Klassische Experimentalphysik 1 (Mechanik) WS 20/21

Klausur 2 — Lösungen

Allgemeine Hinweise:

- Die in dieser Musterlösung angegeben Punkte sind Richtlinien, die die Gewichtung einzelner Teilschritte deutlich machen sollen. Diese sind aber sinngemäß zu verstehen, es muss im Einzelnen nicht notwendigerweise exakt die Formel etc. so angegeben werden, um den Punkt zu bekommen.
- Es können auch halbe Punkte vergeben werden.

Aufgabe 1: Kurzfragen (9 Punkte)

a) Mit welcher Potenz der Anzahl an Messwerten N verringert sich statistische Unsicherheit des Mittelwerts? (**0,5 Punkte**)

b) Durch welche definierenden Konstanten ist die SI-Einheit Meter definiert? (**1 Punkt**)

c) Skizzieren Sie ein Orts-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit-, und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm für den freien Fall eines Objekts im Gravitationsfeld der Erde (Reibungseffekte werden vernachlässigt). (**2 Punkte**)

d) Skizzieren Sie für einen Massepunkt, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Achse rotiert, die Vektoren der momentanen Geschwindigkeit, der momentanen Beschleunigung und der Winkelgeschwindigkeit. (**1,5 Punkte**)

e) Formulieren Sie in Worten oder in Gleichungen die drei keplerschen Gesetze. (**1,5 Punkte**)

f) Skizzieren Sie für eine beidseitig fest eingespannte Saite die Eigenschwingungen mit der größten und der zweitgrößten Wellenlänge. (**0,5 Punkte**)

g) An ein Drahtseil der Länge $l_0 = 1\,\mathrm{m}$ mit Querschnittsfläche $A = 100\,\mathrm{mm}^2$ wird ein Gewicht der Masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$ gehängt. Sie beobachten, dass sich das Drahtseil nach der Befestigung des Gewichtes um $\Delta l = 1\,\mathrm{mm}$ dehnt. Wie groß ist der Elastizitätsmodul des Drahtseils. (**1 Punkt**)

h) Drücken Sie den Lorentz-Faktor γ als Funktion des Boostfaktors β aus. (**0,5 Punkte**)

i) Wie hängt die relativistische Gesamtenergie eines Objekts von seiner Masse und seinem Impuls ab? (**0,5 Punkte**)

Antwort:

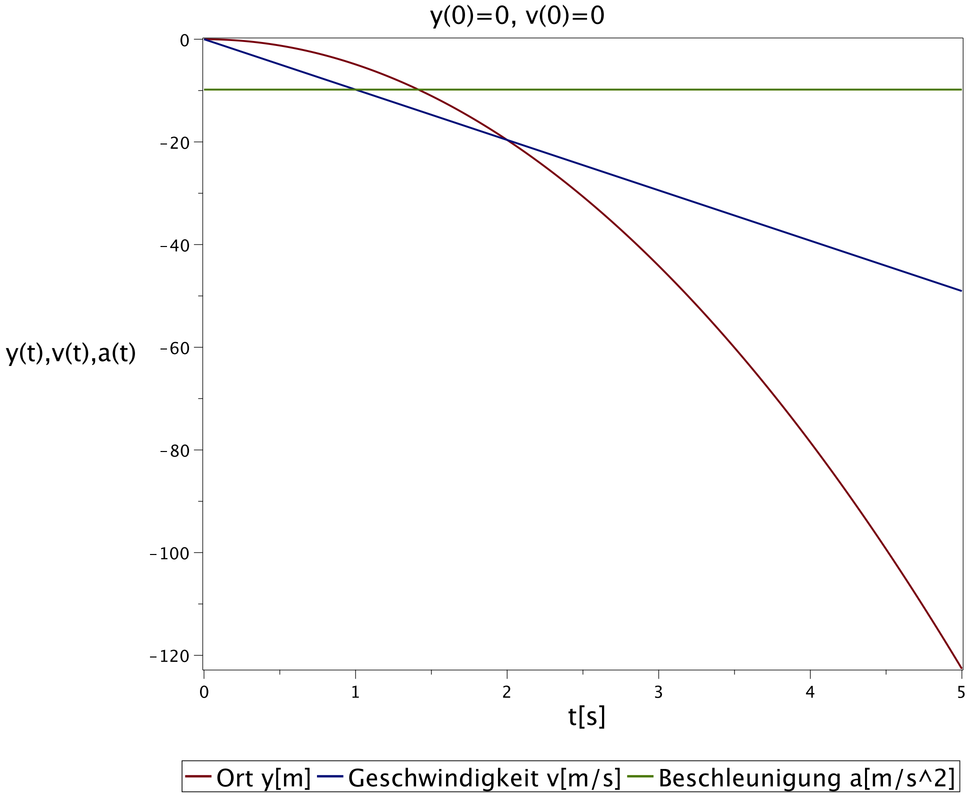
a) Wie in der Vorlesung hergeleitet wurde, ist die Unsicherheit des Mittelwertes gegeben durch

$$\sigma_{\langle \hat{X} \rangle} = \frac{\sigma_{\hat{X}}}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

