Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) WS 21/22

Klausur 2

Musterlösung

Lösung Aufgabe 1: Quickies (7 Punkte)

a) Die absolute Unsicherheit des Mittelwerts ist gegeben durch die Stichprobenstandardabweichung dividiert durch die Wurzel der Zahl der Messwerte N:

$$\sigma_{\langle\hat{x}\rangle} = \frac{\sigma_{\hat{x}}}{\sqrt{N}}.$$

Mit $\sigma_{\hat{x}} = 2$ und $N = 100$ ergibt sich als absolute Unsicherheit $\sigma_{\langle\hat{x}\rangle} = 0{,}2$. (**0,5 Punkte**) (auch, wenn nur der Zusammmenhang korrekt, aber der Zahlenwert falsch ist)

Die relative Unsicherheit ist definiert als die absolute Unsicherheit dividiert durch den Mittelwert, also

$$\frac{\sigma_{\langle\hat{x}\rangle}}{\hat{x}} = 0{,}02 = 2\%.$$

(**0,5 Punkte**) (auch, wenn nur der Zusammmenhang korrekt, aber der Zahlenwert falsch ist)

Erläuterung: Die Stichprobenstandardabweichung $\sigma_{\hat{x}}$ ist ein Maß für die Streuung der Messwerte um den Mittelwert. Der Mittelwert ist genauer bekannt als dieser Wert, und zwar umso genauer, je mehr Messwerte verwendet wurden, proportional zur Wurzel der Zahl der Messwerte.

b) Der Vektor der Winkelgeschwindigkeitkeit $\vec{\omega}$ zeigt in negative z-Richtung. Der Vektor steht dabei senkrecht auf Ortsvektor $\vec{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, und es gilt: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Das negative Vorzeichen für eine Bewegung im Uhrzeigersinn ergibt sich aus dem Vektorprodukt oder der Rechte-Faust-Regel. (**0,5 Punkte**) (für korrekte Richtung *inklusive* Vorzeichen, in Worten oder als Skizze)

c) Der Begriff „träge Masse“ bezieht sich auf die Eigenschaft, dass die Beschleunigung eines Objekts aufgrund einer äußeren Kraft umgekehrt proportional zur dessen Masse ist. Das Objekt wird also umso weniger durch eine äußere Kraft beschleunigt, umso größer seine Masse ist. (**0,5 Punkte**) Das ergibt sich direkt aus dem zweiten newtonschen Gesetz in der Form

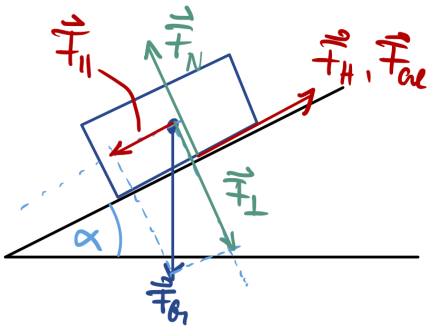
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Die „schwere Masse“ bezieht sich auf die Anziehung zwischen zwei Massen m_1 und m_2 aufgrund der Gravitationskraft zwischen ihnen: (**0,5 Punkte**)

$$\vec{F}_{G,m_2\to m_1} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

(Exakte Formel für Gravitationsgesetz nicht benötigt, aber Zusammenhang, dass Gravitationskraft von der „schweren“ Masse abhängt, sollte erkennbar sein.)

d) Da das Objekt mit *konstanter* Geschwindigkeit gleitet, muss die Summe der auf das Objekt einwirkenden Kraftkomponenten parallel zur schiefen Ebene Null ergeben. Entlang der schiefen Ebene nach unten wirkt die Hangabtriebskraft $\vec{F}_{\parallel}$, die Komponente der Gewichtskraft $\vec{F}_G = m\vec{g}$ parallel zur schiefen Ebene. In die entgegengesetzte Richtung wirkt die Gleitreibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{Gl}}$. Diese ist proportional zum Betrag der Normalkraft $\vec{F}_N$, und es gilt $|\vec{F}_{\mathrm{Gl}}| = \mu_G |\vec{F}_N|$ mit dem Gleitreibungskoeffizienten μ_G. Die Normalkraft ist die Gegenkraft zur Komponente der Gewichtskraft senkrecht zur schiefen Ebene $\vec{F}_{\perp}$ und wird durch die Auflagefläche aufgebracht. Diese Kräfte sind in folgender Skizze eingezeichnet (aus Kapitel 3.3, Vorlesung 9):



