Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) WS 24/25

Klausur 2

Musterlösung

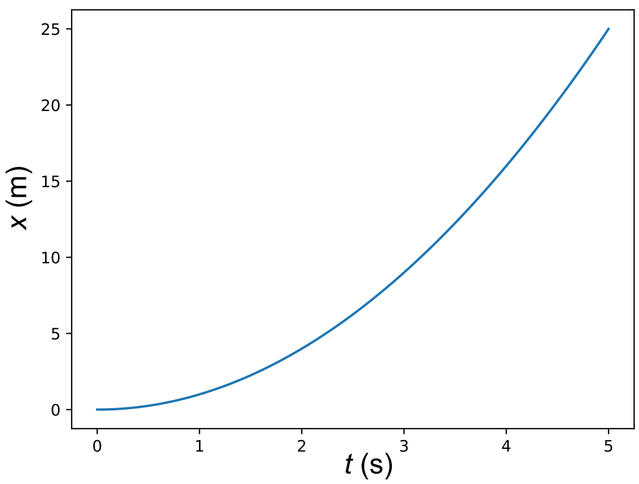
Aufgabe 1: Kurzfragen (10 Punkte)

a) Skizzieren Sie das x-t-Diagramm einer gleichmäßig beschleunigten Translation.

Antwort: Für eine gleichmäßig beschleunigte Translation ist die Beschleunigung a konstant. Damit ergibt sich durch doppelte Integration für den Ort als Funktion der Zeit:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \,.$$

Für die konkreten Zahlenwerte (frei gewählt, nur für die folgende Abbildung) $x_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$ bekommen wir folgendes x-t-Diagramm. Für die Lösung genügt eine Skizze des quadratischen Zusammenhangs (**0,5 Punkte**) mit Achsenbeschriftung (**0,5 Punkte**) :



b) Erläutern Sie kurz das Superpositionsprinzip für Bewegungen anhand des schiefen Wurfs.

Antwort: Superposition bedeutet, dass sich Bewegungen in unterschiedliche Richtungen ungestört überlagern. Unter dem Begriff schiefer Wurf wird der Abwurf unter einem Winkel zur Horizontalen ungleich Null verstanden. Damit ist er eine Überlagerung einer gleichförmig-geradlinigen horizontalen Bewegung mit einer Geschwindigkeit, die der horizontalen Komponente der Abwurfgeschwindigkeit entspricht und einer gleichmäßig beschleunigten vertikalen Bewegung mit einer Anfangsgeschwindigkeit, die der vertikalen Komponente der Abwurfgeschwindigkeit entspricht. Zur Lösung gehört die Idee der ungestörten Überlagerung (**0,5 Punkte**) und eine Antwort darauf, *was* sich beim schiefen Wurf überlagert. (**0,5 Punkte**)

Wenn anstatt des schiefen Wurfes der gerade Wurf mit horizontalem Abwurf beschrieben wird, werden die letzten 0,5 Punkte nicht erworben. Wenn diese Teilaufgabe mit einer Skizze anstatt einer Erläuterung gelöst wird, aus der einer oder beide dieser Aspekte hervorgehen, werden die Punkte ebenfalls erworben. Eine Argumentation über das 4. Newtonsche Gesetz (Superposition von Kräften) ist im Prinzip möglich, *aber nicht nötig. Es wirkt nur eine Kraft (Gravitation), die zu einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung des Objekts nach unten führt, diese wird überlagert von einer gleichförmig-geradlinigen Bewegung eines ansonsten kräftefreien Objekts.*

c) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen der potenziellen Energie E_{pot} einer gespannten Feder als Funktion ihrer Auslenkung x aus der Ruhelage.

Antwort: Federn gehorchen (im elastischen Bereich, hier nicht näher spezifiziert) dem Hookeschen Gesetz, einem linearen Kraftgesetz für die Federkraft $\vec{F}_F$ als Funktion der Auslenkung $\vec{x}$

$$\vec{F}_F = -k\vec{x}$$

mit der Federkonstante k. Da die Auslenkung in *einer* Dimension erfolgt, genügt eine skalare Betrachtung:

$$F_F = -kx\,.$$

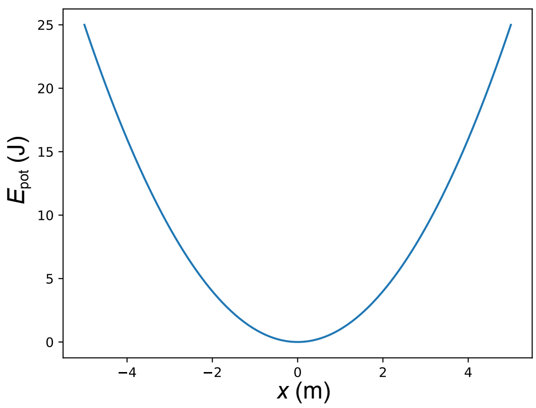
Damit ist die Spannarbeit proportional zum Quadrat der Auslenkung:

$$W = \int \vec{F}_F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int F_F \cdot \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}kx^2$$

Damit wird in der Feder bei einer Auslenkung um $\vec{x}$ die potenzielle Energie

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2$$

gespeichert. Zur Lösung genügt die Skizze eines Funktionsgraphen mit quadratischer Abhängigkeit (**0,5 Punkte**) (wie die folgende für einen willkürlichen Zahlenwert von $k = 2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$) mit korrekter Achsenbeschriftung (**0,5 Punkte**) :



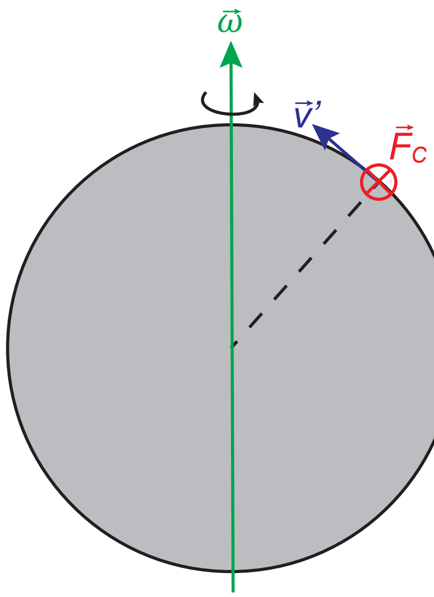
d) Erklären Sie kurz, durch welchen äußeren Einfluss und in welche Himmelsrichtung ein Foucaultsches Pendel in Karlsruhe aus seiner Pendelbewegung von Süden in Richtung Norden abgelenkt wird.

Antwort: Da die Erde ein mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotierendes Bezugssystem (und kein Inertialsystem) ist, herrschen auf ihr Trägheitskräfte (auch: Scheinkräfte). Objekte, die mit der Geschwindigkeit $\vec{v}'$ relativ zum Erdboden bewegt werden, erfahren die Corioliskraft

$$\vec{F}_C = 2 \cdot m \cdot \vec{v}' \times \vec{\omega}$$

mit der Masse m.

Das Foucaultsche Pendel wird aufgrund der Corioliskraft nach der Rechte-Hand-Regel senkrecht zur Pendelebene ($\vec{v}'$ parallel zur Erdoberfläche und in Richtung Norden) und senkrecht zur Rotationsachse der Erde ($\vec{\omega}$) abgelenkt. Auf der Nordhalbkugel (also auch im Ort der Aufgabenstellung, Karlsruhe) erfolgt die Ablenkung nach rechts, was zu einer Drehung der Pendelachse im Uhrzeigersinn führt. Für eine Bewegung von Süden nach Norden ist die Ablenkung Richtung Osten, siehe Abbildung.



