Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) WS 24/25

Klausur 1

Musterlösung

Aufgabe 1: Kurzfragen (10 Punkte)

a) Der Ortsvektor eines Massepunkts in kartesischen Koordinaten (x, y) lautet $\vec{r} = (1, 1)$. Drücken Sie $\vec{r}$ in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) aus. Verwenden Sie dazu denselben Koordinatenursprung.

Antwort: Allgemein ist der Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten wie folgt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi\,. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\varphi &= \frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**) *(wenn die Gleichung nach r und φ bzw.* $\tan\varphi$ *aufgelöst wird)*

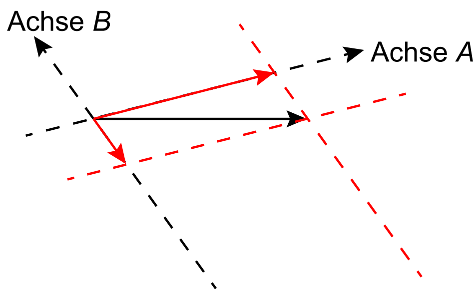
Eingesetzt für $x = 1$ und $y = 1$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2} \\ \tan\varphi &= 1 \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**) *Es gibt alternativ auch jeweils 0,5 Punkte für die korrekte Angabe der Werte für r und φ.*

b) Zerlegen Sie die Kraft $\vec{F}$ in der nachfolgenden Skizze grafisch in Komponenten entlang der Achsen A und B. Eine Zerlegung ohne Zuhilfenahme eines Lineals oder Geodreiecks ist ausreichend.

Antwort: Es soll grafisch ein Kräfteparallelogram konstruiert werden. Zunächst werden Hilfslinien parallel zu den Achsen durch die Spitze des Vektors $\vec{F}$ eingezeichnet. (**0,5 Punkte**) Die Komponenten in Richtung der Achsen sind dann die Vektoren vom Anfang des Vektors zum Schnittpunkt mit der Achse (**0,5 Punkte**) , wie in folgender Skizze gezeigt:



Beachten Sie: die Achsen A und B stehen nicht *senkrecht aufeinander. Aus diesem Grund sind Lösungen mit einem Lot auf die Achsen oder mit einer Projektion mittels Kosinus falsch.*

c) Ein Objekt der Masse m ruht auf einem Tisch an der Erdoberfläche. Welche äußere Kraft wirkt hauptsächlich auf das Objekt? Ignorieren Sie dabei Kräfte z. B. aufgrund des beschleunigten Bezugssystems oder der Atmosphäre. Warum führt diese Kraft nicht zu einer Beschleunigung des Objekts?

Antwort: Auf das Objekt wirkt die Kraft $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$ in Richtung Erdmittelpunkt aufgrund der Erdbeschleunigung. (**0,5 Punkte**) Aufgrund des dritten Newtonschen Gesetzes treten an der Grenzfläche zwischen Objekt und Tisch Kraft und Gegenkraft auf. Der Tisch bringt (durch elastische Verformung) die Normalkraft $\vec{F}_N$ auf, die entgegengesetzt gleich zu $\vec{F}_G$ ist. Dies verhindert eine Beschleunigung des Objekts durch die Gravitation. (**0,5 Punkte**) *(auch wenn Newton-3 nicht explizit erwähnt wird)*

d) Skizzieren Sie die potenzielle Energie E_{pot} eines Planeten im Gravitationsfeld der Sonne als Funktion seines radialen Abstands r von der Sonne.

Antwort: Die Gravitationskraft zwischen zwei Objekten hängt von ihren Massen m_i, ihrem Abstand $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ und der Gravitationskonstante G ab:

$$\vec{F}_G = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

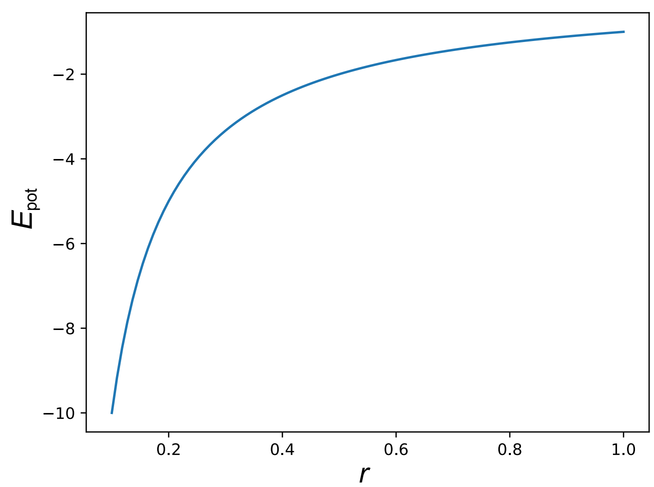
Wir betrachten dazu punktförmige Objekte, die Gravitationskraft innerhalb der Sonne muss also nicht berücksichtigt werden.

Die zugehörige potenzielle Energie ergibt sich durch Betrachtung der Arbeit, die notwendig ist, um ein Objekt aus dem Gravitationsfeld des anderen zu entfernen:

$$W = \int_0^\infty \vec{F}_G \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

Das ungebundene Objekt hat in dieser Definition eine positive potentielle Energie

Zur Lösung genügt folgende Skizze der hyperbolischen $-1/r$-Abhängigkeit (**0,5 Punkte**) *mit Achsenbeschriftung* (**0,5 Punkte**) *und beliebigem Nullpunkt der vertikalen Achse (E_{pot}). Die 0,5 Punkte werden auch vergeben, wenn die Gleichung korrekt mit der $-1/r$-Abhängigkeit vorhanden, aber die Skizze (leicht) falsch ist.*



e) Beschreiben Sie kurz in Worten (und ggf. Gleichungen) die Präzession eines Kreisels und ihre physikalische Ursache.

