Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) WS 21/22

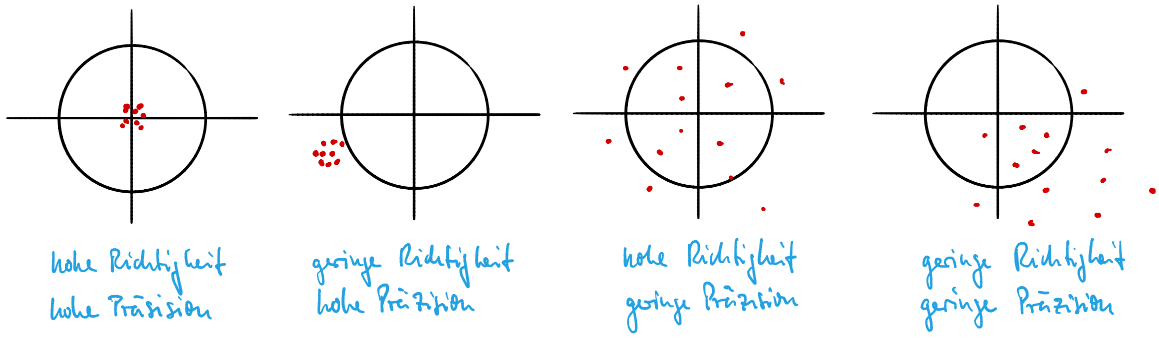
Klausur 1

Musterlösung

Aufgabe 1: Kurzfragen (7 Punkte)

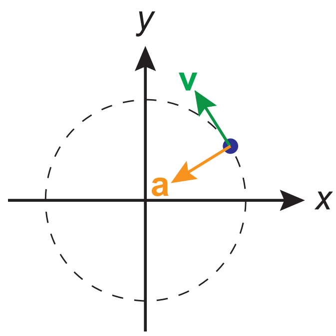
a) In Worten: *Präzision* ist ein Maß für die *Reproduzierbarkeit* einer Messung, *Richtigkeit* ist ein Maß für die *Nähe* einer Messung *zum wahren Wert*.

Skizze (Vorlesungsfolien Kapitel 1.5, S. 80):



(jeweils **0,5 Punkte**, wenn einer der Begriffe korrekt in Worten erklärt wurde oder in einer Skizze geringe und/oder hohe Präzision oder geringe und/oder hohe Richtigkeit eingezeichnet wurden).

b) Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigt vom Massepunkt parallel zur momentanen Bewegungsrichtung, also tangential zum Kreis. Der Massepunkt erfährt eine Zentripetalbechleunigung, daher zeigt der Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ radial von Massepunkt zum Ursprung.



(jeweils **0,5 Punkte** für Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor)

c) In Worten (original):

N1 Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.

N2 Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.

N3 Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich: die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets betragsgleich, aber von entgegengesetzter Richtung.

In Worten (modern):

N1 Es gibt spezielle Bezugssysteme, genannt Inertialsysteme, in denen sich ein kräftefreies Objekt gleichförmig-geradlinig bewegt. Oder kurz: $\exists$ Inertialsysteme.

N2 Impulse und Kräfte sind vektorielle Größen. Die Impulsänderung eines Objekts ist proportional zur Summe der einwirkenden Kräfte. Oder kurz: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.

N3 Übt Objekt 1 auf Objekt 2 eine Kraft aus (actio), dann übt auch Objekt 2 auf Objekt 1 eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft aus (reactio). Oder kurz: „actio = reactio ", $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$.

N4 (Superpositionsprinzip, optional) Wirken auf ein Objekt mehrere Kräfte, so addieren sich diese vektoriell zu einer resultierenden Kraft. Oder kurz: $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$.

(**0,5 Punkte** für jedes der drei newtonschen Gesetze in irgendeiner Formulierung, auch wenn ignoriert wurde, dass Kräfte *Vektoren* sind oder N2 fehlinterpretiert wurde (bitte merken: Eine Aussage wie „Eine Kraft ist (bzw. ergibt sich aus) Masse mal Beschleunigung" ist physikalisch irreführend. N2 sagt nichts über Kräfte aus, Kräfte sind einfach vorhanden. Wenn eine Kraft auf ein Objekt wirkt, dann sorgt sie für eine Änderung des Impulses: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$.)