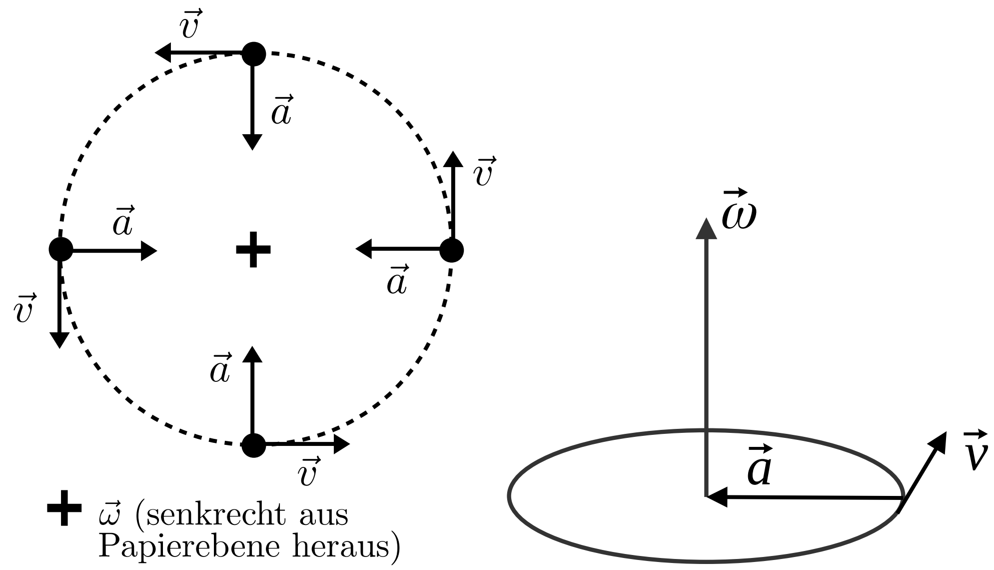
wobei N die Anzahl der Datenpunkte in der Stichprobe und $\sigma_{\hat{X}}$ die Stichprobenvarianz ist. Die Unsicherheit verringert sich also um $\sqrt{N}$. (**0,5 Punkte**)

b) Als Länge wird für die Definition des Meters eine Geschwindigkeit und eine Zeit benötigt. Die relevante Geschwindigkeit ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c (**0,5 Punkte**) und die Zeit ist gegeben über die Frequenz des Hyperfeinübergangs in Caesium $\Delta\nu_{\mathsf{Cs}}$ (**0,5 Punkte**) .

c) Die Skizzen sind unten gezeigt. Die Kurven zeigen die Beschleunigung $a = -g$ (**0,5 Punkte**) , die Geschwindigkeit $v = at$ (**0,5 Punkte**) und den Ort $x = \frac{1}{2}at^2$ (**0,5 Punkte**) . Die x-Achse wurde so gewählt, dass sie von der Erdoberfläche nach oben zeigt. Die letzten (**0,5 Punkte**) gibt es dafür, dass die Diagramme ordentlich gezeichnet sind. Das heißt zum Beispiel, dass die Achsen beschriftet sein müssen. An den Achsen müssen aber keine Zahlenwerte stehen.



d) Zwei mögliche Skizzen sind unten gezeigt. Die Geschwindigkeit zeigt tangential entlang der Bahn (**0,5 Punkte**) . Die Beschleunigung zeigt zum Kreismittelpunkt (**0,5 Punkte**) und die Winkelgeschwindigkeit steht senkrecht auf der Kreisebene gemäß $\vec{\omega} = \vec{v} \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{v}$. (**0,5 Punkte**)



e) 1) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht („Orbitgesetz“):

$$r = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{2}$$

wobei a die große Halbachse und ϵ die Exzentrizität der Ellipse bezeichnet. (**0,5 Punkte**) für Beschreibung und/oder Formel.

2) Der Fahrstrahl $r(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen („Flächengesetz“):

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \text{const.} \tag{3}$$

(**0,5 Punkte**) für Beschreibung und/oder Formel.

3) Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten T verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen a. („Periodengesetz, harmonisches Gesetz“)

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \tag{4}$$

(**0,5 Punkte**) für Beschreibung und/oder Formel.

f) Bei der ersten Eigenschwingung (Grundschwingung) entspricht die Wellenlänge der doppelten Länge der Saite. Bei der Schwingung mit der zweitgrößten Wellenlänge (1. Oberschwingung) enspricht die Wellenlänge genau der Saitenlänge. (**0,5 Punkte**) wenn beide Fälle angegeben sind.

g) Der Elastizitätsmodul ist definiert als

$$E = \frac{\text{Spannung}}{\text{Dehnung}} = \frac{F/A}{\Delta l/l_0}. \tag{5}$$

(**0,5 Punkte**)

Daher ist der Modul hier

$$E = \frac{F/A}{\Delta l/l_0} = \frac{\frac{10\,000\,\mathrm{N}}{1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}}{\frac{0{,}001\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m}}} = 100\cdot 10^9\,\mathrm{N/m^2}. \tag{6}$$

(**0,5 Punkte**) wenn sowohl Betrag als auch Einheiten korrekt sind.

h) Der Lorentzfaktor ist definiert als

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{7}$$

mit $\beta = \frac{v}{c}$. (**0,5 Punkte**) wobei im Falle der ersten Gleichung, $\beta = \frac{v}{c}$ angegeben sein muss.

i) Energie-Impuls-Beziehung:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 = |\vec{p}|^2 + (mc)^2\,. \tag{8}$$

(**0,5 Punkte**) (auch falls die Faktoren c an falscher Stelle stehen).