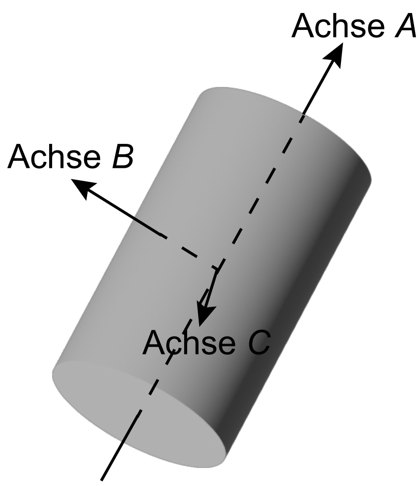
Antwort: Wirkt auf einen Kreisel ein externes Drehmoment $\vec{M}_{\text{ext}}$ (**0,5 Punkte**), so führt der Kreisel eine Ausweichbewegung durch, die die Drehachse des Kreisels ändert. Näherungsweise gilt:

$$\vec{M}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \approx \omega_P \times \vec{L}\,.$$

Die Ausweichbewegung geschieht also senkrecht zur externen Kraft. (**0,5 Punkte**) Dies führt zu einer Präzessionsbewegung mit der Präzessionsfrequenz ω_P.

f) In welche Richtungen verlaufen die drei Hauptträgheitsachsen eines geraden Kreiszylinders mit konstanter Dichte (siehe Skizze)? Zu welcher dieser Achsen gehört das kleinste Trägheitsmoment? Tragen Sie Ihre Lösung in die Skizze ein.

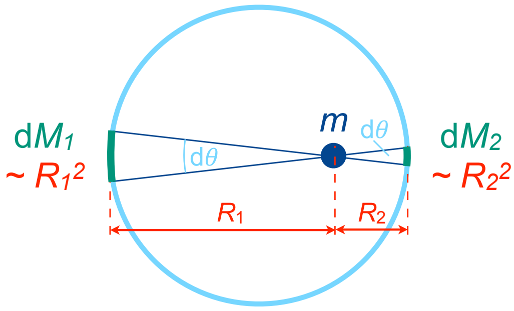
Antwort: Die Hauptträgheitsachsen eines Körpers entsprechen seinen Symmetrieachsen. Für eine homogenen Kreiszylinder ist die Achse mit dem kleinsten Trägheitsmoment (also der „wenigsten Masse weit außen“) die Achse durch den Schwerpunkt und den Mittelpunkt der beiden Deckel (Achse A in der Skizze). (**0,5 Punkte**) Die beiden anderen Achsen B und C verlaufen ebenfalls durch den Schwerpunkt und stehen senkrecht auf A und aufeinander. (**0,5 Punkte**) Sie besitzen dasselbe Trägheitsmoment.



g) Begründen Sie mithilfe einer kurzen Beschreibung, warum auf eine Testmasse m innerhalb einer Hohlkugel der Masse M, deren Mantel eine konstante Dichte besitzt, keine Gravitationskraft ausgeübt wird. Eine Skizze zur Illustration könnte dabei hilfreich sein.

Antwort: Die Gravitationskraft zweier gegenüberliegender Flächenelemente einer homogenen Hohlkugel kompensieren sich immer. (**0,5 Punkte**) Dabei wachsen die Flächenelemente mit dem Quadrat des Abstands von der Testmasse, während die Gravitationskraft gleichzeitig mit dem Quadrat des Abstands sinkt. (**0,5 Punkte**) *(für die in der Aufgabenstellung geforderte Begründung, nur das Stichwort „Kugelschalentheorem" ist nicht ausreichend)*

Eine Illustration könnte aussehen wie in Kapitel 5.3 der Vorlesung:



$$d\vec{F}_1 \sim \frac{m \cdot dM_1}{R_1^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

$$d\vec{F}_2 \sim -\frac{m \cdot dM_2}{R_2^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$$

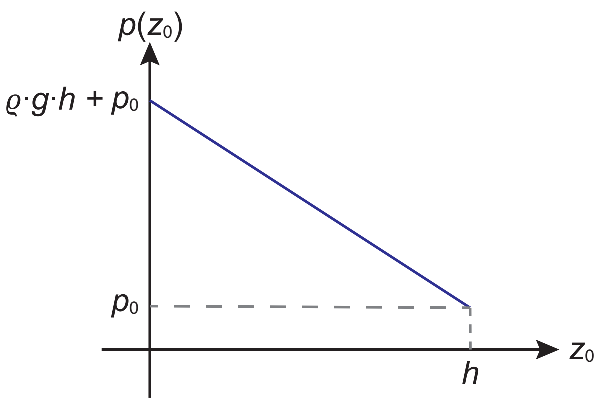
$$\Rightarrow \quad d\vec{F}_1 + d\vec{F}_2 = 0$$

h) In einem Tank auf der Erdoberfläche, der von $z = 0$ bis zur Höhe $z = h$ mit Wasser befüllt ist, befindet sich ein Objekt in der Höhe $0 < z_0 < h$, d. h. unterhalb der Wasseroberfläche. Skizzieren Sie den hydrostatischen Druck auf dieses Objekt als Funktion von z_0.

Antwort: Der hydrostatische Druck wird durch den Atmosphärendruck p_0 auf die Wasseroberfläche und den Druck der Wasserschichten oberhalb des Objekts $\varrho \cdot g \cdot (h - z_0)$ bestimmt:

$$p(z_0) = \varrho \cdot g \cdot (h - z_0) + p_0 \, .$$

Damit hängt er nur vom Abstand des Objekts zur Wasseroberfläche $h - z_0$ und dem Atmosphärendruck ab. Dies ist in folgender Skizze illustriert:



Korrekter Zusammenhang von p und z oder Skizze mit der abfallenden Funktion: (**0,5 Punkte**) . *Berücksichtigung des Atmosphärendrucks p_0:* (**0,5 Punkte**) .