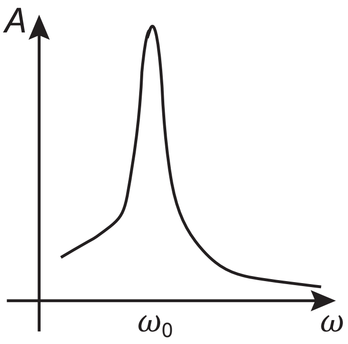
d) Im Cavendish-Experiment wird die Gravitationskonstante über eine genaue Messung der Kraft bestimmt, die zwischen zwei Massen mit bekanntem Abstand wirkt. Dazu werden zwei Probemassen symmetrisch an einer Torsionswaage aufgehängt. Zur Messung der Auslenkung wird ein Laserstrahl über einen am Faden der Torsionswaage angebrachten Spiegel auf eine weit entfernte Skala gelenkt. Durch die Gravitationswirkung von zwei äußeren Massen wird ein Drehmoment auf die Torsionswaage ausgeübt. Zunächst wirkt dieses Drehmoment dem Rückstellmoment des Fadens der Torsionswaage entgegen. Dadurch stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein. Dann werden die Massen symmetrisch umgelegt, so dass die beiden Drehmomente in dieselbe Richtung wirken und zu einer (näherungsweise) gleichmäßig beschleunigten Drehung führen. Die Verschiebung des Lichtstrahls Δs auf der Skala wird als Funktion der Zeit t gemessen. Die Gravitationskraft ist proprotional zum Betrag der Winkelbeschleunigung, die wiederum proportional zu $\Delta s/t^2$ ist.

(**0,5 Punkte** für grundlegendes Messprinzip „Kraft zwischen zwei Massen in kurzem Abstand"; weitere **0,5 Punkte** für mindestens ein weiteres Detail, z. B. Torsionswaage, Gravitationskraft proportional zur Winkelbeschleunigung bzw. zu $\Delta s/t^2$ usw.).

e) Der Auftrieb eines Körpers in einem Fluid hängt von der Masse des von ihm verdrängten Fluids ab. Diese Masse ist proportional zur Dichte des Fluids ϱ_{fl} und vom Volumen des Körpers V_{K}. Der Auftrieb hängt nicht direkt von der Dichte des Körpers ϱ_{K} ab. Aus dem Vergleich der beiden Dichten ergibt sich, ob der Körper aufsteigt, untergeht oder schwebt.

(**0,5 Punkte** für „Masse des Fluids" oder „Dichte des Fluids und Volumen des Körpers", auch für „Verhältnis der Dichten")

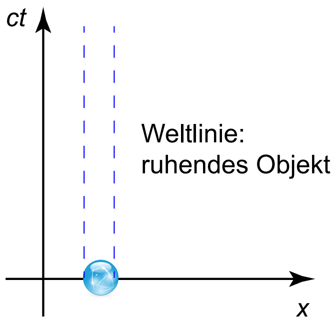
f) Grobe Skizze einer Cauchy-Lorentz-Verteilung mit Maximum bei ω_0:

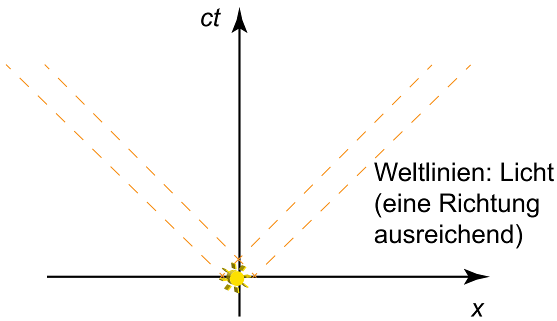


Eine richtige Lösung sollte also $A(\omega)$ zeigen, die Amplitude der Schwingung als Funktion der Anregungsfrequenz ω. Eine Darstellung von $A(t)$, also des zeitlichen Verlaufs einer Schwingung, ist *keine* korrekte Antwort.

(**0,5 Punkte** für qualitativ korrekte Kurvenform, weitere **0,5 Punkte** für vollständige Achsenbeschriftung und Markierung von ω_0 im Diagramm)

g) Weltlinie ruhendes Objekt: festes x für alle Werte von ct.
Weltlinie Licht: Diagonale $x = \pm ct$.