Aufgabe 2: Gravitation (5,5 Punkte)

Stellen Sie sich vor, dass ein rundes Loch mit einem Durchmesser von 50 cm von der Erdoberfläche durch den Erdmittelpunkt in einer geraden Linie bis auf die andere Seite der Erdoberfäche gebohrt wurde. Beide Öffnungen befinden sich an Land, sodass die Löcher nicht mit Wasser voll laufen. Außerdem sind die Wände des Lochs stabil und aus fester Materie. An einem Ende des Lochs lassen Sie einen Apfel in das Loch fallen. Nehmen Sie an, dass die Erde eine homogene Dichteverteilung hat und vernachlässigen Sie alle Reibungseffekte.

a) Zeigen Sie, dass die Bewegung des Apfels innerhalb der Erde eine harmonische Schwingung ist.
Hinweis: Überlegen Sie sich, welche charakteristischen Eigenschaften Kräfte bei harmonischen Schwingungen haben. (**4 Punkte**)

b) Wie lange dauert es, bis der Apfel wieder zu Ihnen zurückkehrt?
Hinweis: Betrachten Sie das System als Federpendel mit einer effektiven Federkonstante k_{eff}. (**1,5 Punkte**)

Antwort:

a) Die Idee ist zu erkennen, dass sich die Gravitationskraft, die der Apfel bei seiner Passage erfährt, mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt ändert. Sie wird immer schwächer mit wachsender Tiefe. Dann, am Erdmittelpunkt, fliegt der Apfel aber aufgrund der Trägheit weiter. Die Gravitation wird dann mit zunehmender Entfernung wieder stärker $\rightarrow$ eine Schwingung.

Wie in der Vorlesung besprochen, ist die Gravitationskraft innerhalb einer Hohlkugel Null. (**0,5 Punkte**) Es muss also nur die Masse innerhalb des aktuellen Radius betrachtet werden. (**0,5 Punkte**) (die Punkte gibt es, wenn man das weiß oder zeigt.)

Wir legen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Erdmittelpunkt liegt und die positive x-Achse zu der Position an der Oberfläche, an welcher der Apfel losgelassen wurde zeigt. Die Gravitationskraft, die auf den Apfel wirkt, ist

$$F = -\frac{GmM}{x^2} \cdot \frac{x}{|x|} \tag{9}$$

wobei x die Position des Apfels entlang dieser Achse ist und M die Masse der Kugel mit dem Radius $|x|$ bezeichnet. (**0,5 Punkte**) Die Kraft zeigt immer zum Erdmittelpunkt und daher das Minuszeichen in der obigen Formel. (**0,5 Punkte**)

Wir berechnen nun die Masse M innerhalb der Kugel mit Radius $|x|$. Im Folgenden ist M_E die gesamte Masse der Erde mit Radius r_{E} und M die Teilmasse der Erde, welche sich innerhalb einer Kugel mit Radius $|x|$ befindet. Diese Teilmasse ist proportional zum Volumen der Kugel:

$$M = \rho_{\text{E}} V = \rho_{\text{E}} \frac{4}{3}\pi |x|^3. \tag{10}$$

(**0,5 Punkte**) Unter der Annahme, dass die Dichte der Erde homogen ist, lässt sich die Dichte auch schreiben als:

$$\rho_{\text{E}} = \frac{M_{\text{E}}}{V_{\text{E}}} = \frac{M_{\text{E}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{E}}^3}. \tag{11}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung erhält man für die Masse der Kugel dann

$$M = M_E \frac{|x|^3}{r_{\text{E}}^3}, \tag{12}$$

(**0,5 Punkte**) (Für das Finden dieser Relation. Ohne diese kommt man nicht auf die unten gesuchte Form mit $F \propto -x$.)

Die Gravitationskraft, die auf den Apfel in der Höhe x wirkt, ist daher:

$$F = -\frac{GmM}{|x|^2} \cdot \frac{x}{|x|} = -\frac{GmM_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^3} \cdot x. \tag{13}$$

Die Kraft ist also proportional zur Auslenkung (**0,5 Punkte**) und zeigt entgegen der Auslenkungsrichtung (**0,5 Punkte**) so wie es für die Rückstellkraft bei einem harmonischen Oszillator der Fall ist. (Die **0,5 Punkte** gibt es jeweils dafür, dass man weiß, dass bei einem harmonischen Oszillator die Rückstellkraft diese Eigenschaften hat.)

b) Die Zeit, bis der Apfel zurückkehrt ist, ist durch die Periode der Schwingung gegeben. Für diese gilt allgemein:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{14}$$

(**0,5 Punkte**)

Wir können das System als Federpendel mit der in Teil a) gefundenen Rückstellkraft

$$F = -\frac{GmM_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^3}x \tag{15}$$

betrachten.

In dieser Betrachtung ist die Federkonstante dann gegeben als

$$k_\mathrm{eff} = \frac{GmM_\mathrm{E}}{r_\mathrm{E}^3}. \tag{16}$$

Bei einem Federpendel hängt die Kreisfrequenz folgendermaßen mit der Federkonstante zusammen:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\mathrm{eff}}{m}}. \tag{17}$$

(**0,5 Punkte**)

Die gesuchte Periode ergibt sich damit dann als

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_\mathrm{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r_\mathrm{E}^3}{GM_\mathrm{E}}}. \tag{18}$$

(**0,5 Punkte**)

Alternativ kann man auch die DGL aufstellen und lösen. Dann kommt man auch auf das Ergebnis. Falls man bei der a) nicht auf die richtige Kraft gekommen ist, kann man hier natürlich nur mit einem allgemeinen k_eff rechnen. Dies gilt als Folgefehler und gibt daher keinen Abzug. (Hier sollen die Kenntnisse über Federpendel geprüft werden).

Aufgabe 3: Trägheitsmomente einer Scheibe (6 Punkte)

Wir betrachten eine homogene und isotrope kreisförmige Scheibe mit Radius R und Masse m. Die Dicke der Scheibe ist vernachlässigbar.

a) Wie berechnet sich das Trägheitsmoment eines starren Körpers im allgemeinen Fall? (**1 Punkt**)

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Achse, welche in der Ebene der Scheibe liegt und durch deren Mittelpunkt verläuft, siehe linke Skizze.