Hinweis: Die Aufgabenstellung „Skizzieren Sie p als Funktion von z_0" zielt auf einen *Funktionsgraphen*, nicht auf ein Schwimmbecken.

i) Welches physikalische Phänomen wird durch die Funktion :

$$A(z,t) = A_0 \cdot f(z + ct)$$

beschrieben? In welche Richtung (Vorzeichen von z) breitet sich das Phänomen aus?

Antwort: Die Funktion $A(z,t)$ ist eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung und beschreibt eine Welle (**0,5 Punkte**) , die sich in negative z-Richtung ausbreitet. (**0,5 Punkte**) Dies ist z. B. daran zu erkennen, dass der Wert der Funktion bei $z = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ derselbe ist, wie bei $z = -ct_0$ zum Zeitpunkt $t = t_0$.

j) Für welche Werte von Δs^2 ist der quadratische Raumzeit-Abstand zwischen zwei Ereignissen

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

zeitartig? Dabei ist c^2 das Quadrat der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, $\Delta t^2 \equiv (t_2 - t_1)^2$ die quadratische Zeitdifferenz zwischen diesen Ereignissen und $\Delta x^2 \equiv (x_2 - x_1)^2$ ihre quadratische räumliche Differenz in einer Dimension. Können zwei Ereignisse in einem zeitartigen Abstand kausal zusammenhängen?

Antwort: Der Raumzeitabstand Δs^2 ist dann zeitartig, wenn der erste Summand, der den zeitlichen Abstand Δt beinhaltet, größer ist als der zweite Summand, der den räumlichen Abstand Δx beinhaltet, also $\Delta s^2 > 0$ (**0,5 Punkte**) . Zwei Ereignisse mit zeitartigen Abständen können kausal zusammenhängen, (**0,5 Punkte**) weil sie mit einer Geschwindigkeit von $v \leq c$ Informationen austauschen können.

Aufgabe 2: Neulich im Reitstall... (5 Punkte)

Ein Reiter legt einen Sattel der Masse $m_S = 10\,\text{kg}$ (inklusive Steigbügel) auf den Rücken eines Pferdes, vergisst aber, den Sattel mit einem Gurt um den Bauch des Pferdes zu befestigen. Der Haftreibungskoeffizient des Sattels auf dem Pferderücken beträgt $\mu_H = 0{,}6$. Verwenden Sie für die Erdbeschleunigung den Wert $g = 10\,\text{m/s}^2$.

a) Nehmen Sie an, dass der gesamte Sattel als Massepunkt am höchsten Punkt des Pferderückens aufliegt. Welche Kraft darf der Reiter beim Aufsteigen höchstens senkrecht nach unten auf einen der Steigbügel ausüben, damit der Sattel nicht verrutscht?

Antwort: Die Haftreibung des Sattels am Pferderücken ist (in dem Modell der Reibung, dass in der Vorlesung in Kapitel 3.3 besprochen wurde) gegeben durch die Normalkraft an der Grenzfläche zwischen Sattel und Pferd und den Haftreibungskoeffizienten. Die Kraft wirkt der Richtung der äußeren Kraft entgegen und ihr Betrag ist

$$F_R = \mu_H \cdot F_N\,.$$

(**0,5 Punkte**) Die Haftreibungskraft F_R ist dabei nur von der Normalkraft abhängig, aber nicht von der Auflagefläche des Sattels. In diesem Aufgabenteil wird der Sattel durch einen Massepunkt genähert, der am höchsten Punkt aufliegt. Damit kompensiert die Normalkraft an der Grenzfläche die gesamte Gewichtskraft des Sattels, betragsmäßig also $F_N = |\vec{F}_G| = m_S \cdot g$ (wobei der Vektor der Normalkraft nach oben zeigt). Damit haftet der Sattel am Pferderücken, wenn die externe Kraft kleiner ist als

$$F_R = \mu_h \cdot m_S \cdot g = 0,6 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = 60\,\text{N}\,.$$

(**0,5 Punkte**) Durch senkrechten Druck nach unten auf den Steigbügel darf also höchstens eine Kraft von 60 N ausgeübt werden, was einem Gewicht von 6 kg entspricht.

b) Nun übt der Reiter eine Kraft senkrecht nach unten auf einen der Steigbügel aus, die genauso groß ist, dass der Sattel mit einem konstanten Geschwindigkeitsbetrag von $v = 0{,}1\,\text{m/s}$ über den Pferderücken gleitet. Wie groß ist diese Kraft für einen Gleitreibungskoeffizienten von $\mu_G = 0{,}5$? Welche Verlustleistung entsteht durch die Gleitreibung?

Antwort: Ein konstanter Geschwindigkeitsbetrag v bedeutet nach dem zweiten Newtonschen Gesetz, dass die Summe der äußeren Kräfte auf den Sattel verschwinden muss, dass also ein Gleichgewicht zwischen Zugkraft F_Z und Gleitreibungskraft $F_{\text{Gl}} = \mu_G \cdot F_N$ besteht. Die Zugkraft entsteht durch Druck von oben auf den Steigbügel. Sie wirkt immer parallel zur Satteloberfläche. Damit muss betragsmäßig folgendes Kräftegleichgewicht gelten:

$$F_Z = F_R = \mu_G \cdot F_N = \mu_G \cdot m_S \cdot g = 0,5 \cdot 10\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = 50\,\text{N}\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Die Verlustleistung entspricht der Arbeit pro Zeiteinheit, die gegen die Reibung aufgebracht werden muss: $P = \Delta W/\Delta t$ bzw. differenziell $P = \mathrm{d}W/\mathrm{d}t$. Die Arbeit ist das Wegintegral der Reibungskraft. Da Kraft und Weg hier immer (anti)parallel sind, ergibt sich die Arbeit für eine Verschiebung des Sattels um Δs entlang des Pferderückens zu

$$\Delta W = F_R \cdot \Delta s = \mu_G \cdot m_S \cdot g \cdot \Delta s\,.$$

(**0,5 Punkte**) Die Leistung ist damit

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = F_R \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mu_G \cdot m_S \cdot g \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mu_G \cdot m_S \cdot g \cdot v = 50\,\mathrm{N} \cdot 0{,}1\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5\,\mathrm{W}\,,$$

