Klassische Experimentalphysik 1 (Mechanik) WS 20/21

Klausur 1 — Lösungen

Allgemeine Hinweise:

- Die in dieser Musterlösung angegeben Punkte sind Richtlinien, die die Gewichtung einzelner Teilschritte deutlich machen sollen. Diese sind aber sinngemäß zu verstehen, es muss im Einzelnen nicht notwendigerweise exakt die Formel etc. so angegeben werden, um den Punkt zu bekommen.
- Es können auch halbe Punkte vergeben werden.

Aufgabe 1: Kurzfragen (9 Punkte)

a) Eine Welle durch ein Seil sei durch $A(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t)$ beschrieben. Geben Sie die Wellenlänge und die Schwingungsdauer der Welle an. Sie schicken eine zweite Welle durch das Seil um durch Superposition mit der ersten Welle eine stehende Welle zu erzeugen. Geben Sie die Wellenfunktion der zweiten Welle an. (**1 Punkt**)

b) Welche Phasendifferenz ϕ müssen die beiden Wellen $A(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t)$ und $A'(x,t) = A_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$ haben, damit es zu maximaler konstruktiver bzw. destruktiver Interferenz kommt? (**1 Punkt**)

c) Sie messen die Tonfrequenz eines Martinshorns eines weit entfernt fahrenden Krankenwagens zu 460 Hz. Ihr Freund, welcher ein selbsternannter Enthusiast für Martinshörner ist, sagt Ihnen, dass die Tonfrequenz normalerweise 440 Hz sei. Basierend auf dieser Information, nähert sich Ihnen der Krankenwagen oder entfernt er sich? Begründen Sie Ihre Antwort **kurz**. (**1 Punkt**)

d) Sie stehen in einem Zug, der mit $0.2g$ beschleunigt. Wie groß muss die Haftreibungszahl zwischen Ihren Füßen und dem Boden mindestens sein, damit Sie nicht rutschen? (**1 Punkt**)

e) Eine horizontale Röhre verengt sich von 10 cm Durchmesser am Punkt A auf 5 cm Durchmesser am Punkt B. Betrachten Sie ein nichtviskoses, inkompressibles Fluid, das ohne Turbulenz von A nach B fließt. Geben Sie den Zusammenhang zwischen der Fließgeschwindigkeit v_A am Punkt A und v_B am Punkt B in Form einer Gleichung an. (**1 Punkt**)

f) Wie ändert sich die Spannung in einem Draht, wenn Sie seine Querschnittsfläche verdoppeln und die Kraft vervierfachen? (**1 Punkt**)

g) Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort **kurz**.

   i) In keinem Inertialsystem ist das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen kürzer als das Eigenzeitintervall zwischen den beiden Ereignissen. (**0,5 Punkte**)

   ii) Finden zwei Ereignisse in einem Inertialsystem nicht gleichzeitig statt, so können sie auch in keinem anderen Inertialsystem gleichzeitig stattfinden. (**0,5 Punkte**)

   iii) Sie befinden sich auf einem Raumschiff, welches sich mit der halben Lichtgeschwindigkeit von einem Stern wegbewegt. Das Licht des Sterns fliegt aus Ihrer Sicht mit der halben Lichtgeschwindigkeit an Ihnen vorbei. (**0,5 Punkte**)

   iv) Sie befinden sich in einem komplett von der Außenwelt isolierten Raum. Sie können herausfinden ob Sie sich auf der Erde befinden oder ob der Raum mit einer konstanten Beschleunigung g nach oben beschleunigt wird. (**0,5 Punkte**)

h) Ein Raumschiff passiert Sie mit einer Geschwindigkeit v. Sie messen für die Länge des Raumschiffes l. Welche Länge hätte das Raumschiff in Ruhe? (**1 Punkt**)

Antworten:

a) Die Wellenlänge ist durch

$$\lambda = 2\pi/k \tag{1}$$

und die Schwingungsdauer durch

$$T = 2\pi/\omega \tag{2}$$

gegeben. (**0,5 Punkte**)
Eine stehende Welle entsteht, wenn die zweite Welle die gleiche Amplitude und Frequenz aber die entgegengesetzte Ausbreitungsrichtung hat. In der Vorlesung wurde besprochen, dass man die Richtung einer ebenen Welle durch Umkehrung des Vorzeichens vor dem ωt-Term umkehren kann. Daher ist eine mögliche Funktion für die zweite Welle:

$$B(x,t) = A_0 \sin(kx + \omega t). \tag{3}$$

(**0,5 Punkte**)

b) Maximale konstruktive Interferenz geschieht immer dann, wenn die Phasenverschiebung ein Vielfaches von $360° \hat{=} 2\pi$ beziehungsweise einer kompletten Wellenlänge entspricht. Die Phasendifferenz muss daher ein ganzzahliges Vielfaches von 2π betragen:

$$\phi_{\text{Konstruktiv}} = 2\pi n, \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

