L$ mit Gesamtlänge L der Flüssigkeitssäule. Der Pegel $y(t)$ der linken Säule schwinge mit einer maximalen Auslenkung A um die Ruhelage bei $y_0 = 0$ (vgl. Skizze). Zum Zeitpunkt $t=0$ seien die Pegel beider Säulen auf gleicher Höhe, also $y(t=0) = 0$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Flüssigkeit hinsichtlich der Amplitude $y(t)$ unter Vernachlässigung von Reibungsverlusten auf.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung und geben Sie $y(t)$ und die Periodendauer T der Schwingung als Funktionen der gegebenen Größen an.

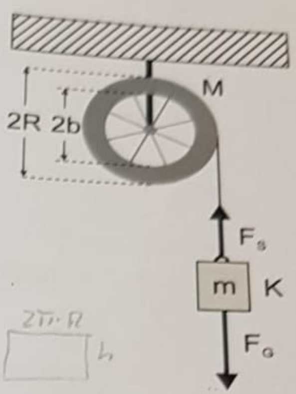


a) Die Bewegungsglei

M

…gabe 4: **(12 Punkte)**

Ein Körper K mit Masse $m = 2.5\,\mathrm{kg}$ hängt an einem Faden, der auf einem Rad homogener Dichte ϱ mit Masse $M = 3.2\,\mathrm{kg}$ aufgewickelt ist. Durch die Gewichtskraft F_G des Körpers wird der Faden abgewickelt und das auf einer festen Achse durch seinen Schwerpunkt gelagerte Rad wird mit der Winkelbeschleunigung α in Drehung versetzt.



a) Das Rad werde näherungsweise als ein Hohlzylinder mit Außenradius $R = 20\,\mathrm{cm}$ und Innenradius $b = 15\,\mathrm{cm}$ betrachtet – die relativ kleinen Massen von Achse und Speichen bleiben unberücksichtigt. Leiten Sie auf dieser Grundlage das Trägheitsmoment Θ des Rades als Funktion von M, R und b ab.

b) Berechnen Sie dann die Fadenkraft F_S und die Beschleunigung a des Körpers K unter Vernachlässigung von Reibung und Fadenmasse.

2π·R

h

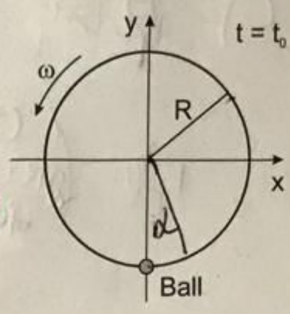
Hinweise: Der resultierende Zahlenwert für das Trägheitsmoment ist $\Theta = 0.1\,\mathrm{kg\,m^2}$. Die Erdbeschleunigung ist $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$.

$\Theta = ($

Aufgabe 5:

(12 Punkte)

Ein kreisförmiges ebenes Karussell mit Radius R rotiert horizontal mit Winkelgeschwindigkeit ω um seine Symmetrieachse. Ein Fahrgast steht am Rand im Abstand R vom Zentrum. Nach einigen Versuchen gelingt es ihm, einen Tennisball derart zu werfen, dass er ihn nach Drehung des Karussels um genau 180° wieder auffangen kann. Gesucht sind die für den Wurf nötige Richtung und Anfangsgeschwindigkeit des Balls. Die Gravitation soll vernachlässigt werden.