(**1 Punkt**) (jeweils 0,5 Punkte für das korrekte Einzeichnen in der Skizze und Nennung der Namen „Hangabtriebskraft“ und „Gleitreibungskraft“)

e) Im allgemeinen ist der Schwerpunkt eines Systems aus N Massepunkten definiert als die mit den jeweiligen Massen m_i gewichtete Vektorsumme der Ortsvektoren, normiert auf die Gesamtmasse $M = \sum m_i$

$$\vec{R}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i .$$

Im eindimensionalen Fall und mit zwei Massen reduziert sich diese Gleichung auf

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2) .$$

Einsetzen der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte ergibt

$$x_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{4m} \cdot (m \cdot 1\,\mathrm{cm} + 3m \cdot 5\,\mathrm{cm}) = 4\,\mathrm{cm}.$$

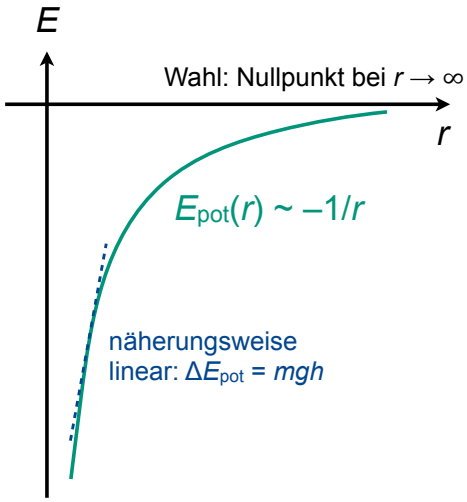
(**0,5 Punkte**) (für korrekte Gleichung und/oder korrekte Zahlenwerte, auch wenn die Einheiten fehlen)

f) Die gesuchte potenzielle Energie (auch: Gravitationspotenzial) entspricht der Arbeit, die geleistet werden muss, um die Probemasse, die sich im Abstand r von der Masse M befindet, bis ins Unendliche zu bringen:

$$E_{\mathrm{pot}} = -\frac{G \cdot m \cdot M}{r}. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Die Wahl des Nullpunkts der potenziellen Energie bei $r = \infty$ ist dabei eine Konvention. (Punkte auch wenn eine Konstante mitgeführt wird)

Als Lösung ist auch eine Skizze gefordert (aus Kapitel 3.5, Vorlesung 12):



(**0,5 Punkte**) (für Kurve mit qualitativ korrektem Verlauf proportional zu $-1/r$)

g) Formulierung des archimedischen Prinzips aus der Vorlesung:
„Die Auftriebskraft eines Objekts in einem Medium ist gleich der Gewichtskraft des vom Objekt verdrängten Mediums.“ (**0,5 Punkte**)

h) Harmonische Wellen sind Lösungen der Wellengleichung durch Sinus- und Kosinusfunktionen (bzw. die komplexe Exponentialfunktion), z. B. in einer Dimension

$$A(z,t) = A_0 \sin(kz - \omega t + \varphi) \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

mit der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω. (auch wenn φ nicht berücksichtigt wurde oder $A_0 = 1$ oder cos verwendet wurde)

Diese Funktion löst die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2},$$

wenn folgender Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl besteht („Dispersionsrelation“):

$$\omega = c \cdot k.$$

Dabei ist c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. (**0,5 Punkte**) (für korrekten Zusammenhang und korrekte Bezeichnung von c)

i) Energie E, Impuls $\vec{p}$ und Masse m eines Objekts hängen in der speziellen Relativitätstheorie über die Energie-Impuls-Beziehung zusammen:

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\vec{p}|^2 = (mc)^2 \quad \text{bzw.} \quad E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + (mc^2)^2$$

(**0,5 Punkte**) (für alle möglichen Varianten dieser Beziehung, auch wenn Faktoren c nicht ganz stimmen) (In der Vorlesung stand in der Gleichung $|\vec{p}|$ anstatt $|\vec{p}|^2$ (mittlerweile korrigiert). Wenn das Quadrat fehlt, wird der halbe Punkt ebenfalls vergeben.)