(**0,5 Punkte**)
Umgekehrt gibt es maximale destruktive Interferenz, wenn die Phasendifferenz genau einem ungeraden Vielfachen der halben Wellenlänge, bzw. π, entspricht. Also:

$$\phi_{\text{Destruktiv}} = \pi(2n+1), \text{ mit } n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

(**0,5 Punkte**)

c) Die Quelle des Tons hat im Folgenden die Geschwindigkeit u_S, wobei u_S so definiert ist, dass $u_\text{S} > 0$ eine sich dem Sender nähernde Quelle beschreibt. Dann gilt wegen dem Dopplereffekt für die Frequenz des gehörten Tones:

$$\nu_E = \frac{c}{c - u_\text{S}} \nu_\text{S} \tag{6}$$

was bedeutet, dass der Ton höher wird, wenn sich die Quelle auf dem Empfänger zubewegt. (**1 Punkt**)

d) Im Falle von Haftreibung ist die Kraft, die aufgebracht werden muss um die Reibung zu überwinden, gegeben durch

$$F_R \geq \mu_H F_G\,, \tag{7}$$

wobei μ_H die Haftreibungszahl und F_G die Gewichtskraft sind. Wenn der Zug beschleunigt, wirkt auf Sie die Trägheitskraft

$$F_B = ma = 0.2mg. \tag{8}$$

Damit Sie nicht rutschen, muss die Haftreibungskraft mindestens so groß sein wie diese Trägheitskraft

$$\Rightarrow 0.2mg = \mu_H mg \tag{9}$$

$$\Rightarrow \mu_H = 0.2 \tag{10}$$

(**1 Punkt**)

e) Nach dem Kontinuitätsgesetz ist der Volumenstrom einer inkompressiblen und nicht-viskosen Flüssigkeit im gesamten Rohr gleich. Das heißt, dass die gleiche Flüssigkeitsmenge, die in einer Zeit Δt durch einen Rohrquerschnitt A_A am Punkt A fließt, auch durch den Rohrquerschnitt A_B am Punkt B fließen muss:

$$A_\text{A} v_\text{A} = A_\text{B} v_\text{B} \tag{11}$$

Und damit erhält man

$$v_B = \frac{A_\mathrm{A}}{A_\mathrm{B}} v_\mathrm{A} = \frac{\pi \cdot 100\,\mathrm{cm}^2}{\pi \cdot 25\,\mathrm{cm}^2} v_\mathrm{A} = 4 v_\mathrm{A} \tag{12}$$

(**1 Punkt**)

f) Die mechanische Spannung ist definiert als die Kraft pro Querschnittsfläche

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{13}$$

Das heißt, wenn man die Kraft vervierfacht und die Querschnittsfläche verdoppelt, verdoppelt sich auch die Spannung. (**1 Punkt**)

g) i) Richtig. In der Vorlesung wurde die Zeitdilatation besprochen, welche besagt, dass innere Prozesse innerhalb eines physikalischen Systems für einen Beobachter langsamer ablaufen, wenn sich das physikalische System relativ zum Beobachter bewegt. Das heißt, wenn die Eigenzeitdifferenz des physikalischen Prozess $\Delta t'$ ist, misst der Beobachter, für den sich das physikalische System relativ zu ihm bewegt, eine Zeitdifferenz von

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{14}$$

wobei immer $\gamma > 1$ ist. (**0,5 Punkte**)

ii) Falsch. Zwei Ereignisse mit raumartigem Abstand, die in einem Inertialsystem gleichzeitig sind, sind in relativ dazu bewegten Bezugssystemen nicht gleichzeitig. (**0,5 Punkte**)

Als Gegenbeispiel nehmen wir an, ein Beobachter misst für zwei Ereignisse an den Orten x_1 und x_2 eine Zeitdifferenz von $\Delta t = 0$. Das heißt die Ereignisse finden gleichzeitig statt. Ein zweiter Beobachter, der sich relativ zum ersten Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegt, misst

$$\begin{aligned} \Delta t' &= t_1' - t_2' \\ &= \gamma \left(t_1 - \frac{v}{c^2} x_1 \right) - \gamma \left(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2 \right) \\ &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \\ &= \gamma \left(- \frac{v}{c^2} \Delta x \right) \end{aligned} \tag{15}$$

Da es sich um zwei unterschiedliche Ereignisse handelt, muss $|\Delta x| > 0$ sein. Somit ist die Zeitdifferenz für den zweiten Beobachter ungleich Null und damit die Ereignisse nicht gleichzeitig.