(Je **0,5 Punkte** für Abbildung mit korrekter Achsenbeschriftung und qualitativ korrekter Weltlinie)

Aufgabe 2: Skischanze (6,5 Punkte)

Diese Aufgabe behandelt zum größten Teil den freien Fall.

a) Da nur der Höhenunterschied zwischen dem Startpunkt und dem Absprungpunkt der Schanze angegeben ist, ist die einzige Möglichkeit die Anwendung von Energieerhaltung. Da die Bewegung im Schwerefeld der Erde stattfindet, ist die Summe aus kinetischer Energie der Springerin und ihrer potentiellen Energie im Schwerefeld erhalten. (**0.5 Punkte**)

   Es gilt also:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

b) Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems der Einfachheit halber in den Absprungpunkt. Wir betrachten dann die x-Richtung und die y-Richtung unabhängig.

   x-Richtung: Keine externe Kraft wirkt entlang dieser Richtung, also

$$m \cdot a_x = 0 \Rightarrow v_x(t) = b \Rightarrow x(t) = b \cdot t + c\,, \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

   wobei b und c Integrationskonstanten sind. Die Anfangsbedingungen sind:

$$v_x(0) \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow b = v_0$$
$$x(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c = 0$$

   (**0.5 Punkte**) (Nur wenn beide Anfangsbedingungen da sind.)

   y-Richtung: Entgegen der y-Achse wirkt die Schwerkraft, also

$$m \cdot a_y = -mg \Rightarrow v_y(t) = -g \cdot t + d \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + d \cdot t + e\,, \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

   wobei d und e Integrationskonstanten sind. Die Anfangsbedingungen sind:

$$v_y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow d = 0$$
$$y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow e = 0$$

   (**0.5 Punkte**) (Nur wenn beide Anfangsbedingungen da sind.)

   Es ergibt sich also final:

$$x(t) = v_0 \cdot t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

c) Die gesuchten Abstände in Abhängigkeit der Zeit sind durch die vorherige Teilaufgabe bekannt, abzüglich eines zusätzlichen Minuszeichens für den Abstand in vertikaler bzw. y-Richtung, also $d_x = v_0 \cdot t$ und $d_y = \frac{1}{2}gt^2$. Um den vertikalen Abstand als Funktion des horizontalen Abstand auszudrücken, kann der horizontale Abstand nach t aufgelöst werden und dann diese Beziehung in den vertikalen Abstand eingesetzt werden.

$$t(x) = \frac{x}{v_0} \text{ bzw. } t(d_x) = \frac{d_x}{v_0}$$
$$\Rightarrow d_y = \frac{1}{2}g\left(\frac{d_x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}d_x^2 \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

   Nun kann noch das Ergebnis für v_0 aus Aufgabenteil a) eingesetzt werden, also

$$d_y = \frac{1}{4h}d_x^2\,. \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

d) Um den Landepunkt zu bestimmen, muss der Schnittpunkt der „Wurfparabel“ mit der Landebahn bestimmt werden. Die Landebahn wird durch die Funktion

$$y_L(x) = -x$$

(**0.5 Punkte**) (auch wenn funktionelle Form der Geradengleichung nur verwendet, aber nicht explizit hingeschrieben wurde)

beschrieben, da der Winkel zur Vertikalen 45° beträgt und die Landebahn den Ursprung des gewählten Koordinatensystems schneidet. Für den Schnittpunkt (x_1, y_1) gilt also:

$$\begin{aligned} & y_L(x_1) = y(x_1) \\ \Leftrightarrow & -x_1 = -\frac{1}{4h}x_1^2 \\ \Rightarrow & x_1 = 4h \qquad (\textbf{0.5 Punkte}) \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} d_{x,1} &= 4h \\ d_{y,1} &= \frac{1}{4h}(4h)^2 = 4h \end{aligned}$$

(**0.5 Punkte**)

e) Verkürzen: *Luftreibung* (quasi schon gegeben). (**0.5 Punkte**)

Verlängern: *Auftrieb* (durch Ski und Körper der Springerin als „Tragflügel“). (**0.5 Punkte**)

Aufgabe 3: Kran (5 Punkte)

Diese Aufgabe behandelt Statik in Form von Drehmomentgleichgewichten und Kraftgleichgewichten.

a) Damit der Kran stabil bleibt, muss das Seil ein Drehmoment auf den horizontalen Kranbalken aufbringen um das Drehmoment aufgrund der getragenen Masse auszugleichen. Das Gesamtdrehmoment auf den horizontalen Kranbalken muss also verschwinden. (**0.5 Punkte**)

Der Betrag des Drehmoments durch die getragene Masse ist gegeben durch

$$M_m = a \cdot F_m = amg\,. \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Hierbei ist $F_m = mg$ der Betrag der Gewichtskraft der getragenen Masse. Dies entspricht gerade „Kraft mal Hebelarm“ unter einem Winkel von 90°.