Lösung Aufgabe 2: Leiter (5 Punkte)

Diese Aufgabe wurde in der Vorlesung vorgerechnet und behandelt das statische Gleichgewicht von Kräften und Drehmomenten. Um die Kraft $\vec{F}_B$ zu berechnen, müssen zwei Bedingungen verwendet werden. Die Gesamtkraft auf die Leiter muss verschwinden **(0,5 Punkte)** und das gesamte Drehmoment auf die Leiter muss verschwinden **(0,5 Punkte)** . (Wenn die beiden Aussagen in erkennbarer (!) Weise als mathematische Relationen/Gleichungen dastehen, gibt es ebenso die Punkte.)
Wir beginnen zunächst mit der Gesamtkraft:
Die Gesamtkraft setzt sich zusammen aus der gesuchten Kraft $\vec{F}_B = (F_{B,x}, F_{B,y})$, der Kraft, die die Wand auf die Leiter ausübt, $\vec{F}_W = (F_W, 0)$ **(0,5 Punkte)** , und die Gewichtskraft der Leiter, die auf ihren Schwerpunkt einwirkt, $\vec{F}_S = (0, -mg)$ **(0,5 Punkte)** , mit der Masse m der Leiter. Es wurde verwendet, dass keine Reibung zwischen Wand und Leiter besteht, weshalb keine Kraftkomponente in y-Richtung durch die Wand aufgebracht werden kann. Diese Gesamtkraft muss verschwinden, also in x- und y-Komponenten geschrieben

$$F_{B,x} + F_W = 0 \Leftrightarrow F_{B,x} = -F_W \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$
$$F_{B,y} - mg = 0 \Leftrightarrow F_{B,y} = mg\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Die y-Komponente der gesuchten Kraft ist also schon bestimmt durch die verschwindende Gesamtkraft. Die x-Komponente ist noch unbekannt, da die Kraft der Wand nicht bekannt ist. Diese kann durch die Verwendung der Bedingung für das Gesamtdrehmoment erhalten werden.
Wir betrachten im Folgenden Drehmomente um eine Drehachse, welche senkrecht zur Papierebene steht und durch den Auflagepunkt der Leiter auf dem Boden verläuft. Als erstes betrachten wir den Betrag des Drehmoments, welches durch die Masse der Leiter entsteht. Dieses können wir berechnen, indem wir das Drehmoment hervorgerufen durch den Schwerpunkt der Leiter berechnen. Der Betrag dieses Drehmoments ist gegeben durch

$$|\vec{M}_S| = |l/2 \cdot mg \cdot \sin(\pi/2 - \alpha)| = |l/2 \cdot mg \cdot \cos(\alpha)| = \frac{d}{2} \cdot mg\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Hier wurde verwendet, dass $\cos(\alpha) = d/l$ mit α dem Winkel zwischen Boden und Leiter. Als nächstes berechnen wir das Drehmoment durch die Kraft der Wand auf die Leiter bzw. dessen Betrag, also

$$|\vec{M}_W| = |l \cdot F_W \cdot \sin(\alpha)| = |F_W| \dot{h}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Hier wurde verwendet, dass $\sin(\alpha) = h/l$. Damit das Gesamtdrehmoment verschwindet, müssen die beiden entgegengesetzten Drehmomente betragsmäßig gleich sein, also

$$|\vec{M}_W| = |\vec{M}_S| \Leftrightarrow |F_W| \dot{h} = \frac{d}{2} \cdot mg \Leftrightarrow |F_W| = \frac{dmg}{2h}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Aus den Betrachtungen bzgl. der Gesamtkraft ist schon bekannt, dass die x-Komponenten der Kraft der Wand und des Bodens betragsmäßig gleich sein müssen. Anhand der Zeichnung lässt sich einfach erkennen, dass die x-Komponente der Kraft des Bodens im gewählten Koordinatensystem positiv sein muss, also

$$\vec{F}_B = mg \left(\frac{d}{2h}, 1 \right)\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

(Gibt es natürlich auch, wenn das nicht als Vektor, sondern als Komponenten aufgeschrieben wurde.)

Lösung Aufgabe 3: Hydrostatik (4 Punkte)

a) Der Flüssigkeitsdruck p auf eine Fläche wird unter Berücksichtigung der Masse bzw. des Eigengewichts der Flüssigkeit — unabängig von deren Größe und Neigung — ausschließlich durch die Niveauhöhe h der darüberliegenden Flüssigkeit bestimmt. **(0,5 Punkte)** (Diesen halben Punkt gibt es, wenn das entweder ausgeschrieben wird, oder wenn das anhand einer angegebenen Formel erkennbar ist.)