iii) Falsch. Nach der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystem gleich. Also messen Sie auch im System des Raumschiffes die gleiche Lichtgeschwindigkeit. (**0,5 Punkte**)
Hinweis: Additionstheoreme von Geschwindigkeiten
Nach dem relativistischen Additionstheorem für Geschwindigkeiten ergibt die Summe aus einer Geschwindigkeit $v < c$ und der Lichtgeschwindigkeit immer die Lichtgeschwindigkeit.

iv) Falsch. Nach dem Äquivalenzprinzip kann dies nicht unterschieden werden. (**0,5 Punkte**)

h) Die Länge l' des Raumschiffes in Ruhe (also im Inertialsystem des Raumschiffes) ist

$$l' = \gamma l \tag{16}$$

wobei l die Länge des Raumschiffes in dem Inertialsystem des Beobachters und $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ ist. (**1 Punkt**)

Aufgabe 2: Gravitation (3 Punkte)

Wir betrachten eine Anordnung aus zwei konzentrischen (gleiches Zentrum/gleicher Mittelpunkt), homogenen und isotropen Kugelschalen vernachlässigbarer Dicke. Kugelschale 1 hat die Masse m_1 sowie den Radius a. Kugelschale 2 hat die Masse m_2 sowie den Radius $2a$. Welchen Betrag hat die Gravitationskraft auf ein punktförmiges Teilchen der Masse m, welches sich im Abstand

a) $\sqrt{2}a$ (**1 Punkt**)

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ (**1 Punkt**)

c) $3a$ (**1 Punkt**)

vom Mittelpunkt der Kugelschalen befindet?
Antwort: Innerhalb einer Kugelschale trägt die Gewichtskraft durch diese Kugelschale nicht zur Gravitationskraft bei. Außerhalb der Schale verhält es sich wie bei einer Punktmasse im Zentrum, welche dieselbe Masse hat wie die Kugelschale. Dann folgt

a) Die Punktmasse ist außerhalb der Kugelschale 1 und innerhalb der Kugelschale 2, also betragsmäßig

$$F = \frac{Gmm_1}{(\sqrt{2}a)^2} = \frac{Gmm_1}{2a^2}\,. \tag{17}$$

(**1 Punkt**)

b) Die Punktmasse befindet sich innerhalb der beiden Kugelschalen, also

$$F = 0. \tag{18}$$

(**1 Punkt**)

c) Die Punktmasse befindet sich außerhalb der beiden Kugelschalen, also betragsmäßig

$$F = \frac{Gm(m_1 + m_2)}{(3a)^2} = \frac{Gm(m_1 + m_2)}{9a^2}\,. \tag{19}$$

(**1 Punkt**)

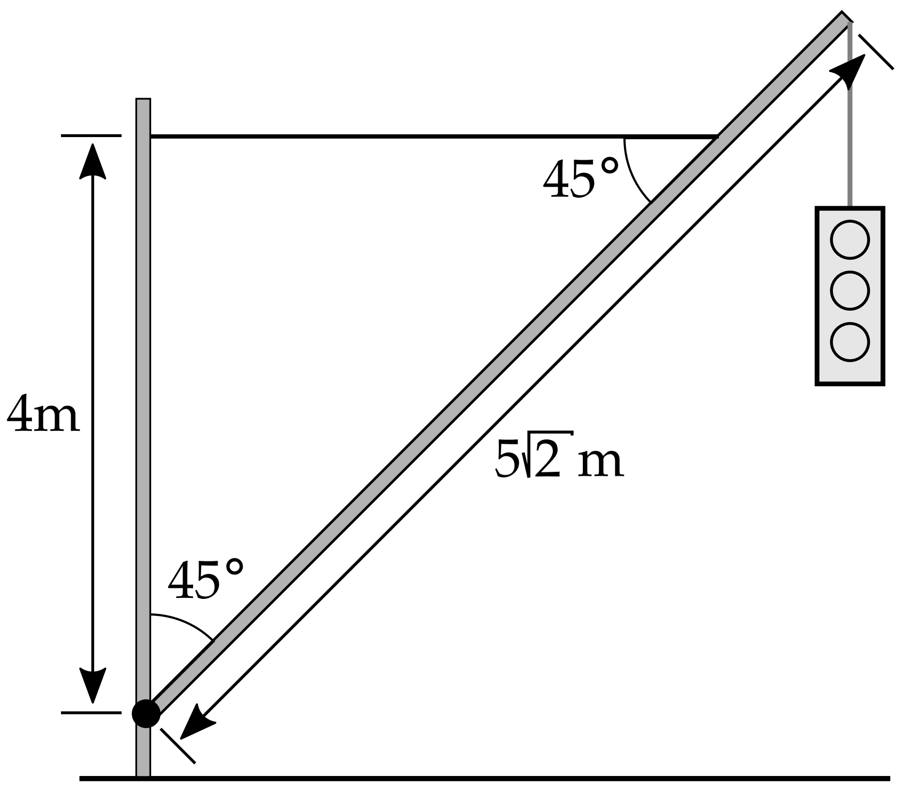
Aufgabe 3: Statik (6 Punkte)