Zur Antwort genügen das Stichwort „Corioliskraft“ (**0,5 Punkte**) und die korrekte Richtung, in die die Corioliskraft wirkt (nach rechts bzw. nach Osten). (**0,5 Punkte**)

e) Nennen Sie mindestens zwei mögliche Klassen von Bahnkurven (d. h. Bahnen, die durch unterschiedliche Funktionen beschrieben werden) für ein Objekt der Masse m im Gravitationsfeld eines anderen Objekts der Masse M.

Antwort: Im Gravitationsfeld eines Objekts sind drei verschiedenen Klassen von Bahnkurven („Kepler-Orbits“) möglich, die unterschiedlichen Kegelschnitten entsprechen:

- Ellipsen (in deren einem Brennpunkt das Objekt steht). *Die Klasse der Ellipsen beinhaltet alle geschlossenen Bahnkurven; diese entsprechen einem gebundenen*

Zustand der beiden Objekte. Ein Kreis ist ein Spezialfall einer Ellipse, für verschwindende Exzentrizität, und wird auch als Antwort akzeptiert. Ein lineares Fallen aufeinander zu ist ebenfalls ein Spezialfall einer Ellipse für eine Exzentrizität, die gegen Unendlich strebt.

- Parabeln
- Hyperbeln

Für jede korrekt benannte Bahnkurve – egal welche – gibt es (**0,5 Punkte**) , maximal (**1 Punkt**) . Korrekte Skizzen werden genauso bepunktet.

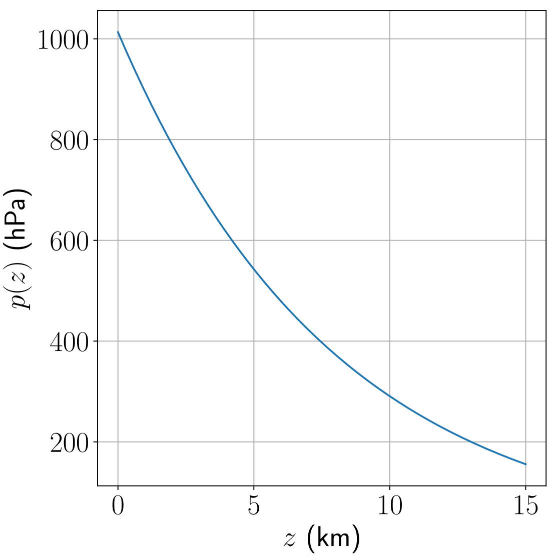
Ellipse, Kreis und Gerade gehören zur selben Klasse von geschlossenen Bahnkurven, ergeben also zusammen nur 0,5 Punkte.

f) Skizzieren Sie in einem Funktionsgraphen qualitativ den Druck der Erdatmosphäre $p(z)$ für konstante Temperatur als Funktion der Höhe über dem Erdboden z.

Antwort: Der Druck der Erdatmosphäre für konstante Temperatur wird durch die barometrische Höhenformel beschrieben. Die Luft ist kompressibel und damit ist ihre Dichte druckabhängig. Daraus ergibt sich eine exponentielle Abhängigkeit von der Höhe über dem Erdboden:

$$p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot z\right]$$

mit p_0 Druck und ϱ_0 Dichte der Luft an der Erdoberfläche. Die folgende Abbildung stammt aus Kapitel 6.2 der Vorlesung:



Zur vollständigen Lösung (**1 Punkt**) muss eine exponentiell fallende Verteilung mit korrekter Achsenbeschriftung skizziert werden.

Für falsche funktionelle Zusammenhänge können keine Punkte vergeben werden. Für fehlende bzw. inkorrekte Achsenbeschriftungen werden (**0,5 Punkte**) *abgezogen.*

g) Wie lautet die Bewegungsgleichung für ein ungedämpftes mathematisches Pendel? Welche Näherung müssen Sie vornehmen, um die Bewegungsgleichung einer ungedämpften harmonischen Schwingung zu erhalten?

Antwort: Die Bewegungsgleichung für den Winkel $\theta(t)$ der Auslenkung lautet:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0\,.$$

Für kleine Winkel gilt $\sin\theta \approx \theta$, wodurch sich die Bewegungsgleichung einer ungedämpften harmonischen Schwingung ergibt:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0\,.$$

Eine korrekte Lösung beinhaltet die obige Bewegungsgleichung für eine mathematische Schwingung (in sämtlichen korrekten Formen) (**0,5 Punkte**) sowie die Nennung kleiner Auslenkwinkel oder alternativ die Angabe der Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung (**0,5 Punkte**) , für die die Näherung $\sin\theta \approx \theta$ gilt.

Angaben von Lösungen der Bewegungsgleichung (nur in der Kleinwinkelnäherung in allgemeiner geschlossener Form bekannt) anstatt der Differenzialgleichung selbst ergeben keine Punkte. Ebenfalls keine Punkte werden für das ausschließliche Hinschreiben der Bewegungsgleichung einer harmonischen Schwingung vergeben.

h) Beschreiben Sie in Worten die Eigenschwingungen eines Systems aus zwei gekoppelten Pendeln.

Antwort: Ein System aus zwei gekoppelten Pendeln besitzt zwei Eigenschwingungen (auch: Eigenmoden):

- Beide Pendel schwingen *gleichphasig*, also mit derselben Phase. Damit werden sie zu gleichen Zeiten in dieselbe Richtung ausgelenkt. (Zusatzinformation: sie schwingen mit der Eigenfrequenz der Einzelpendel).
- Beide Pendel schwingen *gegenphasig*, also mit einer Phasenverschiebung von $\pi = 180°$. Damit werden sie zu gleichen Zeiten in entgegengesetzte Richtungen ausgelenkt. (Zusatzinformation: diese Schwingung geschieht mit einer höheren Frequenz, die mit der Stärke der Kopplung zwischen den Pendeln zunimmt).

Für eine korrekte Lösung müssen beide Eigenschwingungen – in Worten, wie in der Aufgabenstellung gefordert – beschrieben werden, jeweils (**0,5 Punkte**) .

Eine korrekte Skizze anstatt der geforderten Beschreibung in Worten ergibt nur die halbe Punktzahl.

i) Nennen Sie mindestens eine Funktion $A(z,t)$, die die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2}$$

löst.

Antwort: Die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 A(z,t)}{\partial t^2}$$

wird z. B. gelöst durch die Funktionen

$$\begin{aligned}A(z,t) &= A_0 f(C\cdot(z-c\cdot t))\\ A(z,t) &= A_0\cos(\omega t+kz+\varphi)\\ A(z,t) &= A_0\cos(kz+\delta)\cdot\cos(\omega t+\varphi)\\ A(z,t) &= A_0\exp[i(\omega t+kz)]\end{aligned}$$

Für eine korrekte Lösung darf eine beliebige Funktion hingeschrieben werden, die die obige eindimensionale Wellengleichung löst (**1 Punkt**). Hängt die Funktion nur mit dem falschen Vorfaktor von z und/oder t ab, ergeben sich (**0,5 Punkte**) . Ist die Funktion nur von z oder nur von t abhängig, beschreibt sie keine Welle und es werden keine Punkte vergeben.

j) Ein Elementarteilchen besitzt im Bezugssystem der Beobachtenden eine Geschwindigkeit von 80% der Lichtgeschwindigkeit. Um welchen Faktor verändert sich seine Lebensdauer Δt in diesem Bezugssystem relativ zur Lebensdauer τ im Ruhesystem des Elementarteilchens?