Somit ist der Druck auf

$$\begin{aligned} A_1 &: \quad p_1 = \rho g h_1 = 45\,000\,\tfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 45\,\mathrm{kPa} \qquad \textbf{(0,5 Punkte)} \\ A_2 &: \quad p_2 = \rho g h_2 = \rho g (h_1 - 2\,\mathrm{m}) = 25\,\mathrm{kPa}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)} \end{aligned}$$

(Die halben Punkte gibt es für die korrekten Zahlen.)

b) Die auf eine Seitenfläche wirkende Kraft nimmt nach oben hin linear mit h ab, da der Druck linear mit h abnimmt. Für ein infinitesimales Flächenstück mit Fläche dA in der Höhe h (über dem Boden) ist die Kraft

$$\mathrm{d}F(h) = p(h) \cdot \mathrm{d}A = p(h) \cdot a \cdot \mathrm{d}h = \rho g (h_1 - h) \cdot a \cdot \mathrm{d}h\,, \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

wobei a die Grundseite des Flächenstücks und $\mathrm{d}h$ der Höhenunterschied zwischen dem oberen und unteren Ende des Flächenstücks ist. Die Gesamtkraft ergibt sich dann zu

$$F_{\mathrm{ges}} = \int_0^{h_1 - h_2} \mathrm{d}F(h) = \rho g a \int_0^{h_1 - h_2} (h_1 - h)\mathrm{d}h\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Nun substituieren wir $h' = h_1 - h$ und damit

$$F_{\mathrm{ges}} = \rho g a \int_{h_2}^{h_1} h' \mathrm{d}h' = \rho g a \frac{h_1^2 - h_2^2}{2} = \rho g a \frac{(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)}{2} = 140\,\mathrm{kN}\,. \qquad \textbf{(1 Punkt)}$$

(Halber Punkt für Ausdruck und halber Punkt für Zahl)

Diese Zeile erhält man schneller, wenn man startend vom oberen Ende des würfelförmigen Quaders bis zum Boden die Kräfte/Drücke integriert.

Der mittlere Druck ist dann

$$\begin{aligned} p_3 = F_{\mathrm{ges}}/A &= \rho g a \frac{(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)}{2A} = \rho g a \frac{(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)}{2a(h_1 - h_2)} \\ &= \rho g \frac{h_1 + h_2}{2} = 35\,\mathrm{kPa}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)} \end{aligned}$$

(Halben Punkt für die Zahl.)

Maßgeblich für die Kraft auf eine vertikale Fläche ist also der bei der mittleren Höhe der Fläche wirkende Druck, also der Druck auf den Flächenschwerpunkt.

(Falls das Wissen, dass der Druck auf Höhe des Flächenschwerpunkts die Kraft bzw. den mittleren Druck bestimmt, verwendet wird um diese Aufgabe zu lösen, gibt es die Punkte nur bei entsprechender Begründung. Einfaches Hinschreiben gibt dann keine oder je nach Umstand reduzierte Punkte.)

Lösung Aufgabe 4: Curling (6 Punkte)

a) Die Geschwindigkeit v_0 lässt sich über die beim Abstoßvorgang verrichtete Arbeit berechnen. Mit der Kraft und der Strecke, über welche diese gewirkt hat, kann die verrichtete Arbeit berechnet werden. Diese Arbeit wandelt sich in kinetische Energie des Systems aus Spielerin und Scheibe um. **(0,5 Punkte)**

Die Arbeit ist in diesem Fall (konstante Kraft) gegeben durch

$$W = F \cdot s = 360\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 180\,\mathrm{N\,m}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Es gilt dann für die kinetische Energie und die Geschwindigkeit

$$E_{\mathrm{kin},0} = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 = W \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\cdot W}{M+m}} = \sqrt{\frac{360\,\mathrm{N\,m}}{90\,\mathrm{kg}}} = 2\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

b) Es gibt hier vermeintlich zwei Möglichkeiten die Geschwindigkeit v_2 zu berechnen, Energie- und Impulserhaltung. (diese folgt direkt aus den newtonschen Gesetzen und ist in Stoßvorgängen *immer* erfüllt) **(0,5 Punkte)** (Falls direkt nur Impulserhaltung für die Geschwindigkeit verwendet wird, gibt es diesen halben Punkt nur, wenn begründet wird warum die kinematische Energieerhaltung nicht verwendet wird.)