Verwenden Sie ein zweidimensionales Koordinatensystem in Ruhe (Inertialsystem) mit Ursprung im Karussellzentrum (vgl. Skizze). Zum Zeitpunkt des Wurfes sei der Ball am Ort $\vec{r}_0 = (0\,, -R)$.

a) Welche Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ hat der Ball vor dem Wurf?

b) Bestimmen Sie die Zeitdauer Δt zwischen Abwurf und Fangen des Balls.

c) Beschreiben Sie, welche Bahnkurve der Ball im Inertialsystem nach dem Wurf durchläuft. Berechnen Sie dann die zugehörige Geschwindigkeit $\vec{v} = (v_x\,,\, v_y)$.

d) Geben Sie die Abwurfgeschwindigkeit $\vec{v}\,'$ aus Sicht des Werfers an. Unter welchem Winkel α bezüglich der Richtung zum Karussellzentrum muss er den Ball werfen?

e) Skizzieren Sie schließlich qualitativ unter Benutzung aller bekannten Informationen die Bahnkurve des Balls im mitrotierenden Koordinatensystem, also aus Sicht des Werfers (ohne Rechnung).

Aufgabe 1: (12 Punkte)

a) Mit dem Gesamtgewicht wird

$$\begin{aligned} F_{ges} &= 1200\,\mathrm{N} && ① \\ F_{ges} &= 3F_0 \quad \Rightarrow \quad F_0 = 400\,\mathrm{N}\,. && ②① \end{aligned}$$

b) Die Kraft F_1 an der Befestigung der oberen Rolle ist

$$F_1 = 2F_0 = 800\,\mathrm{N}\,. \qquad ②①$$

c) Die nötige Arbeit W, um Lift und Arbeiter um $\Delta h = 1\,\mathrm{m}$ höher zu ziehen, ist

$$W = F_{ges}\Delta h = 1200\,\mathrm{J}\,. \qquad ②①$$

d) Das auf die Waage wirkende Körpergewicht F_A wird reduziert zu

$$F'_A = F_A - F_0 = 400\,\mathrm{N}\,. \qquad ①$$

Die Körperwaage zeigt dann die scheinbare Masse m' an,

$$m' = \frac{F'_A}{g} = 40\,\mathrm{kg}\,. \qquad ①$$

Aufgabe 2: (12 Punkte)

a) Für den vollkommen unelastischen Stoß gilt mit $v_1 = 3\,\mathrm{m/s}$, $m_1 = 9\,\mathrm{t}$ und $m_2 = 18\,\mathrm{t}$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v'_g \quad \Rightarrow \quad v'_g = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,v_1 = 1\,\mathrm{m/s}\,. \qquad ①①①$$

b) Bei dem vollkommen elastischen Stoß gelten Energieerhaltungssatz und Impulserhaltungssatz,

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 {v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v'_2}^2 \quad \Rightarrow \quad m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2\,. \qquad ①①$$

Durch Umformen des Energieerhaltungssatzes und Einsetzen des Impulserhaltungssatzes erhält man

$$\begin{aligned} m_2 {v'_2}^2 &= m_1(v_1^2 - {v'_1}^2) = m_1(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1) = m_2 v'_2(v_1 + v'_1) \\ \Rightarrow \quad v'_2 &= v_1 + v'_1 && ② \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehung in den Impulserhaltungssatz liefert

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 + m_2(v_1 + v'_1) \quad \Rightarrow \quad v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 = -1\,\mathrm{m/s} \qquad ①①①$$

sowie

$$v'_2 = v_1 + v'_1 = \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_1 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\,v_1 = 2\,\mathrm{m/s}\,. \qquad ①①$$

Aufgabe 3: (12 Punkte)

a) Die Differenz der Pegel Δy sowie das darin enthaltene Flüssigkeitsvolumen ΔV betragen

$$\Delta y = 2 \cdot y \quad ; \qquad \Delta V = F \cdot \Delta y = 2Fy \,. \qquad ①①$$

Folglich ist die auf der linken Säule wirkende resultierende Gewichtskraft gegeben durch

$$F_G = -\rho \Delta V g = -2\rho F g y \,. \qquad ①$$

Mithin ist die Bewegungsgleichung mit $M = \rho F L$ und $a = \ddot{y}$

$$Ma = F_G \quad \Rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2g}{L} y = 0 \,. \qquad ①②$$

b) Mit dem Ansatz $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ folgt ①

$$-\omega^2 y + \frac{2g}{L} y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}} \qquad ①①$$