(**0,5 Punkte**) wobei verwendet wurde, dass $\Delta s/\Delta t$ dem Geschwindigkeitsbetrag v entspricht. *Die Punkte werden auch erreicht, wenn die Leistung direkt mit $P = F \cdot v$ angesetzt wird.*

c) Nehmen Sie nun an, dass der Querschnitt des Pferderückens durch einen Halbkreis mit dem Radius $r = 50\,\mathrm{cm}$ angenähert werden kann, auf dem der Sattel (ebenfalls ein Halbkreis) aufliegt, siehe Skizze. Nehmen Sie weiterhin an, dass die Masse des Sattels homogen auf dem Halbkreis verteilt ist und dass die Steigbügel masselos sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen die maximale Kraft, die der Reiter auf den Steigbügel ausüben darf, bevor der Sattel verrutscht, um einen Faktor $2/\pi$ kleiner ist als in Teilaufgabe a).

Antwort: Die Näherung des Sattels als Punktmasse, die senkrecht auf den Pferderücken drückt aus Aufgabenteil a), soll in diesem Aufgabenteil durch ein realistischeres Modell ersetzt werden, in dem der Sattel als homogene Massenverteilung auf den Pferderücken drückt. Dadurch sind Gewichtskraft und Normalkraft nicht mehr parallel, sondern hängen von der Position auf dem Pferderücken ab. An den Seiten stehen sie sogar senkrecht aufeinander, so dass die Normalkraft – und damit die Reibung – verschwindet. Die Form des Pferderückens im Querschnitt wird dabei durch einen Halbkreis angenähert. In diesem Modell kann der Sattel entlang des Kreisbogens in infinitesimale Segmente der Masse $\mathrm{d}m_S$ zerlegt werden. Diese Masse ist aufgrund der homogenen Massenverteilung durch eine konstante (Linien- oder Flächen-) Dichte λ und die Bogenlänge $\mathrm{d}s$ gegeben:

$$\mathrm{d}m_S = \lambda \cdot \mathrm{d}s\,.$$

Die Gewichtskraft des Segments ist dann betragsmäßig gegeben durch

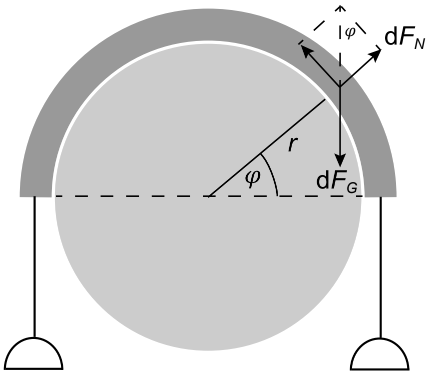
$$\mathrm{d}F_G = \mathrm{d}m_S \cdot g\,.$$

(**0,5 Punkte**) Die Gesamtmasse ergibt sich dann durch Integration von $\mathrm{d}m_S$ über den Halbkreis. Dabei bietet es sich an, in Polarkoordinaten zu rechnen und den Bogen $\mathrm{d}s$ über den Radius des Kreises r und den Winkel φ zu beschreiben, der für einen Halbkreis Werte von 0 bis π einnimmt:

$$m_s = \int \mathrm{d}m_S = \int_0^{\pi} \lambda \cdot r \cdot \mathrm{d}\varphi = \pi \cdot \lambda \cdot r\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Nun muss noch der Anteil der Gewichtskraft identifiziert werden, der durch die Normalkraft kompensiert wird. Oben auf dem Pferderücken ($\varphi = \pi/2$) wird die gesamte Gewichtskraft kompensiert, links und rechts ($\varphi = 0, \pi$) wird die Gewichtskraft gar nicht kompensiert. Allgemein ist der Anteil proportional zu $\sin\varphi$, was sich auch direkt aus der Geometrie ergibt:



$$\mathrm{d}F_N = \mathrm{d}F_G \cdot \sin\varphi\,.$$

(**0,5 Punkte**) Damit ergibt sich für die gesamte Normalkraft

$$F_N = \int \mathrm{d}F_N = \int_0^\pi \lambda \cdot r \cdot g \cdot \sin\varphi \cdot \mathrm{d}\varphi = \lambda \cdot r \cdot g \cdot [-\cos\varphi]_0^\pi = 2 \cdot \lambda \cdot r \cdot g$$

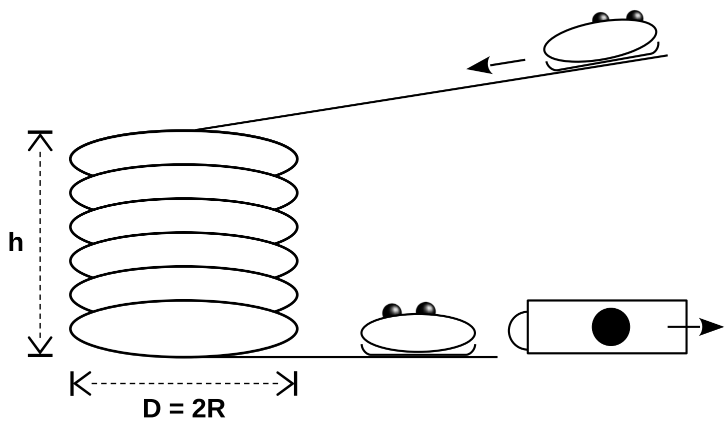
(**0,5 Punkte**) Wenn jetzt obiger Ausdruck für die Gesamtmasse eingesetzt wird, ergibt sich

$$F_N = 2 \cdot \frac{\pi \cdot \lambda \cdot r}{\pi} \cdot g = \frac{2}{\pi} \cdot m_S \cdot g\,.$$