Hier wird zunächst allgemein mit $v_1 = \alpha v_0$ gerechnet. Aus der Energieerhaltung würde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(M+m)v_0^2 &= \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\
(M+m)v_0^2 - \alpha^2 M v_0^2 &= mv_2^2 \\
v_0^2\left(\left(1-\alpha^2\right)M + m\right) &= mv_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = v_0^2\left(1 + \left(1-\alpha^2\right)\frac{M}{m}\right)
\end{aligned}$$

folgen. **(0,5 Punkte)** (Falls direkt nur Impulserhaltung für die Geschwindigkeit verwendet wird, gibt es diesen halben Punkt nur, wenn begründet wird warum die kinematische Energieerhaltung nicht verwendet wird.)

Aus der Impulserhaltung folgt jedoch

$$\begin{aligned}
(M+m)v_0 &= Mv_1 + mv_2 \\
(M+m)v_0 - \alpha M v_0 &= mv_2 \\
v_0\left((1-\alpha)M + m\right) &= mv_2 \Leftrightarrow v_2 = v_0\left(1 + (1-\alpha)\frac{M}{m}\right)\,.
\end{aligned}$$

(0,5 Punkte)

In unserem Fall gilt $\alpha = 6/7$. Beide Gleichungen dann gleichzeitig zu erfüllen, ist nicht möglich. Deshalb muss „innere“ Energie umgewandelt werden. Der Schubs entspricht also einem unelastischen Stoß. **(0,5 Punkte)** (Den halben Punkt gibt es, wenn erkannt und begründet wird, dass der Stoß unelastisch ist.)

Beim Impuls gibt es keine analoge Umwandlung, er ist auch bei unelastischen Stößen erhalten, deshalb wird die Geschwindigkeit v_2 durch die Impulserhaltung bestimmt **(0,5 Punkte)** und es gilt im vorliegenden Fall

$$v_2 = v_0\left(1 + \frac{1}{7}\frac{M}{m}\right) = v_0\left(1 + \frac{1}{7}\frac{70\,\mathrm{kg}}{20\,\mathrm{kg}}\right) = \frac{3}{2}v_0 = 3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

(Es gibt keine Punkte, wenn nur die Energieerhaltung ohne Berücksichtigung der inneren Energie verwendet wird. Dieser Ansatz verletzt die Impulserhaltung und ist damit nicht richtig. Falls beide Erhaltungssätze ohne Erklärung, welche Geschwindigkeit die korrekte Geschwindigkeit ist, da stehen, gibt es ebenso keine Punkte.)

(Nicht verlangt: Die richtige Energiebilanz ist deshalb

$$\frac{1}{2}(M+m)v_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \Delta U\,,$$

wobei ΔU die Änderung der inneren Energie repräsentiert. Wenn die Geschwindigkeit aus der Impulserhaltung verwendet wird um ΔU zu berechnen wird

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{M}{49}\left(1+\frac{M}{m}\right)v_0^2$$

erhalten. Dies bedeutet, dass innere Energie abgezogen wurde, um die kinetische Energie des Endzustands aufbringen zu können. Dies kann z.B. Energie sein, welche durch die Stoßbewegung der Spielerin umgesetzt wird.)

c) Der Zusammenstoß der beiden Steine kann als zweidimensionaler Stoß zweier gleicher Massen beschrieben werden. Im Folgenden beschreibt $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeit des sich vor dem Stoß bewegenden Steins, $\vec{v}_f$ dessen Geschwindigkeit nach dem Stoß und $\vec{v}_f'$ die Geschwindigkeit des initial ruhenden Steins nach dem Stoß. Bei diesem elastischen Stoß gilt wieder Energieerhaltung und Impulserhaltung.

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 &= \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_f'^2\\ \Leftrightarrow \vec{v}_i^2 &= \vec{v}_f^2 + \vec{v}_f'^2 \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}\end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned}m\vec{v}_i &= m\vec{v}_f + m\vec{v}_f'\\ \Leftrightarrow \vec{v}_i &= \vec{v}_f + \vec{v}_f' \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}\end{aligned}$$

Aus der Gleichung der Impulserhaltung folgt, dass die Geschwindigkeitsvektoren der Steine ein Dreieck bilden. Aus der Energieerhaltung folgt, dass die Seiten dieses Dreiecks den Satz des Pythagoras erfüllen und damit ein rechter Winkel zwischen $\vec{v}_f$ und $\vec{v}_f'$ vorliegen muss.