Der Betrag des Drehmoments durch die aufgebrachte Kraft des Seils kann analog berechnet werden, jedoch unter Berücksichtigung des Winkels α.

$$M_S = b \cdot F_S \cdot |\sin(90° - \alpha)| \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Hierbei ist F_S der Betrag der Seilkraft und $90° - \alpha$ der Winkel zwischen der Seilkraft und dem Hebelarm. Um den rechten Winkel aus dem Sinus zu entfernen, kann man den Hinweis verwenden, also

$$M_S = b \cdot F_S \cdot \cos(\alpha)$$

für $0° < \alpha < 90°$. Nun muss $M_S = M_m$ gelten, also

$$\begin{aligned} b \cdot F_S \cdot \cos(\alpha) &= amg \\ \Leftrightarrow F_S &= \frac{amg}{b\cos(\alpha)}\,. \qquad (\textbf{0.5 Punkte}) \end{aligned}$$

b) Damit der horizontale Kranbalken sich nicht bewegt, muss auch die Gesamtkraft auf diesen verschwinden. (**0.5 Punkte**) Es lässt sich schon anhand der Skizze erkennen, dass die Seilkraft eine horizontale Komponente hat, welche durch die Befestigung am Kreuzungspunkt ausgeglichen werden muss. Weiterhin bleibt auch eine Kraft aus der Differenz der Gewichtskraft der Masse m und der vertikalen Komponente der Seilkraft übrig, welche durch den Kreuzungspunkt getragen werden muss. Es gilt also

$$\vec{F}_{\text{ges}} = \vec{F}_S + \vec{F}_m + \vec{F}_K \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Wir betrachten die Richtungskomponenten unabhängig.

x-Richtung:

Es gilt für die x-Komponente der Seilkraft $F_{S,x} = -F_S \sin(\alpha)$ („$-$“, weil die Kraft in die entgegengesetzte Richtung der x-Achse wirkt) und für die x-Komponente der Gewichtskraft $F_{m,x} = 0$. Damit ergibt sich:

$$F_{K,x} = F_S \sin(\alpha) = \frac{amg}{b\cos(\alpha)} \sin(\alpha) = \frac{amg}{b} \tan(\alpha) \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

y-Richtung:

Es gilt für die y-Komponente der Seilkraft $F_{S,y} = -F_S \cos(\alpha)$ („$-$“, weil die Kraft in die entgegengesetzte Richtung der y-Achse wirkt) und für die y-Komponente der Gewichtskraft $F_{m,y} = -mg$. Damit ergibt sich:

$$F_{K,y} = F_S \cos(\alpha) + mg = \frac{amg}{b} + mg = mg\left(1 + \frac{a}{b}\right) \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Damit gilt:

$$\vec{F}_K = mg\left(\frac{a}{b}\tan(\alpha), 1 + \frac{a}{b}\right)$$

c) Aufgrund des dritten Newtonschen Gesetzes wirkt auf das Gegengewicht die Kraft $-\vec{F}_S$. Das bedeutet, dass die Gewichtskraft des Gegengewichtes betragsmäßig mindestens genauso groß sein muss wie $F_{S,y}$ (um eine Bewegung in y-Richtung zu verhindern) und die Haftreibungskraft betragsmäßig mindestens genauso groß wie $F_{S,x}$ (um eine Bewegung in x-Richtung zu verhindern). (**0.5 Punkte**)

Wir betrachten die Richtungen wieder unabhängig.

y-Richtung:

Die Gewichtskraft des Gegengewichts ist insgesamt $-3Mg$ und damit muss gelten

$$3Mg \geq |F_{S,y}| = \frac{amg}{b} \Leftrightarrow M \geq \frac{am}{3b} \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

x-Richtung:

Der Betrag der Haftreibungskraft is $F_H = \mu_H \cdot |\vec{F}_N| = \mu_H \cdot (3Mg - \frac{amg}{b}) \geq 0$ (wegen x-Bedingung), wobei $|\vec{F}_N|$ der Betrag der Normalkraft ist und damit

$$\mu_H\left(3Mg - \frac{amg}{b}\right) \geq |F_{S,x}| = \frac{amg}{b}\tan(\alpha)$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{am}{3b}\left(1 + \frac{\tan(\alpha)}{\mu_H}\right) \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Die dominierende Bedingung ist also die Bedingung aufgrund der Haftreibung, da $\tan(\alpha)/\mu_H > 0$ für $0° < \alpha < 90°$ und $\mu_H > 0$.