Eine Stange der Länge $L = 5\sqrt{2}$m und Masse $M = 20\,\mathrm{kg}$ ist mit einem Gelenk an einem Mast angebracht, siehe Skizze. In einer Höhe $h = 4\,\mathrm{m}$ über dem Gelenk ist am Mast ein masseloses Drahtseil gespannt, das so mit der Stange verbunden ist, dass diese einen Winkel von $\theta = 45°$ mit sowohl dem Mast als auch dem Drahtseil einnimmt. Das Seil hat somit einen rechten Winkel zum Mast. Am äußersten Ende der Stange hängt eine Ampel der Masse $m = 10\,\mathrm{kg}$.

a) Skizzieren und benennen Sie die Kräfte, welche auf die Stange wirken. (**1 Punkt**)

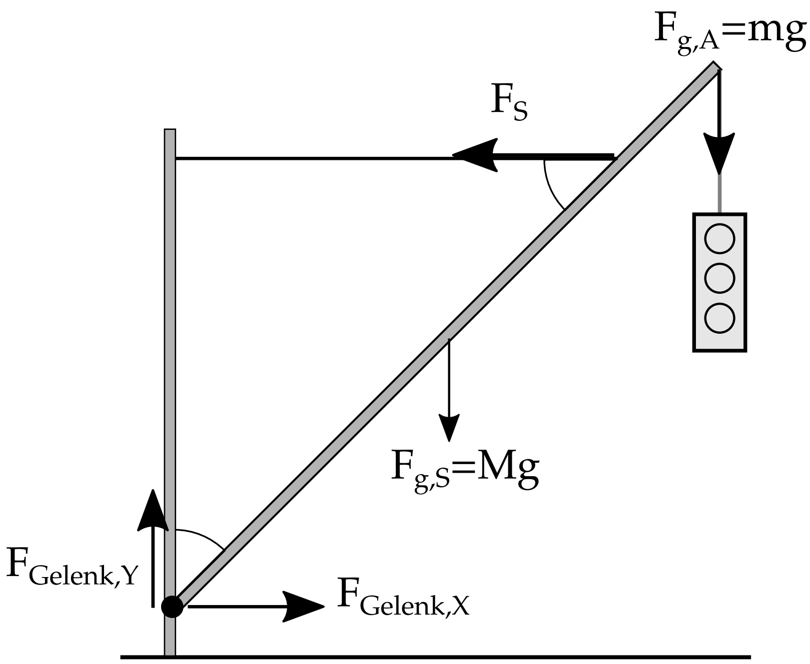
b) Ermitteln Sie die Zugkraft in dem Drahtseil und die horizontalen und vertikalen Kraftkomponenten, die von dem Gelenk auf die Stange ausgeübt werden. Überlegen Sie sich dazu zunächst, welche Gleichgewichtsbedingungen in einer statischen Anordnung gelten müssen. (**5 Punkte**)

Hinweis: $\cos(45°) = \sin(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$



Antwort:

a) (**1 Punkt**) für die Skizze mit eingezeichneten und benannten Kräften.



b) Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Gelenk liegt und die y-Achse nach oben zeigt. Wir stellen zunächst die Drehmomentengleichung und Kraftgleichungen auf. Im statischen Fall müssen sich alle Kräfte und Drehmomente ausgleichen. (**1 Punkt**)

Für Drehmomente gilt allgemein:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{20}$$

Für die Drehmomente hier gilt dann:

$$\sum M = \frac{1}{2} LMg\cos(\theta) + Lmg\cos(\theta) - F_S h = 0 \tag{21}$$

(**1 Punkt**)
Damit erhalten wir direkt die Seilkraft als

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{\frac{1}{2}LMg\cos(\theta) + Lmg\cos(\theta)}{h} = \frac{Lg\cos\theta}{h}\left(\frac{1}{2}M + m\right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot \cos(45°)}{4\,\mathrm{m}} \left(\frac{1}{2}20\,\mathrm{kg} + 10\,\mathrm{kg}\right) \\ &= 250\,\mathrm{N} \end{aligned} \tag{22}$$

(**1 Punkt**)