(**0,5 Punkte**) Im Vergleich zum Modell aus Aufgabenteil a) ist die Reibungskraft $F_R = \mu_H \cdot F_N$ im realistischeren Modell also um einen Faktor $2/\pi < 1$ kleiner. Der physikalische Grund dafür ist, dass nicht die gesamte Masse des Sattels zur Normalkraft beiträgt.

Aufgabe 3: Bobbahn (4 Punkte)

Für die nächste Wintersaison im Bobfahren wird von zwei Testfahrerinnen im Zweierbob mit einem Gesamtgewicht von $m = 300\,\mathrm{kg}$ (inklusive der Bobfahrerinnen) ein neues Bahnelement erprobt. Die Testbahn beginnt mit einer geraden Strecke, auf der die Testfahrerinnen den Zweierbob in $t_1 = 4\,\mathrm{s}$ auf eine Geschwindigkeit von $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ beschleunigen. Mit dieser Geschwindigkeit fährt der Bob ein in einen spiralförmig, gleichmäßig abfallenden Eiskanal, der über sechs Schleifen mit Radius $R = 40\,\mathrm{m}$ insgesamt $h = 60\,\mathrm{m}$ an Höhe verliert, siehe Skizze.



a) Mit welcher Geschwindigkeit und nach welcher Zeit innerhalb der Spiralbahn kommt der Bob aus dieser wieder heraus?

Antwort: Auf der gleichmäßig abfallenden Spiralbahn beschleunigt der reibungsfrei gleitende Zweierbob und verliert dabei $h = 60\,\mathrm{m}$ an Höhe und damit an potentieller Energie. Der Verlust an potentieller Energie wird in kinetische umgesetzt, so dass aus

$$E_{1,\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = E_{2,\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

für die Geschwindigkeit am Ende der Spirale gilt:

$$\begin{aligned} v_1^2 + 2gh &= v_2^2 \\ \Leftrightarrow v_2 &= \sqrt{v_1^2 + 2gh} = 40\,\mathrm{m/s}\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**)

Die zurückgelegte Strecke s_2 innerhalb der Spirale unter Vernachlässigung des leichten Gefälles beträgt: ($\pi \approx {}^{25}/_{8}$ gemäß Aufgabenstellung!)

$$s_2 = 6 \cdot 2\pi R \approx 6 \cdot 2 \cdot \frac{25}{8} \cdot 40\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Damit ergibt sich für die Fahrtzeit t_2 innerhalb der Spirale:

$$\begin{aligned} s_2 &= v_1 t_2 + \frac{1}{2}\frac{\Delta v}{t_2} t_2^2 = \left(v_1 + \frac{v_2 - v_1}{2}\right) t_2 = \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) t_2 \\ \Leftrightarrow t_2 &= \frac{2 s_2}{v_1 + v_2} = \frac{2 \cdot 1500}{60} \mathrm{s} = 50\,\mathrm{s}\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**)

Wer hier abkürzt und begründetermaßen(!) gleich mit dem Mittelwert der Geschwindigkeiten arbeitet, soll ebenfalls Punkte bekommen.

b) Wie groß, in Vielfachen der Schwerkraft ausgedrückt, sind die Trägheitskräfte zu Beginn und zu Ende der Spiralbahn, die auf die Bobfahrerinnen einwirken?

Antwort:

Die auf die Fahrerinnen nach außen wirkende Trägheitskraft ist die Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$. Auf einer Kreisbahn mit Radius R gilt $\omega = |\vec{\omega}| = v/R$ und damit $F_Z = mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R}$. Diese Größe ist ins Verhältnis zu setzen zur Schwerkraft $F_G = mg$, wobei sich die jeweiligen Massen herauskürzen. Mit den Werten aus dieser Aufgabe ergibt sich damit:

$$F_{Z,1} = m\frac{v_1^2}{R} \Rightarrow \frac{F_{Z,1}}{F_G} = \frac{v_1^2}{gR} = 1 \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

$$F_{Z,2} = m\frac{v_2^2}{R} \Rightarrow \frac{F_{Z,2}}{F_G} = \frac{v_2^2}{gR} = 4 \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Wer die Austrittsgeschwindigkeit im ersten Teil nicht oder nicht richtig ermitteln konnte, erhält trotzdem den zweiten halben Punkt, sofern das falsche oder symbolische Ergebnis (v_2) in die richtige Formel eingesetzt wurde.

c) Am Ziel der Abwärtsspirale ist nicht genug Platz, um den Bob regulär vollständig abbremsen zu können. Daher fährt der Bob unmittelbar bei der Ausfahrt aus der Spirale auf einen beweglichen Prellbock auf, der diesen Bob auf einer horizontalen Strecke von $s_3 = 40\,\mathrm{m}$ auf null abbremst.

Mit wieviel g werden die Bobfahrerinnen hierbei abgebremst? Wie lange dauerte die gesamte Abfahrt vom am Start stehenden Bob bis zur vollständigen Bremsung des Bobs?