Dies lässt sich auch explizit zeigen, durch Quadrieren der Impulserhaltungsgleichung.

$$\vec{v}_i^2 = (\vec{v}_f + \vec{v}_f')^2 = \vec{v}_f^2 + \vec{v}_f'^2 + 2\vec{v}_f\cdot\vec{v}_f'$$

Wird dies mit der Energieerhaltungsgleichung verglichen, so folgt sofort, dass entweder einer der beiden Geschwindigkeitsvektoren im Endzustand verschwinden muss (ist hier nicht gesucht, da explizit in der Aufgabenstellung steht, dass sich beide Steine bewegen sollen) oder dass

$$\vec{v}_f\cdot\vec{v}_f' = 0\,.$$

Dies bedeutet jedoch ebenso, dass $\vec{v}_f \perp \vec{v}_f'$. **(0,5 Punkte)** (Den halben Punkt gibt es entweder für die obige Erklärung mit dem Dreieck oder für das explizite Zeigen.)

Lösung Aufgabe 5: Golf (5,5 Punkte)

a) Wir suchen die Anfangsgeschwindigkeit v_0, bei welcher am Ende der Bahn, also nach der zurückgelegten Distanz s, die Geschwindigkeit des Balles immer noch größer ist als Null, der Ball demnach also in das Loch fallen kann. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Geschwindigkeit des Balles als Funktion der zurückgelegten Distanz s auszudrücken $v(s)$.

Damit der Ball hinein fallen kann, muss dann $v(s) > 0$ gelten. **(0,5 Punkte)** (Gibt es auch, wenn das anhand der Rechnung erkennbar ist.)

Gegeben ist $v(t) = v_0 - \mu g t$ mit der gesuchten Anfangsgeschwindigkeit v_0 durch den ausgeführten Schlag. Wir suchen die Funktion $v(s)$, um aus dieser v_0 zu ermitteln. Durch Umstellen von $v(t)$ erhalten wir erstmal einen Ausdruck für t:

$$t = \frac{v_0 - v(t)}{\mu g}.$$

Um v_0 zu bekommen, integrieren wir $v(t)$ nach t um $s(t)$ zu erhalten:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\mu g t^2 \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

und setzen danach den Ausdruck für t ein um s mit v in Verbindung zu bringen:

$$s\left(v(t)\right) = v_0 \frac{v_0 - v(t)}{\mu g} - \frac{1}{2}\mu g \left(\frac{v_0 - v(t)}{\mu g}\right)^2.$$

Nach Umstellen folgt:

$$s\mu g = \frac{v_0^2}{2} - \frac{v^2}{2}$$

und daraus:

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 - 2s\mu g} \equiv v_f. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

Wir sehen also, dass mindestens eine Geschwindigkeit von $v_0 > \sqrt{2s\mu g}$ benötigt wird, damit $v(s) > 0$ und der Ball über die Lochkante kommt. **(0,5 Punkte)**

Das ist die gesuchte untere Geschwindigkeitsschranke. Die Geschwindigkeit v_f bezeichnet die (Rest-)Geschwindigkeit, die der Ball an der Lochkante noch besitzt. (Die Punkte in diesem Aufgabenteil gibt es natürlich auch, wenn auf anderem korrektem Wege das richtige Ergebnis hergeleitet wird.)

b) i) Der Schwerpunkt des Balles muss sich unterhalb oder mindestens in der Ebene befinden, auf der der Ball rollt. **(0,5 Punkte)** (Gibt es, wenn das irgendwie erkennbar ist.)

ii) Wir wählen das Koordinatensystem am oberen Ende der linken Lochkante. Die z-Richtung zeigt dabei nach oben, die y-Achse nach rechts. Dann haben wir in z-Richtung $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + r$ **(0,5 Punkte)** einen freien Fall und in die y-Richtung eine gleichförmig-geradlinige Bewegung $y(t) = v_f t$ **(0,5 Punkte)**.