Für die Kräfte am Gelenk gilt:

$$\sum F_x = 0 = F_{\text{Gelenk,X}} - F_S \tag{23}$$

(**0,5 Punkte**)

und

$$\sum F_y = 0 = F_{\text{Gelenk,Y}} - Mg - mg \tag{24}$$

(**0,5 Punkte**)
und damit

$$F_{\text{Gelenk,X}} = F_S = 250\,\mathrm{N} \tag{25}$$

(**0,5 Punkte**) und

$$F_{\text{Gelenk,Y}} = Mg + mg = 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 + 10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 = 300\,\mathrm{N} \tag{26}$$

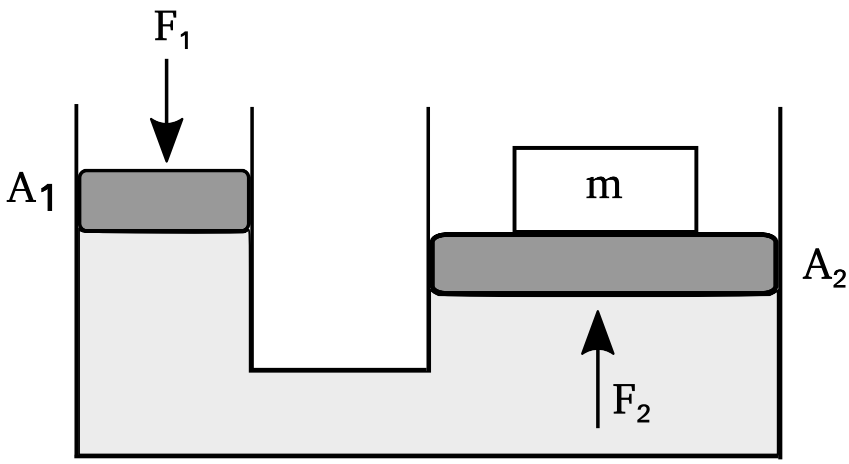
(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 4: Hydrostatik (4 Punkte)

Ein hydraulisches System besteht, wie in der Abbildung dargestellt, aus zwei Kolben mit den Flächen A_1 und A_2 mit $A_2 > A_1$. Die Hydraulikflüssigkeit ist masselos und nicht kompressibel. Der kleinere Kolben wird heruntergedrückt um eine auf dem größeren Kolben stehende Masse m um eine Höhe h anzuheben. Vernachlässigen Sie im Folgenden die Masse der Kolben.

a) Welche Kraft muss auf den kleineren Kolben ausgeübt werden? (**2 Punkte**)

b) Zeigen Sie, dass die am kleineren Kolben verrichtete Arbeit betragsmäßig gleich der Arbeit ist, die der größere Kolben an der Masse m verrichtet. (**2 Punkte**)



Antwort:

a) Weil im gesamten Hydrauliksystem der gleiche Druck herrscht ist

$$\frac{F_1}{A_1} = p_1 = p_2 = \frac{F_2}{A_2} \tag{27}$$

(**1 Punkt**)

und daher

$$F_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \tag{28}$$

Um die Masse anzuheben muss die Gewichtskraft mindestens ausgeglichen werden:

$$F_1 \geq \frac{A_1}{A_2} mg \tag{29}$$

(**1 Punkt**)

b) Da die Flüssigkeit nicht kompressibel ist, bleibt ihr Volumen konstant. Daher ist das beim Herunterdrücken von Kolben 1 bewegte Volumen gleich dem Volumen, das unter Kolben 2 nach oben gedrückt wird.

$$h_1 A_1 = h_2 A_2 \tag{30}$$

(**1 Punkt**)

Für die Arbeit an Kolben 1 gilt dann

$$W_1 = \int \vec{F}_1 \, \mathrm{d}\vec{s}_1 = F_1 h_1 = \frac{A_1}{A_2} F_2 \frac{A_2}{A_1} h_2 = F_2 h_2 = \int \vec{F}_2 \, \mathrm{d}\vec{s}_2 = W_2 \tag{31}$$

und daher ist die verrichtete Arbeit gleich. Hierbei wurde verwendet, dass für beide Kräfte $\vec{F} \parallel \mathrm{d}\vec{s}$ und dass die Kräfte konstant sind. (**1 Punkt**)

Aufgabe 5: Kugel in Pendel (3 Punkte)

Gegeben sei ein Pendel bestehend aus einem Pendelkörper und einer unverformbaren masselosen Stange, welche den Pendelkörper mit dem Aufhängepunkt des Pendels verbindet. Der Pendelkörper hat eine Masse M. Der Abstand vom Aufhängepunkt des Pendels zum Schwerpunkt des Pendelkörpers beträgt l.