Hinweis:

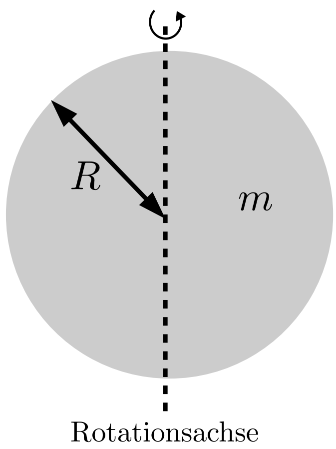
$$\int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = \pi \tag{19}$$

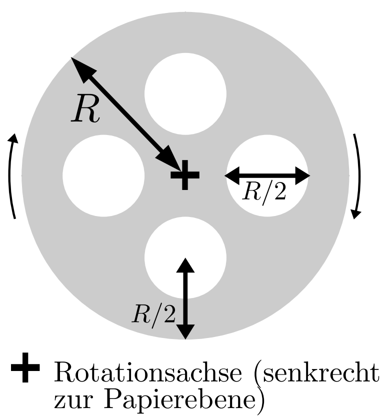
c) Nun werden vier Löcher mit Radius $R/4$ im Abstand $R/2$ vom Mittelpunkt der Scheibe in die Scheibe gebohrt. Wenn die Scheibe in 360° Gradmaß eingeteilt wird, so befinden sich die Mittelpunkte der Löcher bei 0°, 90°, 180° und 270°. Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Scheibe bezüglich einer Achse, welche senkrecht zur Scheibe steht und durch deren Mittelpunkt verläuft, siehe rechte Skizze.

Hinweis:

Das Trägheitsmoment der kompletten Scheibe bezüglich einer Achse, welche senkrecht zur Scheibe steht und durch deren Mittelpunkt verläuft, ist gegeben durch

$$I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} m R^2 \,. \tag{20}$$





Antwort:

a) Für das Trägheitsmoment I gilt im allgemeinen Fall

$$I = \int_M \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 = \int_A \sigma(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \,\mathrm{d}A \tag{21}$$

mit dem infinitesimalen Massenelement $\mathrm{d}m(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ und dem Quadrat des senkrechten Abstands zur Rotationsachse $(\vec{r}_\perp)^2$. (**1 Punkt**) (Den Punkt gibt es für eine der beiden Arten das Trägheitmoment zu schreiben. Dieser Punkt kann nicht halbiert werden.)

b) Im vorliegenden zweidimensionalen Fall ergibt sich

$$I = \int_A \sigma(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \,\mathrm{d}A \tag{22}$$

mit der Flächendichte σ und dem infinitesimalen Flächenelement $\mathrm{d}A$. Da die Scheibe eine homogene und isotrope Massendichte hat, gilt

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}\,. \tag{23}$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten gilt $\mathrm{d}A(r,\varphi) = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$ sowie $(\vec{r}_\perp(r,\varphi))^2 = (r\cos\varphi)^2$ (**0,5 Punkte**) (für die Berechnung von $r_\perp$) mit dem radialen Abstand r und dem Polarwinkel φ. Damit folgt unter Verwendung des Hinweises

$$I = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R r^2 r\,\mathrm{d}r\right)(\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = \frac{m}{\pi R^2}\left(\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r\right)\left(\int_0^{2\pi}(\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{m}{\pi R^2}\frac{R^4}{4}\pi = \frac{1}{4}mR^2\,. \tag{24}$$

(**1 Punkt**) (Abzug nach Ermessen)

c) Hier muss nun das Integral des Trägheitsmoments aufgeteilt werden in die Scheibe mit den vier Löchern und die vier Löcher selbst.

$$I = \int_{\text{Scheibe}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 = \int_{\text{Scheibe mit Löchern}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 + \int_{\text{Löcher}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \tag{25}$$

Das Trägheitsmoment der Scheibe mit Löcher ist gesucht, also

$$\int_{\text{Scheibe mit Löchern}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 = \int_{\text{Scheibe}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 - \int_{\text{Löcher}} \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \tag{26}$$

oder einfacher aufgeschrieben

$$I_{\text{Scheibe mit Löchern}} = I_{\text{Scheibe}} - I_{\text{Löcher}}\,. \tag{27}$$

(**1 Punkt**) (ebenso für den richtigen Gedanken ohne Gleichungen)

Das Trägheitsmoment der kompletten Scheibe ist bekannt, $I_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2}mR^2$. Da alle Löcher symmetrisch um den Mittelpunkt gebohrt sind, sind die Trägheitsmomente der einzelnen Löcher bzgl. der zur Scheibe senkrechten Rotationsachse durch den Mittelpunkt alle gleich, also

$$I_{\text{Scheibe mit Löchern}} = I_{\text{Scheibe}} - 4\cdot I_{\text{Loch}}\,. \tag{28}$$

(**0,5 Punkte**) (ebenso für den richtigen Gedanken ohne Gleichungen)

Das Trägheitsmoment des Lochs um die Rotationsachse der Scheibe kann identifiziert werden als Trägheitsmoment einer kleineren Scheibe mit Radius $R/4$ um eine um $R/2$ verschobene senkrechte Rotationsachse (**0,5 Punkte**) , also mit dem Satz von Steiner

$$I_{\text{Loch}} = \frac{1}{2}m_{\text{Loch}}\left(\frac{R}{4}\right)^2 + m_{\text{Loch}}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{32}m_{\text{Loch}}R^2 + \frac{1}{4}m_{\text{Loch}}R^2 = \frac{9}{32}m_{\text{Loch}}R^2\,. \tag{29}$$

(**0,5 Punkte**) (Diese Punkte gibt es auch wenn man die Rechnung für die Löchter nicht getrennt durchführt sondern alles zusammen in einer Formel berechnet.)