Antwort: Aufgrund der Zeitdilatation verlängert sich die Lebensdauer des Elementarteilchens im Bezugssystem der Beobachtenden Δt relativ zu dessen Lebensdauer im Ruhesystem τ um den Lorentz-Faktor γ:

$$\Delta t = \gamma\tau$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

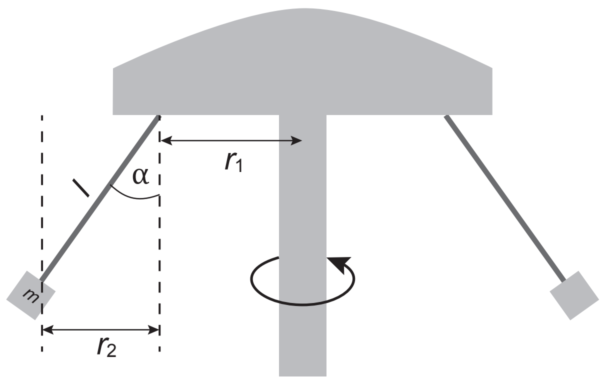
Für $v = 0{,}8\,c$, also $\beta = 0{,}8$, besitzt γ den numerischen Wert:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}8^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}66\,.$$

Zur Lösung gehört der korrekte Ausdruck $\Delta t = \gamma\tau$ für die Zeitdilatation (**0,5 Punkte**) und der zumindest korrekt eingesetzte Wert von $\gamma(0{,}8\,c)$ (beliebiger Variante der obigen Gleichung) (**0,5 Punkte**) .

Aufgabe 2: Kettenkarussell (6 Punkte)

Auf dem Jahrmarkt sind die beiden Gondeln eines Kettenkarussells an Ketten der Länge l aufgehängt, welche sich an horizontalen Armen der Länge r_1 um die vertikale Achse drehen (siehe Skizze). Die Gondeln sind durch die Rotation so weit ausgelenkt, dass diese sich in einem Winkel α zur Vertikalachse befinden. Die Masse einer Gondel inklusive Passagier beträgt m. Vernachlässigen Sie im folgenden Reibung und die Masse der Trägerstruktur.



a) Zeigen Sie durch eine Untersuchung der Kräftebilanz, dass die Winkelgeschwindigkeit der Gondeln als Funktion von r_1, l und α gegeben ist durch

$$\omega = \sqrt{\frac{g \tan\alpha}{r_1 + l \sin\alpha}} .$$

Antwort:

Es wirken die Kraft durch die Kette $\vec{F}_K$ (Betrag F_K) und die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ (Betrag F_G). Es bietet sich an, die Kraft der Kette in eine Komponente parallel zum Boden $F_{K,\parallel}$ und eine Komponente senkrecht zum Boden $F_{K,\perp}$ zu zerlegen. Die Gravitationskraft steht ebenfalls senkrecht zum Boden und wird durch $F_{K,\perp}$ ausgeglichen, so dass die Höhe der Gondeln konstant bleibt:

$$F_{K,\perp} = F_K \cos\alpha = F_G .$$

Durch $F_{K,\parallel}$ wird die Zentripetalkraft F_Z für die Kreisbewegung aufgebracht:

$$F_{K,\parallel} = F_K \sin\alpha = F_Z .$$

Durch Division der beiden Gleichungen kann die unbekannte Kraft der Kette F_K eliminiert werden:

$$\frac{F_{K,\parallel}}{F_{K,\perp}} = \frac{F_K \sin\alpha}{F_K \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{F_Z}{F_G} . \quad \Rightarrow \quad F_Z = F_G \cdot \tan\alpha$$

Weiterhin gilt für jede der Gondeln für den Betrag der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$. Der Betrag der Zentripetalkraft für eine Kreisbewegung mit Radius r ist gegeben durch

$$F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2 .$$

Der relevante Radius r der Gondeln ergibt sich aus der Länge der Arme r_1 und dem Radius r_2 aus der Skizze. Der Radius r_2 kann aus der Kettenlänge l und dem Auslenkungswinkel α bestimmt werden:

$$r_2 = l \cdot \sin\alpha \,.$$

Damit ist

$$r = r_1 + r_2 = r_1 + l \cdot \sin\alpha$$

und für die Zentripetalkraft ergibt sich

$$F_Z = m \cdot (r_1 + l \cdot \sin\alpha) \cdot \omega^2 = F_G \cdot \tan\alpha = m \cdot g \cdot \tan\alpha \,.$$

Auflösen nach ω ergibt den in der Aufgabenstellung angegebenen Zusammenhang:

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{r_1 + l\sin\alpha}} \,.$$

Zur Lösung gehört eine korrekte Analyse der Kräfte (egal ob vektoriell oder in Komponenten) (**1 Punkt**) und der sich dadurch ergebende Zusammenhang zwischen F_Z und F_G. (**0,5 Punkte**) Weiterhin werden korrekte Ausdrücke für F_Z und F_G (**0,5 Punkte**) sowie die korrekte Armlänge r benötigt (auch wenn sie nur implizit in der Rechnung vorkommen) (**0,5 Punkte**) . Schließlich muss noch eingesetzt und nach ω aufgelöst werden. (**0,5 Punkte**)

b) Wie lange dauert eine Runde für eine Armlänge von $r_1 = 7\,\mathrm{m}$, eine Kettenlänge von $l = 3\sqrt{2}\,\mathrm{m}$ und einen Winkel von $\alpha = 45°$? Verwenden Sie die Näherungen $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und $2\pi \approx 25/4$.

Hinweis: $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$.

Antwort: Die gesuchte Umlaufzeit ist mit dem Ausdruck für ω aus Teilaufgabe a) gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r_1 + l\sin\alpha}{g\tan\alpha}} \,.$$

Die Werte aus der Aufgabenstellung von $r_1 = 7\,\mathrm{m}$, $l = 3\sqrt{2}\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45°$, $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ und $2\pi \approx 25/4$. werden nun eingesetzt. Weiterhin verwenden wir $\sin(45°) = \sqrt{2}/2$ und $\tan(45°) = 1$. Damit ergibt sich

$$T \approx \frac{25}{4}\sqrt{\frac{7\,\mathrm{m} + 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \frac{25}{4}\sqrt{\frac{10\,\mathrm{m}}{10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = \frac{25}{4}\,\mathrm{s} = 6{,}25\,\mathrm{s}.$$

Zur Lösung gehört der korrekte Zusammenhang von T und ω (**0,5 Punkte**) sowie korrekt eingesetzte Zahlenwerte. (**0,5 Punkte**)

c) Nun wird das Karussell gleichmäßig im Zeitraum Δt vom Stillstand aus auf die in Teilaufgabe a) ermittelte Winkelgeschwindigkeit beschleunigt. Bestimmen Sie die dazu notwendige Winkelbeschleunigung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega = \dot{\omega}$ und mittlere Leistung $\overline{P}$.

Hinweis: Rechnen Sie in dieser Teilaufgabe rein symbolisch und setzen Sie keine Zahlenwerte ein.