Aufgabe 4: Druck und Hydraulik (3,5 Punkte)

Der Betrag der Gewichtskraft auf eine Fläche am unteren Ende eines Flüssigkeitsvolumens mit Grundfläche A, Höhe h und Dichte ρ ist gegeben durch

$$mg = \rho V g = \rho g h A \,. \qquad (\mathbf{0{,}5\ Punkte})$$

Es muss ein gemeinsames Niveau (N) am unteren Ende des Volumens V_1 definiert werden, um ein Kräftegleichgewicht innerhalb des Wasservolumens aufzustellen. (**0,5 Punkte**)
Die Gewichtskräfte der Flüssigkeitssäulen in den beiden Schenkeln oberhalb des gemeinsamen Niveaus halten sich das Gleichgewicht (**0,5 Punkte**) , siehe die Abbildung unten.
Es gilt also:

$$\rho_{\text{Öl}} g h_1 A = \rho_{\text{Öl}} g h_2 A + \rho_{\text{W}} g h_3 A$$

Da die Querschnittsflächen von beiden Schenkeln gleich sind, gilt dies auch für den Schweredruck:

$$\rho_{\text{Öl}} g h_1 = \rho_{\text{Öl}} g h_2 + \rho_{\text{W}} g h_3 \qquad (\mathbf{0{,}5\ Punkte})$$

(Division obiger Gleichung durch A)
Die Höhen h_1 und h_2 sind implizit über die Volumina und die Grundfläche bekannt. Die einzige Unbekannte ist h_3, welche mit dem gesuchten h in Verbindung gebracht werden kann. Dabei ist

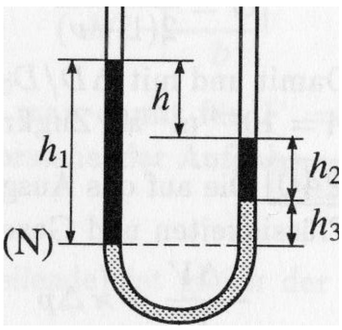
$$h_3 = h_1 - h_2 - h = \frac{V_1 - V_2}{A} - h \,, \qquad (\mathbf{0{,}5\ Punkte})$$

womit, unter Zuhilfenahme der Gleichung für den Schweredruck, folgt:

$$h = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \frac{V_1 - V_2}{A} \,. \qquad (\mathbf{0{,}5\ Punkte})$$

Einsetzen der Zahlen ergibt

$$h = \left(1 - \frac{0{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}\right) \frac{50\,\mathrm{cm}^3 - 10\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{cm}^2} = 0{,}2 \cdot 40\,\mathrm{cm} = 8\,\mathrm{cm} \,. \qquad (\mathbf{0{,}5\ Punkte})$$



Aufgabe 5: Torsionspendel (7 Punkte)

Diese Aufgabe behandelt einen schwingenden starren Körper. Die Rotationsachse verläuft dabei durch den Schwerpunkt der Scheibe.

a) Für das Trägheitsmoment I gilt im allgemeinen Fall

$$I = \int_M \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2$$

mit dem infinitesimalen Massenelement $\mathrm{d}m(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ und dem Quadrat des senkrechten Abstands zur Rotationsachse $(\vec{r}_\perp)^2$. Die Rotationsachse geht durch den Mittelpunkt der Scheibe und verläuft parallel zum Faden. Im vorliegenden zweidimensionalen Fall ergibt sich

$$I = \int_A \sigma(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \mathrm{d}A$$

mit der Flächendichte σ und dem infinitesimalen Flächenelement $\mathrm{d}A$. Da die Scheibe eine homogene und isotrope Massendichte hat, gilt

$$\sigma = \frac{m}{\pi R^2}\,.$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten gilt $\mathrm{d}A(r,\theta) = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ sowie $(\vec{r}_\perp(r,\theta))^2 = r^2$ mit dem radialen Abstand r und dem Polarwinkel θ und damit folgt

$$I = \frac{m}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{2m}{R^2}\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2\,. \qquad (\textbf{1 Punkt})$$

b) Im Folgenden kann das Dreh-Äquivalent zum zweiten Newtonschen Gesetz verwendet werden

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

mit dem Drehmoment $\vec{M}$, dem Trägheitsmoment I und dem Vektor der Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$.