Antwort: Die Abbremsung von v_2 auf null erfolgt gleichmäßig über eine Strecke von $s_3 = 40\,\mathrm{m}$. Die Bremszeit errechnet sich damit zu

$$s_3 = \frac{\Delta v}{2 \cdot t_3} t_3^2 = \frac{1}{2}\Delta v\, t_3 \Leftrightarrow t_3 = \frac{2 s_3}{\Delta v} = 2\,\mathrm{s}.$$

Die Beschleunigung ist somit:

$$a_3 = \frac{\Delta v}{t_3} = -20\,\mathrm{m/s^2} = -2g\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Die Dauer der gesamten Abfahrt ergibt sich aus den Angaben und den vorherigen Zwischenergebnissen zu:

$$t_{\text{ges}} = (4 + 50 + 2)\text{s} = 56\,\text{s}\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Auch hier werden Punkte vergeben, wenn mit einem symbolischen oder falschen Ergebnis aus dem ersten Teil richtig weitergearbeitet wurde.

d) Die Differenz der kinetischen Energie des auslaufenden Bobs abzüglich derer des auslaufenden Prellbocks ist:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}m_P v_P^2 = \frac{300 \cdot 1600}{2}\,\text{J} - \frac{1200 \cdot 100}{2}\,\text{J} = 24 \cdot 10^4\,\text{J} - 6 \cdot 10^4\,\text{J} = 18 \cdot 10^4\,\text{J} = 180\,\text{kJ}\,.$$

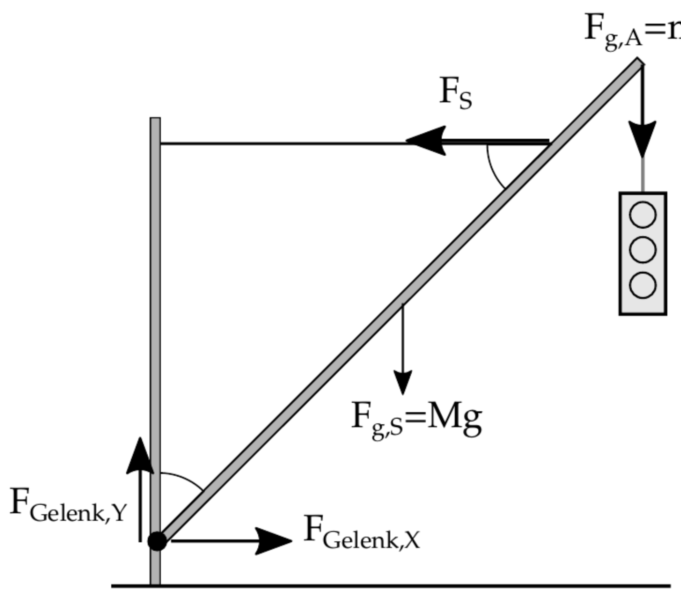
Es handelt sich also um einen inelastischen Stoß, bei dem $^3/_4 = 75\%$ der kinetischen Energie „verloren“ gehen. (**0,5 Punkte**)

Aufgabe 4: Ampelstatik (6 Punkte)

Eine Stange der Länge $l = 5\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ und Masse $M = 24\,\mathrm{kg}$ ist mit einem Gelenk an einem Mast angebracht, siehe Skizze. In einer Höhe $h = 4\,\mathrm{m}$ über dem Gelenk ist am Mast ein masseloses Drahtseil gespannt, das so mit der Stange verbunden ist, dass diese einen Winkel von $\theta = 45^\circ$ mit sowohl dem Mast als auch dem Drahtseil einnimmt. Das Seil hat somit einen rechten Winkel zum Mast. Am äußersten Ende der Stange hängt eine Ampel der Masse $m = 12\,\mathrm{kg}$.

a) Skizzieren und benennen Sie die Kräfte, welche auf die Stange wirken.

Antwort: Für die vollständige Skizze mit eingezeichneten und benannten Kräften: (**1 Punkt**)



b) Ermitteln Sie die Zugkraft in dem Drahtseil und die horizontalen und vertikalen Kraftkomponenten, die von dem Gelenk auf die Stange ausgeübt werden. Überlegen Sie sich dazu zunächst, welche Gleichgewichtsbedingungen in einer statischen Anordnung gelten müssen.

Antwort: Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Gelenk liegt und die y-Achse nach oben zeigt. Wir stellen zunächst die Drehmomentengleichung und Kraftgleichungen auf. Im statischen Fall müssen sich alle Kräfte und Drehmomente ausgleichen. (**1 Punkt**)
Für Drehmomente gilt allgemein:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,.$$

Für die Beträge der Drehmomente hier gilt dann:

$$\sum M = \frac{l}{2} Mg\cos\theta + lmg\cos\theta - F_S h = 0\,.$$

(**1 Punkt**)

Damit erhalten wir direkt die Seilkraft F_S als

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{\frac{l}{2}Mg\cos\theta + lmg\cos\theta}{h} = \frac{lg\cos\theta}{h}\left(\frac{M}{2} + m\right) \\ &= \frac{5\sqrt{2}\mathrm{m}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\cdot\cos(45^\circ)}{4\,\mathrm{m}}\left(\frac{1}{2}24\,\mathrm{kg} + 12\,\mathrm{kg}\right) \\ &= 300\,\mathrm{N}\,. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**)

Die Kräfte am Gelenk werden in ihre x- und y-Komponenten zerlegt:

$$\sum F_x = 0 = F_{\mathrm{Gelenk,X}} - F_S$$

(**0,5 Punkte**)

und

$$\sum F_y = 0 = F_{\mathrm{Gelenk,Y}} - Mg - mg$$

(**0,5 Punkte**)

wobei die x-Komponente der Zugkraft auf das Seil entspricht:

$$F_{\mathrm{Gelenk,X}} = F_S = 300\,\mathrm{N}$$

(**0,5 Punkte**)

und sich für die y-Komponente ergibt:

$$F_{\mathrm{Gelenk,Y}} = Mg + mg = 36\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 360\,\mathrm{N}\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 5: Torsionspendel (4 Punkte)

Gegeben sei eine homogene und isotrope, runde Stange mit der Masse m, der Länge L und vernachlässigbarer Dicke. Die Stange ist an ihrem Mittelpunkt über einen Faden an der Decke aufgehängt. Durch Torsion des Fadens kann sich die horizontal verlaufende Stange um die vertikale Achse drehen. Der Aufbau ist in der Skizze unterhalb gezeigt.