Die Periodendauer ist dann

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{2L}{g}} \,. \qquad ①①$$

Mit der Randbedingung $y(t{=}0) = 0$ folgt sofort $\varphi = 0$ und damit ①

$$y(t) = A \sin(\omega t) \,.$$

Aufgabe 4: (12 Punkte)

a) Das Trägheitsmoment ist mit der Dicke d des Rades, seiner Masse $M = \varrho d \pi (R^2 - b^2)$ ① und mit $\mathrm{d}M = \varrho\, \mathrm{d}V$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \Theta &= \int_M \mathrm{d}M\, r_\perp^2 &&= \varrho d \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_b^R \mathrm{d}r\, r \cdot r^2 && ①① \\ &= \varrho d \cdot 2\pi \cdot \tfrac{1}{4}(R^4 - b^4) &&= \tfrac{1}{2} M (R^2 + b^2) \,. && ①① \end{aligned}$$

Mit den Zahlenwerten $M = 3.2\,\mathrm{kg}$, $R = 0.2\,\mathrm{m}$ und $b = 0.15\,\mathrm{m}$ folgt $\Theta = 0.1\,\mathrm{kg\,m^2}$.

b) Es gelten mit der Winkelbeschleunigung $\alpha = a/R$ ①

$$ma = F_G - F_S \quad ; \qquad F_S R = \Theta \alpha = \Theta \cdot \frac{a}{R} \qquad ①①$$

so dass mit $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $m = 2.5\,\mathrm{kg}$, $R = 0.2\,\mathrm{m}$ und $\Theta = 0.1\,\mathrm{kg\,m^2}$ resultiert

$$a = \frac{1}{1 + \frac{\Theta}{mR^2}} \cdot g \qquad = 5\,\mathrm{m/s^2} \,. \qquad ①①$$

Die Fadenkraft F_S wird somit

$$F_S = m(g - a) = \frac{1}{1 + \frac{mR^2}{\Theta}} \cdot mg \qquad = 12.5\,\mathrm{N} \,. \qquad ①①$$

Aufgabe 5: (12 Punkte)

a) Im Inertialsystem ist die Geschwindigkeit des Balls vor dem Wurf

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \end{pmatrix} . \qquad 1$$

b) Der Werfer fängt den Ball am gegenüberliegenden Ort im Karussell bei

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ +R \end{pmatrix} . \qquad 1$$

Wegen der Kreisbewegung im Karussell kommt er dort nach der Zeit Δt an mit

$$\omega\,\Delta t = \pi \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{\pi}{\omega} . \qquad 1$$

c) Nach dem Wurf bewegt sich der Ball geradlinig vom Abwurfort $\vec{r}_0$ zum gegenüberliegenden Ort $\vec{r}_1$ im Karussell. Seine notwendigen Geschwindigkeitskomponenten sind 1

$$v_x = 0 \qquad 1$$

$$v_y \cdot \Delta t = 2R \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{2}{\pi}\omega R . \qquad 1\,1$$

d) Der Werfer verleiht dem Ball im mitrotierenden System die Geschwindigkeit

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}\,' = \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \end{pmatrix} = \omega R \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{2}{\pi} \end{pmatrix} . \qquad 1\,1$$

Für den Abwurfwinkel α gilt

$$\tan\alpha = \frac{v'_x}{v'_y} = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) . \qquad 1$$

e) Die wichtigen Merkmale der Bahnkurve im mitrotierenden System sind

- Für den Winkel α gilt $|\tan\alpha| > 1$, also $|\alpha| > 45°$. $\frac{1}{2}$
- Die Bahnkurve ist spiegelsymmetrisch. $\frac{1}{2}$
- Für $x' = 0$ hat der Ball mit $\Delta r' = R$ den maximalen Abstand zum Werfer. $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$