Eine Kugel mit der Masse m wird horizontal auf den ruhenden Pendelkörper abgefeuert. Die Kugel stößt mit dem Pendelkörper genau auf der Höhe des Schwerpunktes und bleibt darin stecken. Dadurch wird das System aus Pendelkörper und Kugel ausgelenkt. Wenn der Pendelkörper seine maximale Höhe erreicht hat, bildet die Stange des Pendels einen Winkel von α mit der Vertikalen.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Einschlag.
Antwort:
Diese Aufgabe ist eine Anwendung von Impuls- und Energieerhaltung. Die Geschwindigkeit der Kugel vor dem Einschlag wird im Folgenden mit v_K bezeichnet. Die Geschwindigkeit des Systems aus Pendelkörper und Kugel direkt nach dem Einschlag der Kugel wird mit v_KP bezeichnet. Es gilt Impulserhaltung, also

$$mv_\mathrm{K} = (m+M)v_\mathrm{KP} \Leftrightarrow v_\mathrm{K} = \frac{m+M}{m}v_\mathrm{KP} \Leftrightarrow v_\mathrm{K} = \left(1+\frac{M}{m}\right)v_\mathrm{KP}\,. \tag{32}$$

(**1 Punkt**)
Um die Geschwindigkeit der Kugel zu erhalten, muss also die Geschwindigkeit des Systems aus Pendelkörper und Kugel direkt nach dem Einschlag bekannt sein. Diese Geschwindigkeit kann unter Anwendung von Energieerhaltung und der Angabe des Auslenkungswinkel α berechnet werden. Mit Kenntnis des Winkels α kann die potentielle Energie des Pendels berechnet werden. Der Nullpunkt des Gravitationspotentials wird in den untersten Punkt des Pendels, also in den Startpunkt gelegt. Dort verschwindet die potentielle Energie. Direkt nach dem Einschlag der Kugel hat das System Kugel+Pendelkörper die kinetische Energie

$$E_\mathrm{KP,kin} = \frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{KP}^2. \tag{33}$$

Im Punkt der maximalen Auslenkung ist die Energie dieses Systems aus Kugel und Pendel nur durch die potentielle Energie

$$E_\mathrm{KP,pot} = (m+M)gl(1-\cos\alpha) \tag{34}$$

gegeben, da das System im höchsten Punkt der Auslenkung ruht. Aufgrund von Energieerhaltung gilt also

$$\frac{1}{2}(m+M)v_\mathrm{KP}^2 = (m+M)gl(1-\cos\alpha) \Leftrightarrow v_\mathrm{KP}^2 = 2gl(1-\cos\alpha)\,. \tag{35}$$

(**1 Punkt**)
Dies können wir nun in die Gleichung aus der Impulserhaltung einsetzen und finden

$$v_\mathrm{K} = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}\,. \tag{36}$$

(**1 Punkt**)
Hinweis: Da es sich um einen inelastischen Stoß handelt (die Kugel bleibt stecken), funktioniert es nicht, die kinetische Energie der Kugel mit der potentiellen Energie von Kugel+Pendelkörper gleichzusetzen. Ein Teil der kinetischen Energie der Kugel geht verloren, zum Beispiel aufgrund der Verformung der Kugel und/oder des Pendelkörpers.

Aufgabe 6: Physikalisches Pendel (11 Punkte)

Gegeben sei eine homogene und isotrope kreisförmige Scheibe mit der Masse m und Radius R und vernachlässigbarer Dicke. In die Scheibe ist im Abstand d vom Mittelpunkt ein Loch gebohrt, das durch die gesamte Dicke der Scheibe verläuft. Die Scheibe ist reibungsfrei und frei drehbar an einer horizontalen Achse aufgehängt, die durch dieses Loch gesteckt ist. Diese Achse ist raumfest installiert, zum Beispiel an die Wand geschraubt, und kann sich nicht bewegen. Der Aufbau ist in der Skizze unterhalb der Aufgabenstellung gezeigt. Der Mittelpunkt der Scheibe ist in der Skizze durch ein Kreuz gekennzeichnet und die Richtung der Gravitationskraft ist durch $\vec{g}$ gekennzeichnet. Die Ausmaße des Lochs sind zu vernachlässigen.

Zuerst befinde sich die Scheibe in ihrem stabilen Ruhezustand. Hiermit ist jener Zustand gemeint, bei welchem sich der Mittelpunkt der Scheibe in einer geraden Linie unterhalb des Aufhängepunktes befindet und die Scheibe ruht. Nun wird die Scheibe aus ihrem Ruhezustand um einen kleinen Winkel θ_0 mit $\theta_0 \ll 1$ ausgelenkt und dann losgelassen. Dadurch beginnt die Scheibe aufgrund der Schwerkraft zu schwingen. Für die Beschreibung der Bewegung der Scheibe in Abhängigkeit von der Zeit t wird im Folgenden der Winkel $\theta(t)$ zwischen der Linie, welche den Mittelpunkt der Scheibe mit dem Aufhängepunkt der Scheibe verbindet, und der Richtung der Schwerkraft verwendet.