Antwort: Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung handelt, ist die Winkelbeschleunigung konstant und kann einfach als Differenzenquotient berechnet werden:

$$\dot{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{const}\,.$$

Im Zeitraum Δt wird das Karussell von $\omega_0 = 0$ auf den Wert von ω aus Teilaufgabe a) beschleunigt, damit

$$\dot{\omega} = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta t} = \frac{\omega}{\Delta t} = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{(r_1 + l\sin\alpha)\cdot(\Delta t)^2}}\,.$$

Die zur Beschleunigung notwendige mittlere Leistung ergibt sich aus der Änderung der Gesamtenergie ΔE aus dem Ruhezustand, bei dem die Gesamtenergie verschwindet, $E_0 = 0$. Die Änderung der Gesamtenergie ist gegeben durch

$$\Delta E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} - E_0 = \frac{1}{2}\cdot M \cdot v^2 + M\cdot g\cdot h\,,$$

mit der Gesamtmasse der beiden Gondeln $M = 2m$; die Massen der Ketten werden vernachlässigt.

In dieser Gleichung ist

$$v = r\cdot\omega = (r_1 + l\cdot\sin\alpha)\cdot\sqrt{\frac{g\tan\alpha}{r_1 + l\sin\alpha}}$$

der Betrag der Geschwindigkeit der Gondeln und h die Höhe über der Ruhelage der Gondeln im unbewegten Karussell, also für $\alpha = 0°$. Aus der Skizze kann abgelesen werden, dass gilt

$$h = l - l\cos\alpha = l\cdot(1-\cos\alpha)\,.$$

Eingesetzt erhalten wir für die Änderung der Gesamtenergie

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}\cdot(2m)\cdot(r_1 + l\cdot\sin\alpha)^2\cdot\frac{g\tan\alpha}{r_1 + l\sin\alpha} + (2m)\cdot g\cdot l\cdot(1-\cos\alpha)\\ &= m\cdot g\cdot\left[(r_1 + l\cdot\sin\alpha)\cdot\tan\alpha + 2l\cdot(1-\cos\alpha)\right]\,.\end{aligned}$$

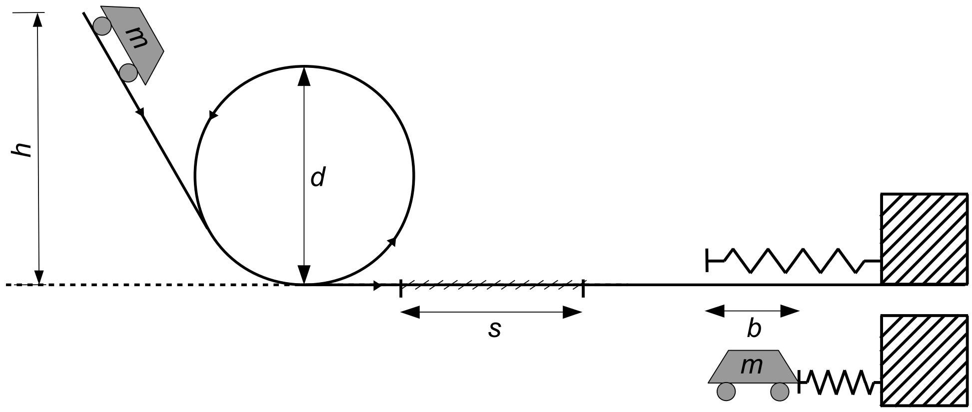
Die Arbeit W, die für die Beschleunigung notwendig ist, entspricht der Änderung der Gesamtenergie ΔE, dividiert durch den Beschleunigungszeitraum Δt:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{m\cdot g}{\Delta t}\cdot\left[(r_1 + l\cdot\sin\alpha)\cdot\tan\alpha + 2l\cdot(1-\cos\alpha)\right]\,.$$

Die Lösung beinhaltet die richtigen Ansätze für die konstante Winkelbeschleunigung (**0,5 Punkte**) und die Energieänderung durch die Beschleunigung inklusive der richtigen Werte für die Gesamtmasse M und v bzw. r (**0,5 Punkte**) sowie h. (**0,5 Punkte**) Weiterhin muss (modulo Folgefehler) das obige Ergebnis für P ersichtlich sein (**0,5 Punkte**) . Wenn nur die Ansätze für ΔE und P vorhanden sind, können noch (**0,5 Punkte**) vergeben werden.

Aufgabe 3: Achterbahnfahrt (6 Punkte)

Ein Achterbahnwagen der Masse m beginnt seine Fahrt in der Höhe h über dem Boden vor einem Looping mit dem Durchmesser d, siehe Skizze unten. Es soll $h \geq d$ gelten. Der Achterbahnwagen startet in ruhendem Zustand und wird nur durch die Gravitation angetrieben. Vernachlässigen Sie in den Teilaufgaben a) bis c) Reibungseffekte.



a) Zeigen Sie durch eine explizite Rechnung, dass die Geschwindigkeit des Achterbahnwagens in der Höhe z über dem Boden gegeben ist durch $v(z) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z)}$ (mit g Betrag der Erdbeschleunigung). Berechnen Sie nun die Beträge der Geschwindigkeit des Achterbahnwagens v_u und v_o am untersten und obersten Punkt des Loopings.

Antwort: Im konservativen Gravitationsfeld der Erde ist die Gesamtenergie des Achterbahnwagens erhalten. Die Gesamtenergie des Achterbahnwagens (E_{ges}) setzt sich zu jedem Zeitpunkt aus dessen kinetischer Energie (E_{kin}) und dessen potentieller Energie (E_{pot}) im Gravitationsfeld zusammen.

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const}\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Die kinetische Energie des Achterbahnwagens ist gegeben durch $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ und die potenzielle Energie durch $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot z$. Hierbei ist m die Masse des Achterbahnwagens, v der Betrag der Geschwindigkeit des Wagens, g der Betrag der Erdbeschleunigung und z die Höhe des Achterbahnwagens über dem gewählten Nullpunkt der potenziellen Energie. Wir wählen hier $z = 0$ für den untersten Punkt des Loopings. Am Anfang der Fahrt ruht der Achterbahnwagen ($v = 0$) und befindet sich in der Höhe h. Für die Gesamtenergie des Wagens muss also gelten

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}}(z = h) = m \cdot g \cdot h\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgrund der Energieerhaltung ist dies die Gesamtenergie des Wagens während der gesamten Fahrt vor der Abbremsung in Teilaufgabe d).

Für Werte von $z < h$ setzt sich die Gesamtenergie aus der höhenabhängigen potentiellen und der geschwindigkeitsabhängigen kinetischen Energie zusammen. Aufgrund der Energieerhaltung ergibt sich also:

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot z + \frac{1}{2} m (v(z))^2 \,.$$

Diese Gleichung kann nach der Geschwindigkeit $v(z)$ aufgelöst werden:

$$\frac{1}{2} m (v(z))^2 = m \cdot g \cdot (h - z) \quad \Rightarrow \quad v(z) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - z)}.$$

(**0,5 Punkte**)

Zur Bestimmung von v_u und v_o müssen die korrekten Höhen am untersten und obersten Punkt des Loopings in die gegebene Gleichung für $v(z)$ eingesetzt werden. Mit der Wahl von $z = 0$ am untersten Punkt des Loopings erhalten wir

$$\begin{aligned} z_u &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_u = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}\,, \\ z_o &= d \qquad \Rightarrow \qquad v_o = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - d)}\,. \end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**) wobei die entsprechenden Höhen beide korrekt eingesetzt sein müssen.

b) Berechnen Sie den Betrag der Normalkraft, welcher der Looping auf der Höhe $z = d/2$ standhalten muss.

Antwort: Im Looping bringen die Gravitationskraft und die Normalkraft der Schiene als elastischem Körper die Zentripetalkraft

$$F_Z = m \cdot r \cdot \omega^2 = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

(**0,5 Punkte**)

auf, die den Achterbahnwagen auf der Kreisbahn hält. Dabei ist $r = d/2$ der Radius des Loopings.