Wir erhalten die Bahnkurve $z(y)$, indem wir $t = y(t)/v_f$ in $z(t)$ einsetzen, und bekommen:

$$z(y) = -\frac{1}{2} g \frac{y^2}{v_f^2} + r. \qquad \textbf{(0,5 Punkte)}$$

(Man kann den Ursprung des KS natürlich auch in der Höhe des Schwerpunkts über der linken Lochkante wählen und dann verschwindet r in den obigen Ausdrücken für $z(t)$.)

iii) Die Bedingungen sind, dass der Ball bzw. der Schwerpunkt mindestens die Strecke $|\Delta z| \geq r$ fallen muss, während er die Strecke $\Delta y = 2R - r$ zurücklegt. Mathematisch muss im gewählten Koordinatensystem

$$z(2R - r) \leq 0$$

gelten. (**0,5 Punkte**) (Entweder für wörtliche Erklärung oder Gleichung. Wenn der Ursprung des KS in der Höhe des Schwerpunkts über der linken Lochkante gewählt wurde, gilt stattdessen $z(2R - r) \leq -r$)

iv) Setzen wir die Bedingungen ein, erhalten wir:

$$r \leq \frac{1}{2} g \frac{(2R - r)^2}{v_f^2}$$

und nach Umformen:

$$v_f \leq (2R - r) \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

Das erhaltene v_f eingesetzt in obige Gleichung führt auf das maximal erlaubte v_0 und damit die obere Schranke für v_0:

$$v_0 \leq \sqrt{2s\mu g + \frac{g\,(2R - r)^2}{2r}}$$

(**1 Punkt**)

Lösung Aufgabe 6: Metronom (6,5 Punkte)

Zunächst überlegen wir uns, welche Kräfte in diesem System wirken. Die zu betrachtenden Kräfte sind die Gewichtskraft $\vec{F}_M$ auf die Masse M und die Gewichtskraft $\vec{F}_m$ auf die Masse m. Da d_M fest ist und d_m nach Einstellung ebenso konstant ist, kann das System als starrer Körper betrachtet werden. Da die beiden Kräfte nicht am Aufhängepunkt dieses starren Körpers angreifen, wirken auf den Körper dementsprechend Drehmomente $\vec{D}_M$ und $\vec{D}_m$. (Um die Verwirrung mit den Buchstaben etwas einzugrenzen, werden Drehmomente hier mit dem Buchstaben D bezeichnet anstatt wie in der Vorlesung mit M.) Die Drehmomente hängen von den orthogonalen Abständen zur Drehachse d_M und d_m, den Gewichtskräften $\vec{F}_M$ und $\vec{F}_m$, sowie dem Winkel $\theta(t)$ ab.

a) In Worten: Damit es zu einer Schwingung mit $|\theta(t)| \leq \theta_0$ kommt, muss beim Auslenkungswinkel θ_0 das Drehmoment durch die Masse M (das Gegengewicht) betragsmäßig größer sein als das Drehmoment durch die Masse m.

   (Nicht geforderte Begründung: Die beiden Drehmomente wirken in entgegengesetzte Richtung. Das Drehmoment durch die Masse M führt zu einer Schwingung um den Winkel $\theta = 0$ herum. Im Gegensatz dazu führt das Drehmoment durch die Masse m zu einer Schwingung um den Winkel $\theta = \pi$, was einer Überschwingung entspräche. Dann würde man natürlich den Winkel zur Beschreibung anders wählen.)

   Mathematische Relation: $|\vec{D}_M| > |\vec{D}_m|$ (Es muss erkennbar sein, was die mathematische Relation ausdrücken soll, ansonsten keine Punkte.)

   (**0,5 Punkte**) (Eine Begründung nur über die Kräfte ist nicht ausreichend!)

b) Wie verlangt, wird $|\theta(t)| \leq \theta_0$ betrachtet, d.h. das Drehmoment durch die Masse M dominiert bzw. bestimmt die Drehrichtung:

   i) Durch Vergrößern von d_m vergrößert sich auch die Periodendauer der Schwingung. (**0,5 Punkte**)
   Begründung: Das Drehmoment durch die Masse m wirkt stets entgegengesetzt zum Drehmoment durch die Masse M. Das gesamte Drehmoment wirkt immer in die gleiche Richtung wie das Drehmoment der Masse M, da es sonst (wie in Aufgabenteil a) gezeigt/überlegt) nicht zu einer Schwingung mit $|\theta(t)| \leq \theta_0$ kommt. Das Drehmoment durch die Masse m verkleinert das Gesamtdrehmoment betragsmäßig umso mehr, je größer der Abstand d_m ist. Ein verkleinertes Gesamtdrehmoment bedingt eine verkleinerte Winkelbeschleunigung und damit eine längere Periodendauer. (**0,5 Punkte**)