Die Masse des Lochs kann einfach berechnet werden als $m_{\text{Loch}} = \frac{m}{\pi R^2}\cdot\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{m}{16}$ und damit ergibt sich

$$I_{\text{Loch}} = \frac{9}{32}\frac{m}{16}R^2 = \frac{9}{512}mR^2\,. \tag{30}$$

(**0,5 Punkte**) (Diese Punkte gibt es auch wenn man die Rechnung für die Löchter nicht getrennt durchführt, sondern alles zusammen in einer Formel berechnet.)

Jetzt muss nur noch in die Gleichung von oben eingesetzt werden, also

$$\begin{aligned} I_{\text{Scheibe mit Löcher}} &= \frac{1}{2}mR^2 - 4 \cdot \frac{9}{512}mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 - \frac{9}{128}mR^2 = \frac{64}{128}mR^2 - \frac{9}{128}mR^2 \\ &= \frac{55}{128}mR^2 \,. \end{aligned} \tag{31}$$

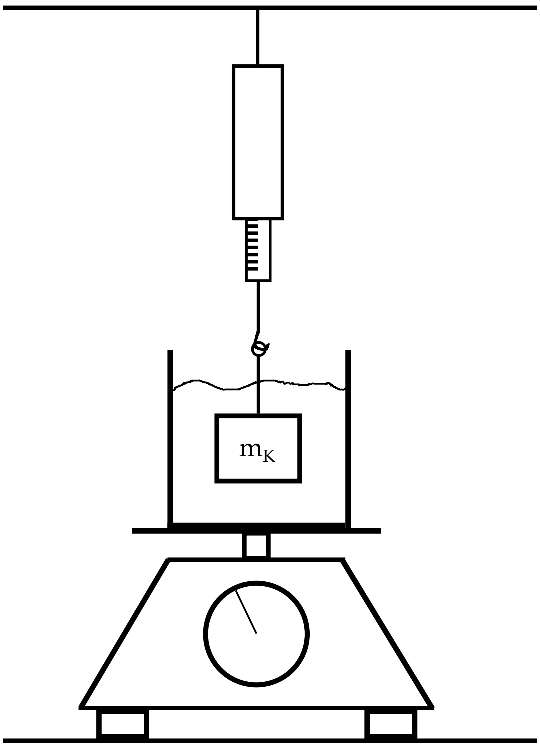
(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 4: Hydrostatik (4 Punkte)

Ein Becher der Masse $m_{\mathrm{B}} = 1\,\mathrm{kg}$ enthält Wasser mit der Masse $m_{\mathrm{W}} = 2\,\mathrm{kg}$ und der Dichte $\rho_{\mathrm{W}} = 1 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$. Der Becher steht auf einer Küchenwaage. Ein Körper mit einer Masse $m_{\mathrm{K}} = 2\,\mathrm{kg}$ und der Dichte $\rho_{\mathrm{K}} = 2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$ hängt an einer Federwaage und ist vollständig in das Wasser eingetaucht.

a) Berechnen Sie die Kraft, die an der Federwaage gemessen wird. (**3 Punkte**)

b) Berechnen Sie die Kraft, die an der Küchenwaage gemessen wird. (**1 Punkt**)



Antwort: Wir definieren das Koordinatensystem so, dass die z-Achse nach unten zeigt.

a) Der Körper m_K erfährt eine Auftriebskraft, welche der Gewichtskraft entgegenzeigt. (**0,5 Punkte**) Die Federwaage misst die Gesamtkraft, die aus der Differenz dieser beiden Kräfte besteht.

$$F_{\mathrm{Feder}} = F_G - F_{\mathrm{Auf}} \tag{32}$$

(**0,5 Punkte**)

Die Auftriebskraft ist nach dem Archimedischen Prinzip gleich der Masse des verdrängten Wasservolumens (**0,5 Punkte**)

$$F_{\mathrm{Auf}} = \rho_W g V_{\mathrm{K}} \tag{33}$$

(**0,5 Punkte**) und daher

$$F_{\mathrm{Feder}} = F_G - F_{\mathrm{Auf}} = m_{\mathrm{K}} g - \rho_W g V_{\mathrm{K}} = (\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{W}}) g V_{\mathrm{K}} \tag{34}$$

(**0,5 Punkte**) Da das Volumen nicht bekannt ist, kann es mit der Dichte und der Masse ausgerechnet werden oder man eliminiert es aus der Gleichung

$$\begin{aligned} F_{\text{Feder}} &= (\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{W}})gV_{\text{K}} \\ &= (\rho_{\text{K}} - \rho_{\text{W}})g\frac{m_{\text{K}}}{\rho_{\text{K}}} \\ &= \left(1 - \frac{\rho_{\text{W}}}{\rho_{\text{K}}}\right) gm_{\text{K}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) 10\,\text{m/s}^2 \cdot 2\,\text{kg} \\ &= 10\,\text{N} \end{aligned} \tag{35}$$

(**0,5 Punkte**) (Für das Ergebnis mit Einheiten)

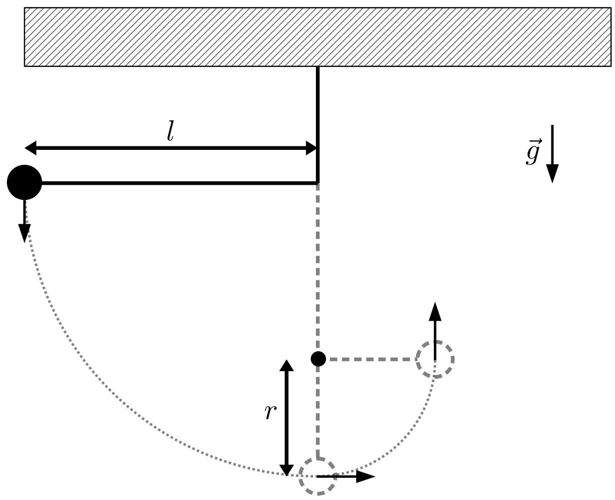
b) Die untere Waage zeigt die Differenz der gesamten Gewichtskraft (von Becher, Wasser und Körper) und der Kraft, die auf die Federwaage ausgeübt wird, da ein Teil der Gewichtskraft des Körpers schon von dieser getragen wird. (**0,5 Punkte**)

$$\begin{aligned} F_{\text{K}} &= (m_{\text{B}} + m_{\text{W}} + m_{\text{K}})g - F_{\text{Feder}} \\ &= (1\,\text{kg} + 2\,\text{kg} + 2\,\text{kg}) \cdot 10\,\text{m/s}^2 - 10\,\text{N} \\ &= 40\,\text{N} \end{aligned} \tag{36}$$