a) Leiten Sie das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Rotationsachse, welche senkrecht zur Scheibe steht und durch deren Mittelpunkt verläuft, her. Zeigen Sie außerdem, dass das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich deren Aufhängeachse durch

$$I = \frac{1}{2}m(R^2 + 2d^2)$$

gegeben ist. (**3 Punkte**)

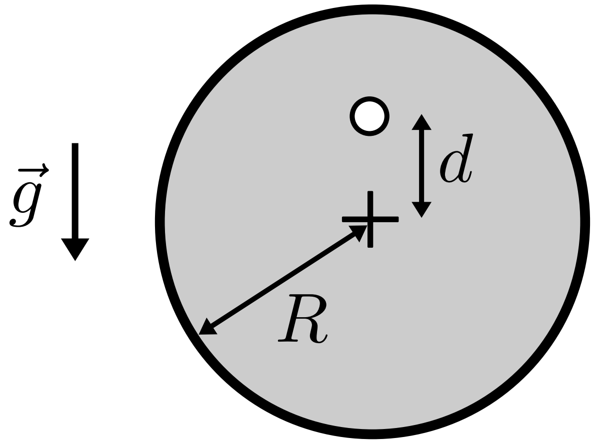
b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für den Winkel $\theta(t)$ durch

$$\ddot{\theta} + \frac{gd}{\frac{1}{2}R^2 + d^2}\sin\theta = 0$$

gegeben ist. (**5 Punkte**)

c) Berechnen Sie die Periode der Schwingung der Scheibe unter Verwendung einer Kleinwinkelnäherung für den Winkel θ. (**2 Punkte**)

d) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für den Winkel $\theta(t)$ unter Verwendung einer Kleinwinkelnäherung an. Nehmen Sie hierbei an, dass der Zeitpunkt, zu welchem die Scheibe losgelassen wird, durch $t = 0$ beschrieben ist, also $\theta(0) = \theta_0$ und $\dot{\theta}(0) = 0$ mit $\dot{\theta}(t) = \frac{d}{dt}\theta(t)$. (**1 Punkt**)



Antwort: Diese Aufgabe behandelt einen schwingenden starren Körper. Die Rotationsachse verläuft dabei nicht durch den Schwerpunkt der Scheibe. Für das Trägheitsmoment muss deshalb der Satz von Steiner verwendet werden, nachdem das Trägheitsmoment bzgl. der Achse senkrecht zur Scheibe, aber durch den Schwerpunkt, berechnet wurde. Das Drehmoment auf die Scheibe kann dann mit Hilfe des Schwerpunktes berechnet werden und mit der Winkelbeschleunigung in Verbindungen gesetzt werden. Es ergibt sich dieselbe Gleichung wie bei einem Fadenpendel. Mit einer Kleinwinkelnäherung kann diese Gleichung dann in die Gleichung eines harmonischen Oszillators überführt werden, welche ausgiebig in der Vorlesung und Übung behandelt wurde.

a) Für das Trägheitsmoment I gilt im allgemeinen Fall

$$I = \int_M \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \tag{37}$$

(**1 Punkt**)

mit dem infinitesimalen Massenelement $\mathrm{d}m(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ und dem Quadrat des senkrechten Abstands zur Rotationsachse $(\vec{r}_\perp)^2$. Die Rotationsachse wird in den Mittelpunkt der Scheibe gelegt. Im vorliegenden zweidimensionalen Fall ergibt sich

$$I = \int_A \sigma(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 dA \tag{38}$$

mit der Flächendichte σ und dem infinitesimalen Flächenelement $\mathrm{d}A$. Da die Scheibe eine homogene und isotrope Massendichte hat, gilt

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}\,. \tag{39}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten gilt $\mathrm{d}A(r,\varphi) = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ sowie $(\vec{r}_\perp(r,\varphi))^2 = r^2$ mit dem radialen Abstand r und dem Polarwinkel φ und damit folgt

$$I = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2\,. \tag{40}$$

(**1 Punkt**)

Um das Trägheitsmoment bzgl. der Aufhängeachse zu erhalten, kann der Steinersche Satz angewandt werden und es wird

$$I \to I = \frac{1}{2}mR^2 + md^2 = \frac{1}{2}m(R^2 + 2d^2) \tag{41}$$

gefunden.