Auf der Höhe $z = d/2$ ist die Gravitationskraft gerade tangential zur Bahnkurve orientiert und kann somit nicht zur Zentripetalkraft beitragen. In diesem Punkt gilt also

$$|F_N| = |F_Z| = m \cdot \frac{(v(z = d/2))^2}{\frac{d}{2}}$$

(**0,5 Punkte**)

Mit $v(d/2) = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h - d/2)}$ aus der in Aufgabenteil a) herzuleitenden Gleichung ergibt sich

$$F_N = m \cdot \frac{2 \cdot g \cdot (h - d/2)}{\frac{d}{2}} = \frac{4 \cdot m \cdot g}{d} \left(h - \frac{d}{2} \right) = 4 \cdot m \cdot g \left(\frac{h}{d} - \frac{1}{2} \right).$$

(**0,5 Punkte**)

c) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser, welchen der Looping haben darf, so dass der Achterbahnwagen den Looping vollständig durchfährt.

Antwort: Der maximale Durchmesser des Loopings ist dadurch gegeben, dass der Achterbahnwagen im *gesamten* Looping auf der Kreisbahn gehalten werden muss. Der kritischste Punkt ist der *oberste Punkt* des Loopings, bei dem die Zentrifugalkraft $F_F = -F_Z$ die gesamte Gravitationskraft ausgleichen muss: $F_G = F_Z(d)$. Es wäre ein falscher Ansatz, nur die Energieerhaltung zu verwenden und die Schlussfolgerung zu ziehen, dass die maximale Höhe des Loopings gegeben ist durch die Anfangshöhe des Wagens h.

Es ist also derjenige Durchmesser d_{max} gesucht, für den gilt:

$$m \cdot g = m \cdot \frac{v_o^2}{\frac{d_{\text{max}}}{2}}$$

(**0,5 Punkte**)

Durch Einsetzen des Resultats für v_o aus Aufgabenteil a) in die Gleichung erhalten wir

$$d_{\text{max}} = \frac{2v_o^2}{g} = 2 \cdot 2 \cdot (h - d_{\text{max}}) \quad \Leftrightarrow \quad d_{\text{max}} = \frac{4}{5}h.$$

(**0,5 Punkte**)

d) Um den Achterbahnwagen nach dem Looping zu stoppen, wird er zunächst über eine Strecke s mit Hilfe von Gleitreibung mit einem Gleitreibungskoeffizienten μ_G gebremst. Berechnen Sie den Energieverlust ΔE des Achterbahnwagens bei der Durchfahrt dieser Bremsstrecke.

Antwort: Die Bremskraft wird durch Gleitreibung entlang der Bremsstrecke erzeugt. Der Betrag der Gleitreibungskraft ist dabei gegeben durch $F_R = \mu_G \cdot F_N$. Die Normalkraft F_N ist betragsmäßig gleich der Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$, die sie nach dem dritten Newtonschen Gesetz kompensiert, so dass

$$F_R = \mu_G \cdot m \cdot g\,.$$

Die Richtung der Gleitreibungskraft ist immer der Bewegungsrichtung entgegengesetzt. Die verrichtete Reibungsarbeit ergibt sich aus dem Wegintegral der Reibungskraft entlang des Weges. Dies vereinfacht sich in diesem Fall zum Produkt

$$W = F_R \cdot s = \mu_G \cdot F_N \cdot s = \mu_G \cdot m \cdot g \cdot s\,.$$

Durch diese an der Bremsstrecke geleisteten Arbeit verliert der Achterbahnwagen eine entsprechende Menge von Energie:

$$\Delta E = -W = -\mu_G \cdot m \cdot g \cdot s,$$

(**0,5 Punkte**)

wobei der negative Wert von ΔE einen Energie*verlust* beschreibt.

Falls das Minuszeichen vergessen wurde, soll trotzdem der halbe Punkt vergeben werden.

e) Um den Achterbahnwagen vollständig zu stoppen, wird eine Hookesche Feder mit der Federkonstanten k verwendet. Die Feder ist an einem unbeweglichen Block befestigt. Bei Auftreffen des Wagens auf die Feder ist diese entspannt. Nachdem der vorgebremste Achterbahnwagen zum Stillstand gekommen ist, wird die gespannte Feder eingerastet, um eine erneute Beschleunigung zu verhindern. Um welche Strecke b wird die Feder gestaucht bis zum vollständigen Stopp des Achterbahnwagens?

Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe d) nicht lösen konnten, verwenden Sie ΔE als den Energieverlust durch die Bremsstrecke.

Antwort: Die Gesamtenergie des Achterbahnwagens, die am Ende der Bremsstrecke noch verbleibt, wird bei der Stauchung in potenzielle Energie der Feder umgewandelt. Die Gesamtenergie vor der Bremsstrecke entspricht der potenziellen Energie am Beginn der Fahrt, $E_{\text{pot}}(h) = m \cdot g \cdot h$. Nach der Bremsstrecke beträgt die Gesamtenergie damit

$$E_{\text{ges,brems}} = E_{\text{pot}}(h) + \Delta E = m \cdot g \cdot h - \mu_G \cdot m \cdot g \cdot s = m \cdot g \cdot (h - \mu_G \cdot s)\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Die potenzielle Energie einer Feder mit Federkonstante k bei Auslenkung b (Stauchung oder Streckung) beträgt

$$E_F = \frac{1}{2} \cdot k \cdot b^2.$$

Gleichsetzen und Auflösen nach b ergibt:

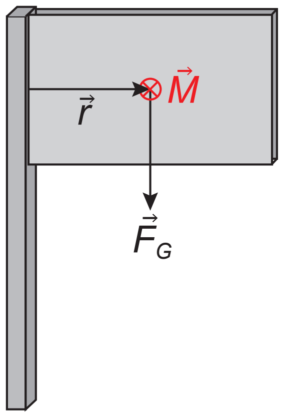
$$m \cdot g \cdot (h - \mu_G \cdot s) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot b^2 \quad \Leftrightarrow \quad b = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{k} \cdot (h - \mu_G \cdot s)}$$

(**0,5 Punkte**)

Die Lösung muss den korrekten Ausdruck für die Gesamtenergie nach dem Bremsen (auch wenn er nur implizit vorkommt) enthalten. Weiterhin muss dieser Ausdruck mit der korrekten Federenergie E_F gleichgesetzt und nach b aufgelöst werden. Beide Vorzeichen zu b können richtig sein, je nachdem in welche Richtung man die entsprechende Achse legt. Nur für die Angabe von $E_F = \frac{1}{2}kb^2$ gibt es keine Punkte.

Aufgabe 4: Flagge am Mast (5 Punkte)

Zur Bundestagswahl werden vor dem Wahllokal Flaggen an Masten der Höhe h aufgehängt, wobei die Masten fest im Boden verankert sind. Wir betrachten die Flaggen als dünne quaderförmige starre Körper der Breite a, Höhe b, Dicke c und Masse m mit einer homogenen Massenverteilung. Jede Flagge ist an ihrer linken Seite am Mast befestigt und ihre Oberkante befindet sich auf der Höhe h, wie in der Skizze gezeigt:



a) Geben Sie Betrag und Richtung des Drehmoments an, das die Flagge auf den Mast ausübt. Legen Sie dazu zunächst einen geeigneten Drehpunkt fest.