(**0,5 Punkte**) (Jeweils (**0,5 Punkte**) wenn man weiß, dass die Waage die Differenz zeigt und wenn man es auch richtig ausrechnet. Mit Einheiten! Falls bei a) F_{Feder} falsch berechnet wurde und deshalb hier was falsches rauskommt, zählt das als Folgefehler)

Aufgabe 5: Pendel mit Nagel (4,5 Punkte)

Ein Pendel besteht aus einem kleinen Pendelkörper mit der Masse m und vernachlässigbarer Ausdehnung, der an einem masselosen Faden der Länge l befestigt ist. Der Pendelkörper wird seitlich so weit ausgelenkt, dass der Faden die Horizontale erreicht. Anschließend wird er aus dieser Position losgelassen. Am tiefsten Punkt seiner Bahn schlägt der Faden gegen einen kleinen Nagel, der sich in einem Abstand r, mit $2r < l$, über dem tiefsten Punkt des Pendelkörpers befindet. Der Faden knickt also an der Position des Nagels, siehe die Skizze unterhalb dieser Aufgabe.



a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Pendelkörpers am untersten Punkt seiner Bahn. (**1 Punkt**)

b) Zeigen Sie, dass der Betrag der Geschwindigkeit des Pendelkörpers am obersten Punkt seiner Bahn nach dem Umknicken des Fadens durch

$$v = \sqrt{2g(l-2r)} \tag{37}$$

gegeben ist. (**1 Punkt**)

c) Zeigen Sie, dass $r < \frac{2}{5}l$ gelten muss, damit der Faden straff bleibt und sich der Pendelkörper auf einer Kreisbahn um den Nagel bewegt. (**2,5 Punkte**)

Antwort: Ein Großteil dieser Aufgabe kann mit Energieerhaltung gelöst werden. Im Folgenden setzen wir den Nullpunkt der potenziellen Energie des Gravitationsfeldes in den untersten Punkt des Pendelkörpers.

a) Da der Faden die Länge l hat und die Startposition so gewählt ist, dass der Faden dabei horizontal ist, ist die potenzielle Energie vor dem Loslassen des Pendels durch

$$E_{\text{Pot}} = mgl \tag{38}$$

gegeben. (**0,5 Punkte**) Am untersten Punkt hat sich diese Energie vollständig in kinetische Energie $E_{\text{Kin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{u}}^2$ umgewandelt, also

$$\frac{1}{2}mv_{\text{u}}^2 = mgl \Leftrightarrow v_{\text{u}}^2 = 2gl \Leftrightarrow |v_{\text{u}}| = \sqrt{2gl}\,. \tag{39}$$

(**0,5 Punkte**)

b) Auch hier kann Energieerhaltung verwendet werden. Es muss nur die Höhe des Pendelkörpers am obersten Punkt nach Umknicken des Fadens zu $l - 2r$ berechnet werden. (**0,5 Punkte**) Dann gilt

$$\frac{1}{2}mv_{\text{o}}^2 = mg(l - 2r) \Leftrightarrow v_{\text{o}}^2 = 2g(l - 2r) \Leftrightarrow |v_{\text{o}}| = \sqrt{2g(l - 2r)} \tag{40}$$

(**0,5 Punkte**)

c) Ähnlich zur Looping-Aufgabe in der Probeklausur, muss nun überlegt werden, welche Mindestgeschwindigkeit der Pendelkörper haben muss, damit eine Zugkraft durch den Faden aufgebracht wird. (**0,5 Punkte**) Dies ist der Fall, wenn die Geschwindigkeit am obersten Punkt gerade so groß ist, dass die benötigte Zentripetalkraft F_{Z} größer ist als die Gewichtskraft F_{G} des Pendelkörpers. (**0,5 Punkte**)

$$F_{\text{Z}} > F_{\text{G}} \Leftrightarrow \frac{mv_{\text{o}}^2}{r} > mg \Leftrightarrow v_{\text{o}}^2 > rg \tag{41}$$

(**1 Punkt**) (0,5 Punkte Abzug falls = in der Relation verwendet wird. Die Kraft muss größer sein, damit die Bewegung so abläuft.)

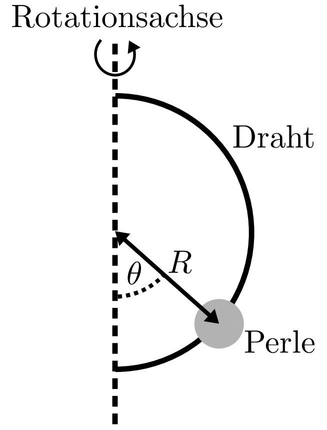
Die Geschwindigkeit am obersten Punkt ist durch Energieerhaltung vorgegeben, wie im vorherigen Aufgabenteil berechnet. Damit folgt

$$2g(l - 2r) = v_{\text{o}}^2 > rg \Leftrightarrow 2g(l - 2r) > rg \Leftrightarrow 2l - 4r > r \Leftrightarrow \frac{2}{5}l > r\,. \tag{42}$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 6: Perle an Draht (4 Punkte)

Eine Perle mit einer Masse m gleitet reibungsfrei auf einem halbkreisförmigen Drahtstück mit dem Radius R, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von ω um die vertikale Achse dreht, siehe Skizze unten. Berechnen Sie den Winkel θ zwischen der Rotationsachse des Drahtstücks und der Verbindungslinie vom Mittelpunkt des Halbkreises zur Perle, bei dem die Perle in Bezug auf den rotierenden Draht an der gleichen Stelle bleibt.