Anstatt das Trägheitsmoment direkt einzusetzen, wird zuerst mit I weitergerechnet. Es ist natürlich möglich mit dreidimensionalen Vektoren zu rechnen, allerdings reicht es auch mit skalaren Größen zu rechnen, da das Drehmoment auf die Scheibe parallel zum Faden (entlang der Vertikalen) steht. Wie in der Aufgabenstellung gegeben, gilt

$$M(t) = -D\theta(t)\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Mit obiger Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned} &-D\theta(t) = I\dot{\omega}(t) = I\ddot{\theta}(t) \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{D}{I}\theta(t) = 0 \qquad (\textbf{0,5 Punkte}) \end{aligned}$$

c) Die Bewegungsgleichung entspricht der DGL eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ω_0 (**0,5 Punkte**) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$$

Damit kann für die Periode direkt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2}{2D}} = \pi R\sqrt{\frac{2m}{D}} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

berechnet werden.

d) Die DGL kann mit den gegebenen Anfangsbedingungen gelöst werden, oder mit etwas Nachdenken kommt man auf

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I}} \cdot t\right) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{2D}{mR^2}} \cdot t\right). \qquad (\textbf{1 Punkt})$$

Der Cosinus ist zu verwenden, da der Winkel zum Zeitpunkt $t = 0$ durch θ_0 gegeben ist und die Scheibe ruht.

e) Die Energie des Pendels ist gegeben durch die Summe aus Rotationsenergie $\frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$ (**0,5 Punkte**) und potentieller Energie $\frac{1}{2} D\theta^2 + \text{const.}$ (**0,5 Punkte**) . Wir setzen die Konstante in der potentiellen Energie gleich Null. Es gilt also:

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} D\theta^2$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt

$$E = \frac{1}{2} D\theta_0^2$$

und die Energie ist erhalten, da nur konservative Kräfte wirken (**0,5 Punkte**) . Beim Auslenkungszustand $\theta = \theta_0/2$ gilt also:

$$E = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2_{\theta_0/2} + \frac{1}{2} D(\theta_0/2)^2 = \frac{1}{2} D\theta_0^2 \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Auflösen ergibt

$$|\dot{\theta}_{\theta_0/2}| = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{3D}{I}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_0\omega_0 = \theta_0\sqrt{\frac{3D}{2mR^2}} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Alternativer Lösungsweg unter Verwendung der Hinweise:

Es gilt z.B. $\theta = \theta_0/2$, wenn der Zeitpunkt ausgewählt wird, bei welchem der Cosinus 1/2 ergibt. (**0,5 Punkte**)

Dies ist der Fall, wenn das komplette Argument im Cosinus $\pi/3$ ist , siehe Hinweise. Die Winkelgeschwindigkeit des Pendels ist

$$\dot{\theta}(t) = -\theta_0\omega_0 \sin(\omega_0 t). \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Wenn das Argument im Cosinus beim gewählten Zeitpunkt $\pi/3$ ist, muss das Argument auch im Sinus $\pi/3$ sein (**0,5 Punkte**) und damit ergibt sich dann als Geschwindigkeit

$$|\dot{\theta}_{\theta_0/2}| = |-\theta_0\omega_0 \sin(1/3)| = \frac{\sqrt{3}}{2}\theta_0\omega_0 = \frac{\theta_0}{2}\sqrt{\frac{3D}{I}} = \theta_0\sqrt{\frac{3D}{2mR^2}}. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Weitere (**0,5 Punkte**) für das clevere Nutzen der Hinweise.