Antwort: Bei starren Körpern beschreiben wir externe Kräfte als am Schwerpunkt angreifend. (**0,5 Punkte**) Die relevante Kraft ist die Gewichtskraft der Flagge, $\vec{F}_G = m\vec{g}$, die nach unten zeigt. Da die Flagge eine homogene Massenverteilung besitzt, liegt ihr Schwerpunkt genau in der Mitte der Seiten, also bei $a/2$, $b/2$ und $c/2$. Das Drehmoment durch diese Kraft ist dann

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\,,$$

wobei $\vec{r}$ der Vektor vom Drehpunkt auf den Schwerpunkt der Flagge ist (also der Ortsvektor des Schwerpunkts in einem Koordinatensystem mit dem Drehpunkt als Ursprung). Aufgrund des Vektorprodukts ist für das Drehmoment bezüglich des Mastes nur der horizontale Abstand des Schwerpunkts vom Mast relevant. Damit kann der Drehpunkt entlang des Mastes frei gewählt werden, z. B. auf Höhe des Schwerpunkts $(h - b/2)$. Damit steht $\vec{r} = \vec{r}_\perp$ senkrecht auf der Drehachse und das Drehmoment ist dann betragsmäßig

$$M = r_\perp \cdot F_G = \frac{a}{2} \cdot m \cdot g\,.$$

(**0,5 Punkte**) *(mit klarer Angabe des Drehpunkts)* Die Richtung des Drehmomentvektors lässt sich mit der Dreifingerregel der rechten Hand bestimmen. Der Vektor $\vec{r}$ zeigt nach rechts und $\vec{F}_G$ nach unten. Damit zeigt $\vec{M}$ in die Projektionsfläche hinein (**0,5 Punkte**) , siehe Skizze.

b) Wir fassen den Mast als elastisches Objekt mit endlicher Zugfestigkeit auf (z. B. für Aluminium: 70 MPa). Durch das Drehmoment, das durch die Flagge ausgeübt wird, wird der Mast gebogen. Die Flagge wird nun durch andere Flaggen derselben Dimensionen aber größerer Masse ersetzt. Diskutieren Sie in Worten die Grenzen der Elastizität des Mastes, indem Sie die drei unterschiedlichen Bereiche der Biegung beschreiben, die der Mast mit zunehmender Masse der Flaggen durchläuft.

Antwort: Durch die zunehmende Masse wird die Gewichtskraft und damit auch das Drehmoment größer, das auf den Mast wirkt. Da der Mast laut Aufgabenstellung elastisch und fest im Boden verankert ist, wird er durch das Drehmoment gebogen. Durch das Biegen wirken Zugkräfte auf die äußeren Fasern und Druckkräfte auf die inneren Fasern des Mastes.

i) Im *elastischen* Bereich führt das Biegen zu einem rückstellenden Drehmoment, das das Drehmoment aufgrund der Masse der Flagge kompensiert. (**0,5 Punkte**)

ii) Für größere Massen wird der Bereich der *plastischen* Verformung des Mastes erreicht. (**0,5 Punkte**)

iii) Die endliche Zugfestigkeit führt dazu, dass die äußeren Fasern des Masts sich aufgrund der Zugspannung *einschnüren* und schließlich *reißen*. (**0,5 Punkte**)

c) Die Flagge ist drehend gelagert und kann um die vertikale Achse um den Mast rotieren. Welches Trägheitsmoment I besitzt die Flagge bezüglich dieser Achse? Berechnen Sie das Trägheitsmoment als Funktion der Masse m der Flagge. Begründen Sie anschaulich, warum I nicht von b und c abhängt.

Hinweis: Sie können das Trägheitsmoment entweder direkt bezüglich der Mastachse berechnen oder zunächst bezüglich einer parallelen Achse durch den Schwerpunkt der Flagge.

Antwort: Wir berechnen zunächst die Masse der Flagge, die später im Ausdruck für das Trägheitsmoment verwendet werden kann. Die Masse der Fahne ist aufgrund ihrer homogenen Massenverteilung gegeben durch ihre Dichte ϱ und ihr Volumen $V = a \cdot b \cdot c$:

$$m = \varrho \cdot a \cdot b \cdot c \,.$$

Hinweis: in der gedruckten Version der Klausur fehlt ein Hinweis auf die Näherung, dass die Dicke der Flagge c vernachlässigbar ist. Dieser Hinweis wurde während der Klausurbearbeitung gegeben. Die folgende Herleitung macht diese Näherung.

Besser wäre eigentlich eine Formulierung über eine *Flächendichte* σ, so dass sich als Masse

$$m = \int_A \sigma \, \mathrm{d}A = \sigma \cdot \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y = \sigma \cdot a \cdot b$$

ergibt.

Das Trägheitsmoment der Fahne bei Rotation um den Mast lässt sich auf zwei unterschiedliche Wege berechnen:

i) *Direkter Weg*:

Zur Berechnung des Trägheitsmoments wählen wir ein Koordinatensystem, in dem die x-Koordinate nach vorn, die y-Koordinate nach rechts und die z-Komponente nach oben zeigt. Die Masse wird mit dem Quadrat des Abstands $r_\perp = y$ von der Drehachse gewichtet. Diese Näherung ist nur für vernachlässigbare Dicke c korrekt. Das Trägheitsmoment ergibt sich wie folgt:

$$I = \int_A \sigma \cdot r_\perp^2 \,\mathrm{d}A = \sigma \cdot \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}y\, y^2 = \sigma \cdot b \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot m \cdot a^2 \,.$$

ii) *Über parallele Achsen*: Es ist auch möglich, zunächst das Trägheitsmoment der Flagge bezüglich der Achse durch den Schwerpunkt zu berechnen:

$$I_0 = \sigma \cdot \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}x \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}y\, y^2 = \sigma \cdot b \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \left(\frac{a}{2}\right)^3\right] = \frac{1}{12} \cdot m \cdot a^2 \,.$$

Dann wenden wir den Satz von Steiner an, um das Trägheitsmoment bezüglich des Mastes zu bekommen:

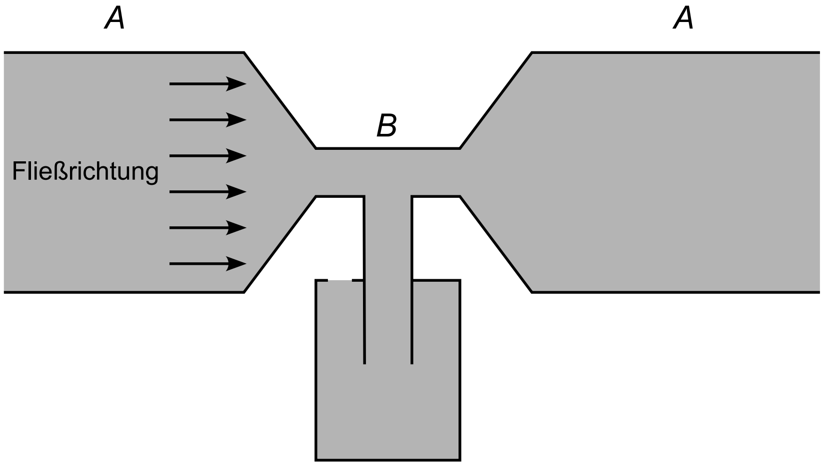
$$I = I_0 + I_S = \frac{1}{12} \cdot m \cdot a^2 + m \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot m \cdot a^2 \,.$$

Für eine Drehung um den Mast ist nur der Abstand jedes Volumenelements vom Mast in y-Richtung relevant, nicht dessen Position in x-Richtung. So lange die Dicke der Flagge vernachlässigbar ist, ist auch die z-Position irrelevant und die Näherung $r_\perp = y$ gilt.