Zuerst befinde sich die Stange in ihrem Ruhezustand. Dann wird die Stange so angestoßen, dass sie zum Zeitpunkt $t = 0$ ihre maximale Winkelgeschwindigkeit ω_{max} erreicht. Dadurch beginnt die Stange aufgrund der Rückstellkraft des Fadens zu schwingen. Das zugehörige Rückstelldrehmoment des Fadens ist proportional zum Winkel der Auslenkung mit der Proportionalitätskonstante D, dem „Direktionsmoment". Für die Beschreibung der Bewegung der Stange in Abhängigkeit von der Zeit t wird im Folgenden der Winkel $\theta(t)$ verwendet, welcher die Abweichung von der Ruhelage repräsentiert.

a) Leiten Sie das Trägheitsmoment der Stange her bezüglich einer Rotationsachse, welche senkrecht zur Stange steht und durch deren Mittelpunkt verläuft.

Antwort: Diese Aufgabe behandelt einen schwingenden starren Körper in Form einer Stange. Die Rotationsachse verläuft dabei durch den Schwerpunkt der Stange.

Für das Trägheitsmoment I gilt im allgemeinen Fall

$$I = \int_M \mathrm{d}m(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2$$

mit dem infinitesimalen Massenelement $\mathrm{d}m(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ und dem Quadrat des senkrechten Abstands zur Rotationsachse $(\vec{r}_\perp)^2$. Die Rotationsachse geht durch den Mittelpunkt der Stange und verläuft parallel zum Faden. Im vorliegenden eindimensionalen Fall ergibt sich

$$I = \int_L \lambda(\vec{r})(\vec{r}_\perp)^2 \mathrm{d}L$$

mit der Liniendichte λ und dem infinitesimalen Linienelement $\mathrm{d}L$. Da die Stange eine homogene und isotrope Massendichte hat, gilt

$$\lambda = \frac{m}{L}\,.$$

Damit folgt

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \lambda l^2 \mathrm{d}l = \frac{\lambda}{3} l^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{12} L^3 = \frac{m}{12} L^2\,.$$

(**1 Punkt**)

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für den Winkel $\theta(t)$ durch

$$\ddot{\theta} + \frac{D}{I}\theta = 0$$

gegeben ist, wobei I das Trägheitsmoment der Stange aus dem vorherigen Aufgabenteil ist.

Antwort: Im Folgenden kann das Dreh-Äquivalent zum zweiten Newtonschen Gesetz verwendet werden

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}$$

(**0,5 Punkte**)

mit dem Drehmomentvektor $\vec{M}$, dem Trägheitsmoment I und dem Vektor der Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$. Anstatt das Trägheitsmoment direkt einzusetzen, wird zuerst mit I weitergerechnet. Es ist natürlich möglich, mit dreidimensionalen Vektoren zu rechnen, allerdings reicht es auch mit skalaren Größen zu rechnen, da das Drehmoment auf die Stange parallel zum Faden (entlang der Vertikalen) steht. Wie in der Aufgabenstellung gegeben, gilt

$$M(t) = -D\theta(t)\,.$$

Mit obiger Gleichung gilt dann:

$$\begin{aligned} -D\theta(t) = I\dot{\omega}(t) &= I\ddot{\theta}(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta}(t) + \frac{D}{I}\theta(t) &= 0\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**)

c) Geben Sie einen Ausdruck für die Periodendauer T der Torsionsschwingung an.

Antwort: Die Bewegungsgleichung entspricht der Differenzialgleichung (DGL) eines harmonischen Oszillators mit der Eigenfrequenz ω_0:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $\omega_0^2 = D/I$. Damit kann für die Periode direkt

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\omega_0^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL^2}{12D}} = \pi L\sqrt{\frac{m}{3D}}$$

berechnet werden. (**1 Punkt**)

Wer hier symbolisch mit I weiter gerechnet hat, bekommt trotzdem volle Punktzahl.

d) Geben Sie unter Verwendung der oben angegebenen Anfangsbedingung für $\theta(t)$ und $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ die Lösung der Bewegungsgleichung für den Winkel $\theta(t)$ an.

Antwort: Die DGL kann mit den gegebenen Anfangsbedingungen gelöst werden, oder mit etwas Nachdenken kommt man auf

$$\theta(t) = A\sin(\omega_0 t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{D}{I}}t\right) = A\sin\left(\sqrt{\frac{12D}{mL^2}}t\right)\,.$$

(**0,5 Punkte**) *Wer hier symbolisch mit I weiter gerechnet hat, bekommt trotzdem volle Punktzahl.*

Der Sinus ist zu verwenden, da zum Zeitpunkt $t = 0$ die Winkelgeschwindigkeit maximal sein soll und dies gemäß

$$\omega(t) = \dot{\theta}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

hier gerade gegeben ist mit

$$\omega_{\max} = A\omega_0 \, .$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 6: Venturi-Rohr (7 Punkte)

Die Abbildung zeigt ein großes Rohr, durch das Luft mit einer Dichte von $\rho = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ von links nach rechts strömt. Ein solches „Venturi-Rohr" wird zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Gasen verwendet. Der Querschnitt des Rohrs senkrecht zur Strömungsrichtung ist an jeder Stelle kreisförmig. Am Punkt Q_1 hat der Querschnitt einen Radius von $R_1 = 2\,\text{cm}$, am Punkt Q_2 beträgt der Radius $R_2 = \sqrt{2} \cdot 2\,\text{cm}$.