   ii) Durch Verkleinerung der Masse m wird die Frequenz der Schwingung größer. (**0,5 Punkte**)
   Begründung: Durch Verkleinerung der Masse m wird das Drehmoment durch die Masse m kleiner. Durch Verkleinerung dieses Drehmoments wird das Gesamtdrehmoment betragsmäßig größer und damit die Winkelbeschleunigung größer. Dies resultiert in einer erhöhten Frequenz der Schwingung. (**0,5 Punkte**)

c) Die Bewegungsgleichung erhält man über das Drehäquivalent zum zweiten newtonschen Gesetz

$$I \cdot \ddot{\vec{\theta}}(t) = \vec{D}_{\text{ges}}\,, \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

   wobei hier $\vec{D}_{\text{ges}} = \vec{D}_M + \vec{D}_m$. Das Trägheitsmoment I lässt sich hier für punktförmige Massen sehr einfach berechnen als

$$I = m \cdot d_m^2 + M \cdot d_M^2. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

   Nun muss noch das Drehmoment $\vec{D}_{\text{ges}}$ berechnet werden. Es kann komplett formal gerechnet werden, sodass die Drehmomente als dreidimensionale Vektoren berechnet werden oder es

kann mit physikalischer Intuition auch eindimensional gerechnet werden. Hier wird der „eindimensionale“ Weg gezeigt. Aus der Abbildung und aus den vorherigen Aufgaben sollte klar geworden sein, dass die Drehmomente der beiden Massen entgegengesetzt zueinander wirken. Die Beträge der beiden Drehmomente ergeben sich zu

$$|\vec{D}_M| = |d_M \cdot Mg \cdot \sin(\theta(t))|$$
$$|\vec{D}_m| = |d_m \cdot mg \cdot \sin(\theta(t))|\,.$$

(**0,5 Punkte**) (Diesen halben Punkt gibt es für das Wissen, dass das Drehmoment vom Abstand zur Drehachse, der wirkenden Kraft und dem Winkel zwischen Hebelarm und Kraft abhängt. Wenn dieses Wissen erkennbar ist, als mathematischer Aufschrieb oder in Worten, gibt es diesen halben Punkt.)

Hiermit lässt sich direkt

$$I\ddot{\theta}(t) = -(d_M \cdot M - d_m \cdot m) \cdot g \cdot \sin(\theta(t))$$

aufstellen.

(Die Vorzeichen der Terme der Drehmomente müssen entweder formal hergeleitet oder explizit begründet werden um Punkte für den finalen Ausdruck zu erhalten, da dieser ja schon gegeben ist.) Der Term der Masse M ist bei positivem Winkel negativ und bei negativem Winkel positiv, erzeugt also eine *Rückstellung* um $\theta = 0$ und folgt damit der physikalischen Erwartung. (**0,5 Punkte**) Umgekehrt ist der Term der Masse m positiv bei positivem Winkel und negativ bei negativem Winkel, dieser bringt also *keine Rückstellung* bzgl. $\theta = 0$. Dies entspricht ebenso der physikalischen Erwartung. (**0,5 Punkte**)

Nach Umstellung folgt

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{(d_M \cdot M - d_m \cdot m)}{I} \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) = 0$$

und nach Einsetzen von I ergibt sich

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{d_M \cdot M - d_m \cdot m}{d_M^2 \cdot M + d_m^2 \cdot m}\right) \cdot g \cdot \sin(\theta(t)) = 0\,.$$

d) Unter der Annahme von $\theta_0 \ll 1$ gilt $\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$ und damit

$$\ddot{\theta}(t) + \left(\frac{d_M \cdot M - d_m \cdot m}{d_M^2 \cdot M + d_m^2 \cdot m}\right) \cdot g \cdot \theta(t) = 0\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Zu einer harmonischen Schwingung kommt es jedoch nur, wenn der Vorfaktor vor $\theta(t)$ größer ist als Null, also wenn

$$d_M \cdot M - d_m \cdot m > 0 \Leftrightarrow d_M \cdot M > d_m \cdot m \Leftrightarrow \frac{d_M}{d_m} > \frac{m}{M}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Damit gilt

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \cdot \theta(t) = 0 \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\left(\frac{d_M \cdot M - d_m \cdot m}{d_M^2 \cdot M + d_m^2 \cdot m}\right) \cdot g} \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

(Den halben Punkt gibt es für die Kreisfrequenz.)