Zur Lösung gehört für beide Rechenwege der korrekte Ansatz für das Trägheitsmoment (**0,5 Punkte**) , die korrekte Ersetzung der Masse (**0,5 Punkte**) und das korrekte Ergebnis: (**0,5 Punkte**) . Außerdem muss zumindest korrekt argumentiert werden, warum die x-Ausdehnung der Flagge irrelevant ist (**0,5 Punkte**) (die Argumentation bezüglich z wird aus der Wertung genommen).

Aufgabe 5: Wasserstrahlpumpe (4 Punkte)

Eine Wasserstrahlpumpe (siehe Abbildung) ist ein Rohr, das sich von einer Querschnittsfläche A auf eine Querschnittsfläche B verjüngt und danach wieder auf die Fläche A aufweitet. Das Rohr wird von Wasser durchströmt. Wenn im Bereich mit Querschnitt B über ein senkrechtes Rohr ein Behälter angeschlossen wird, kann in diesem ein Ansaugedruck unterhalb des Drucks der umgebenden Atmosphäre erzeugt werden. Nehmen Sie eine nichtviskose, laminare Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit mit der Dichte $\varrho = 1\,\frac{\text{kg}}{\text{L}} = 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ an.



a) Beim Querschnitt $A = 100\,\text{mm}^2$ wird das Wasser mit einem absoluten Druck von $p_A = 120\,\text{kPa}$ eingeleitet. Der Fluss (Flüssigkeitsvolumen pro Zeiteinheit) durch die Anlage beträgt $\phi_A = 200\,\frac{\text{mL}}{\text{s}} = 200\,000\,\frac{\text{mm}^3}{\text{s}}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_A, mit der das Wasser beim Querschnitt A durch das Rohr strömt.

Antwort: Der Fluss bei A entspricht dem Wasservolumen pro Zeiteinheit und kann als Funktion von Querschnittsfläche A und Geschwindigkeit v_A umgeschrieben werden

$$\phi_A = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = A \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A \cdot v_A\,.$$

Damit ergibt sich für v_A:

$$v_A = \frac{\phi_A}{A} = \frac{200\,000\,\frac{\text{mm}^3}{\text{s}}}{100\,\text{mm}^2} = 2000\,\frac{\text{mm}}{\text{s}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Zur Lösung gehören der korrekte Zusammenhang zwischen Fluss, Fläche und Geschwindigkeit (**0,5 Punkte**) und der korrekte Zahlenwert. (**0,5 Punkte**)

b) Welche Strömungsgeschwindigkeit besitzt das Wasser beim Querschnitt $B = 20\,\text{mm}^2$?

Hinweis: Wenn Sie in Teilaufgabe a) v_A nicht berechnen konnten, rechnen Sie hier bitte symbolisch mit v_A weiter.

Antwort: Die Strömungsgeschwindigkeit beim Querschnitt B ergibt sich durch die Erhaltung des Flusses ϕ („Kontinuitätsgleichung“):

$$\phi_A = \phi_B \quad \rightarrow \quad v_A \cdot A = v_B \cdot B \quad \Leftrightarrow \quad v_B = \frac{A}{B} \cdot v_A = \frac{\phi_A}{B} = \frac{100\,\text{mm}^2}{20\,\text{mm}^2} \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\,.$$

Zur Lösung gehört der Ansatz mit der Kontinuitätsgleichung (**0,5 Punkte**) und die Auflösung nach v_B (**0,5 Punkte**) sowie der korrekte Zahlenwert (oder v_A symbolisch, falls Teilaufgabe a) nicht gelöst). (**0,5 Punkte**)

c) Welcher Ansaugedruck p_B wird durch das strömende Wasser im senkrechten Rohr – und damit im Behälter – erzeugt?

Antwort: Der gesuchte Druck beim Querschnitt B ist der statische Druck p_B aus der Bernoulli-Gleichung

$$p_A + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_A^2 = p_B + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot v_B^2$$

Damit können wir einen Ausdruck für p_B ableiten:

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot \left(v_A^2 - v_B^2\right) \ .$$

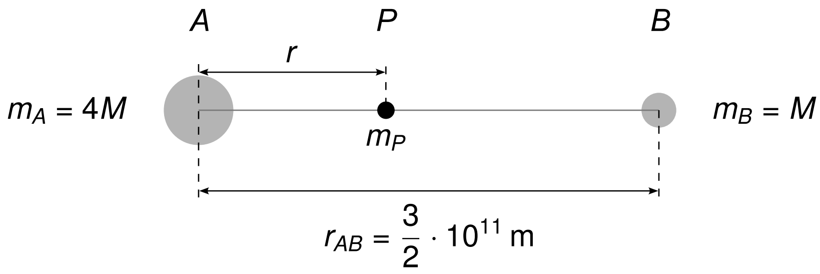
Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$p_B = 1200\,\mathrm{hPa} + \frac{1}{2} \cdot 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot (4 - 100)\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 120\,\mathrm{kPa} - 48\,\mathrm{kPa} = 72\,\mathrm{kPa} \ .$$

Zu einer korrekten Lösung gehören der Ansatz mit der Bernoulli-Gleichung (**0,5 Punkte**) , die Auflösung nach p_B und der korrekte Zahlenwert. (**1 Punkt**)

Aufgabe 6: Probemasse im Gravitationsfeld (5 Punkte)

Weit entfernt von anderen Galaxien und Sternen befinden sich zwei Planeten. Planet A besitzt die Masse $m_A = 4M$ und Planet B besitzt die Masse $m_B = M$. Der Abstand des Planeten B von A beträgt $r_{AB} = \frac{3}{2} \cdot 10^{11}$ m. Zusätzlich befindet sich eine Probemasse P mit Masse $m_P \ll M$ auf der Verbindungslinie zwischen den Planeten A und B. Die Probemasse besitzt den Abstand r zum Planeten A. Betrachten Sie die Planeten und die Probemasse als punktförmige Objekte.



Es reicht aus, die Situation als eindimensionales Problem aufzufassen: Die beiden Planeten und die Probemasse liegen jederzeit entlang derselben Geraden. Betrachten Sie die drei Massen in einem eindimensionalen Koordinatensystem, in dem der Planet A im Ursprung liegt und die x-Achse parallel zur Verbindungslinie zwischen den Planeten A und B verläuft. Die x-Achse zeigt dabei von A aus in Richtung von B (vgl. Abbildung).

Hinweis: Falls in Ihren Endergebnissen die Gravitationskonstante G auftauchen sollte, müssen Sie diese nicht explizit ausschreiben. Geben Sie dann im Endergebnis einfach den Formelbuchstaben G an.

a) Berechnen Sie einen Zahlenwert für den Schwerpunkt r_S des Systems der beiden Planeten A und B *ohne Probemasse*.

Hinweis: Betrachten Sie die Orte der Planeten A und B im oben angegebenen eindimensionalen Koordinatensystem. Dort ist der Wert von r_S der Abstand des Schwerpunktes vom Planeten A.