(**1 Punkt**)

b) Im Folgenden kann das Dreh-Äquivalent zum zweiten Newtonschen Gesetz verwendet werden

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} \tag{42}$$

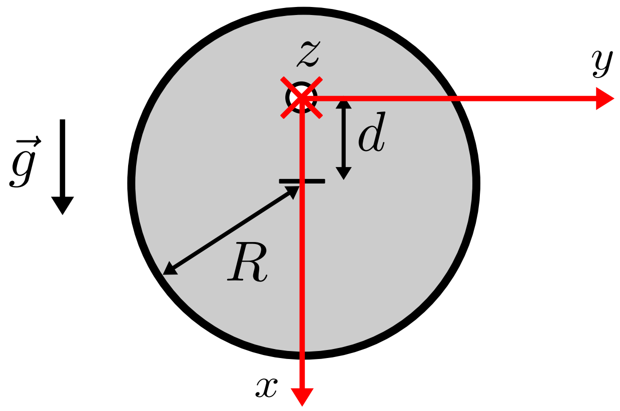
mit dem Drehmoment $\vec{M}$, dem Trägheitsmoment I und dem Vektor der Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$. (**1 Punkt**)

Anstatt das Trägheitsmoment direkt einzusetzen, wird zuerst mit I weitergerechnet. Das Drehmoment kann mit dem Massenschwerpunkt $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ ausgedrückt werden als

$$\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{S}} \times \vec{F} \tag{43}$$

(**1 Punkt**)

wobei $\vec{F}$ die gesamte wirkende Kraft ist. Spätestens jetzt bietet es sich an ein dreidimensionales Koordinatensystem einzuführen und dessen Ursprung in den Aufhängepunkt zu legen, siehe Skizze.



Im gewählten Koordinatensystem gilt dann folglich $\vec{F} = (mg, 0, 0)$. Unter Verwendung von Polarkoordinaten kann der Schwerpunkt dann als $\vec{r}_{\mathrm{S}} = d \cdot \vec{e}_r$ ausgedrückt werden mit $\vec{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Hiermit folgt dann

$$\vec{M} = \vec{r}_{\mathrm{S}} \times \vec{F} = (0, 0, -mgd\sin\theta)\,. \tag{44}$$

(**1 Punkt**)

Die ersten beiden Komponenten der Winkelbeschleunigung verschwinden wie erwartet. Es folgt nun für die dritte Komponente der Winkelbeschleunigung

$$I\dot{\omega}_3 = -mgd\sin\theta \tag{45}$$

(**1 Punkt**)

Die Winkelbeschleunigung ist nichts anderes als die zweite Ableitung des Winkels, also $\dot{\omega}_3 = \ddot{\theta}$. Dies ergibt dann die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0\,. \tag{46}$$

(**1 Punkt**)

Alternativer und schnellerer Lösungsansatz: Energierhaltung
Die Gesamtenergie ist gegeben durch die kinetische Energie der Rotation und der potentiellen Energie im Schwerefeld. Die kinetische Energie der Rotation kann mit dem Trägheitsmoment I berechnet werden als $E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$. Die potentielle Energie des Schwerpunkts ist gegeben durch $E_{\mathrm{pot}} = mgd(1 - \cos\theta)$, wobei $d(1 - \cos\theta)$ die Höhe des Schwerpunkts ausgehend von dessen Ruhepunkt ist. Die Gesamtenergie ist im konservativem Schwerefeld der Erde erhalten und deshalb

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgd(1 - \cos\theta)\right) = 0\,. \tag{47}$$

Daraus folgt

$$\dot{\theta}(I\ddot{\theta} + mgd \sin\theta) = 0\,. \tag{48}$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen. Eine Lösung ist durch $\dot{\theta} = 0$ gegeben, was einfach nur die ruhende Scheibe beschreibt. Die zweite Lösung ist

$$I\ddot{\theta} + mgd \sin\theta = 0\,, \tag{49}$$

welche die gesuchte Bewegungsgleichung ist.

c) Aufgrund des Hinweises im Aufgabentext ($\theta_0 \ll 1$) kann geschlossen werden, dass für alle Winkel $\theta \ll 1$ gilt, da aus Energieerhaltung der Auslenkungswinkel mit der Zeit niemals größer werden kann als der ursprüngliche Auslenkungswinkel. Dann kann eine Kleinwinkelnäherung $\sin\theta \approx \theta$ durchgeführt werden und es folgt

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\theta = 0\,. \tag{50}$$

(**0,5 Punkte**)

Die Bewegungsgleichung entspricht der DGL eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ω_0^2:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \tag{51}$$

(**1 Punkt**)

Damit kann für die Periode direkt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \tag{52}$$

berechnet werden. Einsetzen des Trägheitsmoments aus dem ersten Aufgabenteil ergibt dann

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + d^2}{gd}} \tag{53}$$

(**0,5 Punkte**)

d) Die DGL kann mit den gegebenen Anfangsbedingungen gelöst werden, siehe Übungen, oder mit etwas Nachdenken kommt man auf

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{gd}{\frac{1}{2}R^2 + d^2}} \cdot t\right)\,. \tag{54}$$

(**1 Punkt**)