Unterhalb des großen Rohres, durch das die Luft strömt, ist ein U-förmig gebogenes Rohr („U-Rohr") angebracht, dessen Öffnungen direkt unter den Punkten Q_1 und Q_2 liegen. Im U-Rohr befindet sich Wasser mit der Dichte von $\rho_\text{W} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Die Oberfläche der Wassersäule steht auf der linken Seite im Vergleich zur Oberfläche der Wassersäule auf der rechten Seite um die Höhendifferenz $\Delta h = 6\,\text{cm}$ höher. Der Querschnitt des U-Rohrs ist ebenfalls kreisförmig. Der Radius des Querschnitts ist entlang des ganzen U-Rohres konstant.

Nehmen Sie in dieser Aufgabe näherungsweise an, dass sich die strömende Luft wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält. Gehen Sie außerdem davon aus, dass eine laminare, reibungsfreie Strömung vorliegt.

a) Die Geschwindigkeit des Luftstroms in Q_1 wird mit u_1 bezeichnet, die Geschwindigkeit des Luftstroms in Q_2 mit u_2. Bestimmen Sie u_2 als Funktion von u_1.

Antwort: Die Geschwindigkeit im Punkt Q_2 kann mithilfe der Kontinuitätsgleichung $A_1 u_1 = A_2 u_2$ berechnet werden (**0.5 Punkte**). Mit den Querschnittsflächen $A_i = \pi R_i^2$ ergibt sich für die Geschwindigkeit im Punkt Q_2 also

$$\pi R_1^2 u_1 = \pi R_2^2 u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 u_1 = \frac{u_1}{2}.$$

(**1 Punkt**).

b) Der statische Luftdruck am Punkt Q_1 wird mit p_1 bezeichnet, der statische Luftdruck am Punkt Q_2 mit p_2. Bestimmen Sie die Differenz des statischen Luftdrucks $p_2 - p_1$ zwischen diesen beiden Punkten als Funktion von u_1.

Antwort: Die Bernoulli-Gleichung besagt, dass der Ausdruck $\rho u_i^2/2 + p_i$ an den Punkten Q_1 und Q_2 identisch sein muss, also

$$\frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 + p_2\,.$$

(**0.5 Punkte**) Damit beträgt die Differenz der statischen Drücke

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho\left(u_1^2 - u_2^2\right)\,.$$

(**0.5 Punkte**) Wird nun noch das Ergebnis für u_2 aus Teilaufgabe a) eingesetzt, so ergibt sich

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho u_1^2\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\right] = \frac{1}{2}\rho u_1^2\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}u_1^2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\,.$$

(**0.5 Punkte**)

c) Durch die Druckdifferenz $p_2 - p_1$ zwischen den Punkten Q_1 und Q_2 wird die Position der Flüssigkeitssäule im U-Rohr verändert. Es stellt sich eine statische Situation ein, das heißt, die Höhendifferenz Δh zwischen den Oberflächen der Flüssigkeitssäulen auf der linken und der rechten Seite des U-Rohrs ist zeitlich konstant (vgl. Abbildung). Bestimmen Sie einen Zahlenwert für die Druckdifferenz $p_2 - p_1$ mithilfe der gegebenen Höhendifferenz Δh.

Antwort: Auf der linken Seite wirkt die Kraft $F_{p,1} = p_1 A_\mathrm{U}$ aufgrund des statischen Drucks p_1 (**0.5 Punkte**) . Außerdem sorgt der Überstand der Wassersäule um Δh im Vergleich zur rechten Seite dafür, dass sich die Gewichtskräfte der Massenelemente innerhalb der Flüssigkeitssäule auf der linken und auf der rechten Seite nicht mehr kompensieren. Es ergibt sich eine Netto-Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = \Delta m g = \rho_\mathrm{W} A_\mathrm{U} \Delta h g$ auf die Wassersäule (**1 Punkt**). Auf der rechten Seite wirkt nur die Kraft $F_{p,2} = -p_2 A_\mathrm{U}$ aufgrund des statischen Drucks p_2, die in die entgegengesetzte Richtung von p_1 und p_2 wirkt (**0.5 Punkte**) . Da die Situation statisch ist, kompensieren sich alle Kräfte und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= F_{p,1} + F_{p,2} + F_\mathrm{G} = p_1 A_\mathrm{U} - p_2 A_\mathrm{U} + \rho_\mathrm{W} A_\mathrm{U} \Delta h g \\ \Leftrightarrow \quad p_2 - p_1 &= \rho_\mathrm{W} g \Delta h = 600\,\mathrm{Pa} \end{aligned}$$

(**1 Punkt**), unabhängig vom Querschnitt des U-Rohrs
(*Wer statt der Kraftbetrachtung mit der Formel für den Schweredruck aus der Vorlesung gearbeitet hat, erhält ebenfalls die volle Punktzahl.*)

d) Bestimmen Sie nun einen Zahlenwert für die Geschwindigkeit u_1 des Luftstroms am Punkt Q_1.

Antwort: Die Ergebnisse aus den Teilaufgaben b) und c) können gleichgesetzt werden, um eine Gleichung in u_1 zu erhalten. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho u_1^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\right] &= \rho_\mathrm{W} g \Delta h \\ \Leftrightarrow \quad u_1 &= \sqrt{\frac{2\rho_\mathrm{W} g \Delta h}{\rho\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\right]}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \end{aligned}$$

(**1 Punkt**) *Eine symbolische Lösung mit $p_2 - p_1$ (falls Teilaufgabe c) nicht gelöst) führt ebenfalls zu voller Punktzahl für diese Teilaufgabe:*

$$u_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho\left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4\right]}}\,.$$