Antwort: Für die Berechnung des Schwerpunktes werden die Massen und die Positionen der beiden beteiligten Körper benötigt. Im angegebenen Koordinatensystem ist $r_A = 0$ die Position des Planeten A und $r_B = r_{AB}$ die Position des Planeten B. Damit liegt der Schwerpunkt im angegebenen Koordinatensystem bei

$$r_S = \frac{m_A r_A + m_B r_B}{m_A + m_B} = \frac{4M \cdot 0 + M \cdot r_{AB}}{4M + M} = \frac{1}{5} r_{AB} = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^{11}\text{m} = 3 \cdot 10^{10}\,\text{m}\,.$$

(**0.5 Punkte**) für die richtige Gleichung für den Schwerpunkt und (**0.5 Punkte**) für die korrekte Rechnung mit richtigem Endergebnis.

Ein vollständig vereinfachtes Endergebnis, das nur in Abhängigkeit der Variablen r_{AB} angegeben ist, ergibt ebenfalls volle Punktzahl.

b) Geben Sie die potenzielle Energie des Systems aus den Planeten A und B und der Probemasse P als Funktion des Abstands r der Probemasse vom Planeten A an.

Hinweis: In dieser Aufgabe reicht es, das Endergebnis symbolisch anzugeben, das heißt, Sie müssen gegebene Zahlenwerte nicht einsetzen.

Antwort: Zur Berechnung der potenziellen Energie des Systems aus den Planeten A, B und der Probemasse P müssen die paarweisen Gravitationswechselwirkungen zwischen *allen* vorhandenen Objekten berücksichtigt werde, also zwischen A und B, zwischen A und P und zwischen B und P. Die potenzielle Energie aus allen drei Wechselwirkungen wird addiert:

$$E_{\text{pot}}(r) = \underbrace{\left(-G\frac{m_A m_B}{r_{\text{AB}}}\right)}_{\text{Anziehung } A \leftrightarrow B} + \underbrace{\left(-G\frac{m_P m_A}{r}\right)}_{\text{Anziehung } P \leftrightarrow A} + \underbrace{\left(-G\frac{m_P m_B}{r_{AB} - r}\right)}_{\text{Anziehung } P \leftrightarrow B}$$
$$= -GM\left(\frac{4M}{r_{\text{AB}}} + \frac{4m_P}{r} + \frac{m_P}{r_{AB} - r}\right) .$$

(**0.5 Punkte**) für das Erkennen der drei verschiedenen Gravitationswechselwirkungen und (**0.5 Punkte**) für korrektes Ergebnis.

Die reine Angabe der allgemeinen Formel für die potenzielle Energie gibt keine Punkte. Es muss ersichtlich werden, dass die Anziehung der Planeten und der Probemassen untereinander behandelt werden. Wenn m_A und m_B nicht eingesetzt werden, gibt es trotzdem volle Punktzahl. Wenn der Term für die Anziehung $A \leftrightarrow B$ fehlt, muss begründet werden, dass es sich um einen konstanten Beitrag handelt, der durch richtige Wahl des Energienullpunktes eliminiert werden kann.

c) Geben Sie einen Ausdruck für die Kraft auf die Probemasse P in Abhängigkeit von r an.

Hinweis: In dieser Aufgabe reicht es, das Endergebnis symbolisch anzugeben, das heißt, Sie müssen gegebene Zahlenwerte nicht einsetzen.

Antwort: Die Kraft kann direkt aus dem Ausdruck für die potenzielle Energie durch Berechnen des (negativen) Gradienten in einer Dimension bestimmt werden. Alternativ können die auf die Probemasse P wirkenden Gravitationskräfte durch die Planeten A und B betrachtet und (aufgrund des Superpositionsprinzips vektoriell) addiert werden. Hier ist darauf zu achten, dass diese beiden Kräfte in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Der Ausdruck für die Kraft auf die Probemasse ist

$$F_P(r) = -\frac{\partial E_{\text{pot}}(r)}{\partial r} = -\left[-GM\left(-\frac{4m_P}{r^2} + \frac{m_P}{(r_{AB} - r)^2}\right)\right]$$
$$= -Gm_P M\left(\frac{4}{r^2} - \frac{1}{(r_{AB} - r)^2}\right) .$$

(**0.5 Punkte**) für die korrekte Kraftbilanz an der Probemasse P *oder* Nutzen des Zusammenhangs mit der potentiellen Energie und (**0.5 Punkte**) für das korrekte Endergebnis. Vor allem auf das korrekte relative Vorzeichen der beiden Terme ist zu achten.

Korrekturhinweise: Die reine Angabe des allgemeinen Gravitationsgesetzes gibt keine Punkte. Es muss ersichtlich werden, dass die Kräftebilanz aufgestellt wird. (Falls nicht mit dem negativen Gradienten der potenziellen Energie gerechnet wird.) Wenn m_A und m_B nicht eingesetzt werden, gibt es trotzdem volle Punktzahl. Ein "+" als absolutes Vorzeichen anstatt eines "−" gibt ebenfalls volle Punktzahl. Wichtig ist, dass das relative Vorzeichen zwischen den beiden Summanden korrekt ist.

d) Der Ort entlang der Verbindungslinie der beiden Planeten A und B, an dem auf die Probemasse P keine Kraft wirkt, werde mit $r = r_0$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für dieses r_0 die Gleichung

$$3r_0^2 - 8r_{AB}r_0 + 4r_{AB}^2 = 0$$

erfüllt sein muss.

Hinweis: Es reicht aus, nur den Definitionsbereich $0 < r_0 < r_{AB}$ zu betrachten.

Antwort: Am Punkt $r = r_0$ sollen sich die Gravitationskräfte auf die Probemasse kompensieren, es muss also

$$0 = F_P(r_0) = -GmM\left(\frac{4}{r_0^2} - \frac{1}{(r_{AB} - r_0)^2}\right)$$

gelten (**0.5 Punkte**) . Aus dieser Gleichung lässt sich die quadratische Gleichung

$$0 = 4\left(r_{AB} - r_0\right)^2 - r_0^2 = 4r_{AB}^2 + 4r_0^2 - 8r_{AB}r_0 - r_0^2 = 3r_0^2 - 8r_{AB}r_0 + 4r_{AB}^2$$

gewinnen (**0.5 Punkte**) .

e) Bestimmen Sie nun einen Zahlenwert für den Ort r_0, an dem auf die Probemasse keine Kraft wirkt, durch Lösen der quadratischen Gleichung in d).

Hinweis: Für das Lösen dieser Aufgabe können Sie die Lösungsformel für eine quadratische Gleichung benutzen: Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ besitzt die Lösungen

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Antwort: Die Lösung r_0 kann mit der angegebenen Formel mit $a = 3$, $b = -8r_{AB}$ und $c = 4r_{AB}^2$ ermittelt werden,

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{-(-8r_{AB}) \pm \sqrt{(-8r_{AB})^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4r_{AB}^2}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{8r_{AB} \pm \sqrt{16r_{AB}^2}}{6} \\ &= \frac{(4 \pm 2)}{3} r_{AB} . \end{aligned}$$

(**0.5 Punkte**) für korrektes Anwenden der angegebenen Lösungsformel. Relevant ist nur der "−"-Lösungszweig, da nur Punkte in Betracht gezogen werden, die sich auf der Verbindungslinie zwischen den Planeten A und B befinden. Das Einsetzen des Zahlenwerts für r_{AB} liefert dann

$$r_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot 10^{11}\,\text{m} = 1 \cdot 10^{11}\,\text{m}.$$

(**0.5 Punkte**) für Vereinfachen zum Endergebnis.

Korrekturhinweise: Es gibt keinen Punktabzug, falls beide Lösungen der quadratischen Gleichung weiter behandelt wurden. Das Endergebnis ist hier auf jeden Fall numerisch anzugeben, da dieser Schritt mit einem halben Punkt bewertet wird.