Antwort:
Zunächst überlegen wir uns, welche Kräfte in der Situation wirken. Es wirkt die Schwerkraft auf die Perle und die Kraft, welche durch den Draht auf die Perle ausgeübt wird. Die Schwerkraft wirkt mit dem Betrag $F_\mathrm{G} = mg$ senkrecht nach unten. (**0,5 Punkte**) Da die Kugel reibungsfrei gleitet, wirkt die Kraft des Drahtes auf die Perle stets senkrecht zum Draht, ist also eine Normalkraft mit Betrag F_N. (**0,5 Punkte**)
Damit die Perle in einer stationären Position verbleibt, muss die vertikale Komponente der Normalkraft des Drahtes die Schwerkraft der Kugel ausgleichen (**0,5 Punkte**) und die horizontale Komponente der Normalkraft bringt die Zentripetalkraft für die Kreisbewegung auf. (**0,5 Punkte**)
Es gilt also:

$$F_\mathrm{N} \sin\theta = mr\omega^2 \quad (\textbf{0,5 Punkte}) \tag{43}$$

$$F_\mathrm{N} \cos\theta = mg \quad (\textbf{0,5 Punkte}) \tag{44}$$

wobei r der Radius der von der Perle durchlaufenen Kreisbahn (oder deren Abstand zur Rotationsachse) ist und ω die Winkelgeschwindigkeit der Perle bzw. des rotierenden Drahtstücks beschreibt. Hieraus folgt sofort

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\omega^2}{g}\,. \tag{45}$$

Unter Verwendung von $r = R\sin\theta$ (**0,5 Punkte**) folgt

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{\omega^2 R\sin\theta}{g} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}\,. \tag{46}$$

Für den gesuchten Winkel gilt also

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right). \tag{47}$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 7: Elastischer Stoß (5 Punkte)

Bei einem Swing-by-Manöver wird die Energieübertragung bei einem elastischen Stoß verwendet um die kinetische Energie eines Raumschiffes zu ändern. Im Folgenden sind alle Geschwindigkeitsangaben bezüglich eines Systems, in dem die Sonne (des Sonnensystems) ruht. Betrachten Sie ein Raumschiff der Masse $m = 1000\,\mathrm{kg}$, welches sich aus dem Unendlichen auf den Planeten Saturn zubewegt, welcher eine Masse von etwa $M = 1 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}$ hat. Die Anfangsgeschwindigkeit des Raumschiffs beträgt $v_\mathrm{R} = 10\,000\,\mathrm{km/s}$ in positive x-Richtung. Der Planet Saturn bewegt sich gleichzeitig mit einer Geschwindigkeit von $v_\mathrm{S} = 10\,000\,\mathrm{km/s}$ in näherungsweise negative x-Richtung auf das Raumschiff zu. **Vernachlässigen** Sie relativistische Effekte.

a) Betrachten Sie das Manöver als eindimensionalen elastischen Stoß zwischen Raumschiff und Planet. Benennen Sie die in dieser Situation geltenden Erhaltungssätze. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Raumschiffes nach dem Stoß näherungsweise gegeben ist durch:
$$u_\mathrm{R} = -v_\mathrm{R} + 2v_\mathrm{S} \tag{48}$$

Hinweise: Durch geschicktes Umstellen der Gleichungen kann es vermieden werden, dass man quadratische Gleichungen lösen muss. Hilfreich könnte auch folgende Relation sein: $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$.

(**4 Punkte**)

b) Ermitteln Sie den Faktor, um den sich die kinetische Energie der Rakete nach dem Stoß geändert hat. Woher kommt die zusätzliche Energie? (**1 Punkt**)

Antwort:

a) Es gibt mehrere Varianten mit unterschiedlichem Rechenaufwand diese Aufgabe zu lösen. Zunächst wird eine rechnerisch aufwändige Variante gezeigt. Danach folgt eine rechnerisch einfachere Variante.

- **Variante 1**: Zur Lösung verwenden wir Impulserhaltung. Und da es sich um einen elastischen Stoß handelt, ist auch die totale kinetische Energie erhalten.
  Impulserhaltung:
$$mv_\mathrm{R} + Mv_\mathrm{S} = mu_\mathrm{R} + Mu_\mathrm{S} \tag{49}$$
  (**0,5 Punkte**)
  Energieerhaltung:
$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{R}^2 + \frac{1}{2}Mv_\mathrm{S}^2 = \frac{1}{2}mu_\mathrm{R}^2 + \frac{1}{2}Mu_\mathrm{S}^2 \tag{50}$$
  (**0,5 Punkte**)
  Die Energieerhaltung kann man umschreiben in
$$\frac{1}{2}m\left(v_\mathrm{R}^2 - u_\mathrm{R}^2\right) = \frac{1}{2}M\left(u_\mathrm{S}^2 - v_\mathrm{S}^2\right) \tag{51}$$
  und mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung kommt man dann auf
$$m\left(v_\mathrm{R} - u_\mathrm{R}\right)\left(v_\mathrm{R} + u_\mathrm{R}\right) = M\left(u_\mathrm{S} - v_\mathrm{S}\right)\left(u_\mathrm{S} + v_\mathrm{S}\right) \tag{52}$$
  Die Impulserhaltung kann man auch umschreiben nach
$$m\left(v_\mathrm{R} - u_\mathrm{R}\right) = M\left(u_\mathrm{S} - v_\mathrm{S}\right) \tag{53}$$