Aufgabe 6: Tigers letzter Schlag: Das große Finale (6 Punkte)

Da der Ball gleitet, muss keine Eigenrotation berücksichtigt werden. Die Bewegung des Balles kann allein mit Hilfe des Schwerpunkts des Balles beschrieben werden. Wir verwenden im Folgenden, wie in der Aufgabenstellung verlangt, ein Bezugssystem dessen Ursprung im Mittelpunkt des Lochs ist und welches sich mit der gedachten Kreisbewegung des Balles mitrotiert.

a) Auf den Golfball wirkt die Gewichtskraft (**0,5 Punkte**) und die Zentrifugalkraft (**0,5 Punkte**) , da ein rotierendes Bezugssystem Scheinkräfte/Trägheitskräfte hervorruft.

b) Die drei Szenarien unterschieden sich durch die Größenverhältnisse von Zentrifugalkraft und Gewichtskraft bzw. deren hervorgerufenen Drehmomente bzgl. des Auflagepunkts an der Lochkante.

   i) Hier ruht der Ball. Die Drehmomente durch Zentrifugalkraft und Gewichtskraft gleichen sich also aus. (**0,5 Punkte**)

   ii) Wenn der Ball in das Loch hinein fällt, muss eine nicht-verschwindende Kraft wirken, welche ein Drehmoment verursacht, sodass es zu einer Rotation um die Lochkante „nach unten“ kommt. Hier muss also das Drehmoment durch die Gewichtskraft größer sein. (**0,5 Punkte**)

   iii) Beim „Lip out“ muss eine nicht-verschwindende Kraft wirken, welche ein Drehmoment verursacht, sodass es zu einer Rotation um die Lochkante „nach oben“ kommt. Hier muss also das Drehmoment durch die Zentrifugalkraft größer sein. (**0,5 Punkte**)

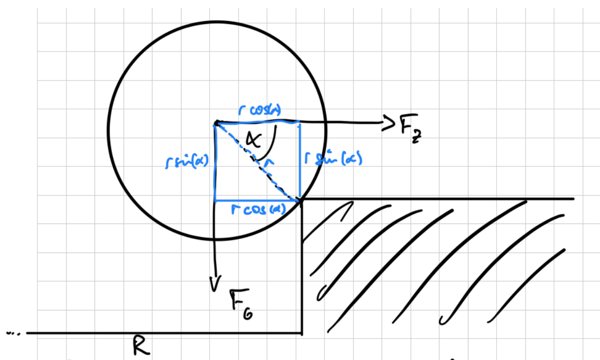
c) Im Folgenden wird nur mit Beträgen gerechnet. Das Drehmoment durch die Gewichtskraft ist

$$M_G = F_{G,\perp} r = mg\cos(\alpha) r\,, \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

wobei $F_{G,\perp}$ die senkrechte Projektion der Gewichtskraft auf den Hebelarm ist. Das Drehmoment durch die Zentrifugalkraft ist

$$M_Z = F_{Z,\perp} r = F_Z \sin(\alpha) r = m\omega^2 b \cdot \sin(\alpha) r\,, \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

wobei $F_{Z,\perp}$ die senkrechte Projektion der Zentrifugalkraft auf den Hebelarm ist und $F_Z = m\omega^2 b$ (**0,5 Punkte**) die Zentrifugalkraft beim Radius b.



Es kommt zu einem Lip out, wenn $M_Z > M_G$ ist und der Ball fällt in das Loch, wenn $M_Z < M_G$. Daher ist die charakteristische Winkelgeschwindigkeit ω' gerade im Grenzfall gegeben:

$$M_Z = M_G$$
$$mgr\cos(\alpha) = m\omega'^2 b \cdot r\sin(\alpha)$$

und es folgt nach Umstellen für ω'

$$\omega'^2 = \frac{g}{\tan(\alpha) b} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Nach Verwendung von $v' = \omega' b$ ergibt sich für die charakteristische Geschwindigkeit des Golfballes in Abhängigkeit von b und α:

$$v' = \sqrt{\frac{gb}{\tan(\alpha)}} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

d) Um dies ausrechnen zu können, müssen wir noch b in Abhängigkeit der gegebenen Parameter ausdrücken. Es ist $b = R - r\cos(\alpha)$, siehe Skizze oben, und damit

$$v' = \sqrt{\frac{g}{\tan(\alpha)}(R - r\cos(\alpha))}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Das Einsetzen der gegebenen Größen ergibt

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{\frac{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1} \cdot \left(5\,\mathrm{cm} - \sqrt{2}\,\mathrm{cm}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\ &= \sqrt{10 \cdot 0{,}04}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &= \sqrt{0{,}4}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 0{,}6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte}) \end{aligned}$$