Dies setzt man nun in Gl.52 ein und erhält:

$$M\,(u_\mathrm{S} - v_\mathrm{S})\,(v_\mathrm{R} + u_\mathrm{R}) = M\,(u_\mathrm{S} - v_\mathrm{S})\,(u_\mathrm{S} + v_\mathrm{S}) \tag{54}$$

und damit

$$(v_\mathrm{R} + u_\mathrm{R}) = (u_\mathrm{S} + v_\mathrm{S}) \tag{55}$$

$$\Rightarrow u_\mathrm{S} = u_\mathrm{R} + v_\mathrm{R} - v_\mathrm{S} \tag{56}$$

Dieses Zwischenergebnis besagt, dass die beiden Stoßpartner vor und nach dem Stoß die gleiche relative Geschwindigkeit, aber mit umgekehrten Vorzeichen haben. (**1 Punkt**) (Das könnte man sich aber auch einfach beim Lernen gemerkt haben und muss es nicht unbedingt herleiten. Wenn man das Vorzeichen falsch hat oder sich verrechnet, gibt es **0,5 Punkte** Abzug)
Diese Beziehung setzt man nun wiederum in die Impulserhaltung ein

$$m v_\mathrm{R} + M v_\mathrm{S} = m u_\mathrm{R} + M\,(u_\mathrm{R} + v_\mathrm{R} - v_\mathrm{S}) \tag{57}$$

Auflösen nach u_R ergibt dann

$$u_\mathrm{R} = v_\mathrm{R}\left(\frac{m - M}{m + M}\right) + v_\mathrm{S}\left(\frac{2M}{m + M}\right) \tag{58}$$

(**1 Punkt**) (Mit entsprechendem Abzug bei Verrechnen. Den Punkt gibt es auch, wenn man die Formel einfach weiß.)
Da $M \gg m$ kann man m in den Brüchen vernachlässigen (**0,5 Punkte**) und das Ergebnis vereinfacht sich zu der gesuchten Beziehung:

$$u_\mathrm{R} = -v_\mathrm{R} + 2 v_\mathrm{S} \tag{59}$$

(**0,5 Punkte**)
(Fehler, die sich aus Fehlern in vorangegangenen Schritten ergeben, werden als Folgefehler gewertet und geben keine Abzug.)
Analog findet man übrigens für die Geschwindigkeit des Planeten

$$u_\mathrm{S} = v_\mathrm{S}\left(\frac{M - m}{m + M}\right) + v_\mathrm{R}\left(\frac{2m}{m + M}\right) \tag{60}$$

was mit $M \gg m$ zu

$$u_\mathrm{S} = v_\mathrm{S} \tag{61}$$

wird. Dies ist hier aber nicht gefragt.

- **Variante 2**:
Es gilt Impulserhaltung und da es sich um einen elastischen Stoß handelt, ist auch die totale kinetische Energie erhalten.
Impulserhaltung:

$$m v_\mathrm{R} + M v_\mathrm{S} = m u_\mathrm{R} + M u_\mathrm{S} \tag{62}$$

(**0,5 Punkte**)
Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m v_\mathrm{R}^2 + \frac{1}{2} M v_\mathrm{S}^2 = \frac{1}{2} m u_\mathrm{R}^2 + \frac{1}{2} M u_\mathrm{S}^2 \tag{63}$$

(**0,5 Punkte**)

Genau wie in Variante 1 kann man zeigen, dass die relative Geschwindigkeit zwischen den Stoßpartnern

$$v_{\mathrm{rel}} = v_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{S}} = u_{\mathrm{S}} - u_{\mathrm{R}} = -u_{\mathrm{rel}} \tag{64}$$

ist.
(**1 Punkt**) (Das könnte man sich aber auch einfach beim Lernen gemerkt haben und muss es nicht unbedingt herleiten. Wenn man das Vorzeichen falsch hat, gibt es **0,5 Punkte** Abzug)

Da der Planet sehr viel schwerer als das Raumschiff ist, befindet sich der gemeinsame Schwerpunkt in guter Näherung die ganze Zeit über im Zentrum des Planeten. Damit ist die relative Geschwindigkeit zwischen den Stoßpartnern quasi gleich der relativen Geschwindigkeit zwischen Raumschiff und gemeinsamen Schwerpunkt. (**1 Punkt**)

Die Geschwindigkeit des Raumschiffes nach dem Stoß setzt sich dann aus der relativen Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Schwerpunktes zusammen:

$$u_{\mathrm{R}} = u_{\mathrm{rel}} + v_{\mathrm{S}} = -\left(v_{\mathrm{R}} - v_{\mathrm{S}}\right) + v_{\mathrm{S}} = -v_{\mathrm{R}} + 2v_{\mathrm{S}} \tag{65}$$

(**1 Punkt**)

b) Der Faktor, um den die kinetische Energie zunimmt, ist

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{2}mu_{\mathrm{R}}^2}{\frac{1}{2}mv_{\mathrm{R}}^2} \\ &= \frac{(-v_{\mathrm{R}} + 2v_{\mathrm{S}})^2}{v_{\mathrm{R}}^2} \\ &= \frac{(-10\,000\,\mathrm{km/s} - 2 \cdot 10\,000\,\mathrm{km/s})^2}{(10\,000\,\mathrm{km/s})^2} = 9. \end{aligned} \tag{66}$$

(**0,5 Punkte**)

Die zusätzliche kinetische Energie des Raumschiffes wird durch eine Abnahme der kinetischen Energie des Planeten ausgeglichen, so dass die Energieerhaltung gewährleistet ist. (**0,5 Punkte**)