Klassische Experimentalphysik I (Mechanik) WS 24/25

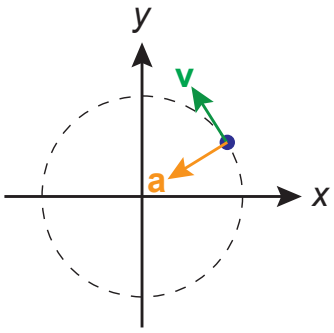
Probeklausur

Musterlösung

Aufgabe 1: Kurzfragen (4 Punkte)

a) Skizzieren Sie für eine gleichförmige Kreisbewegung eines Massepunkts um eine Achse durch den Ursprung des Koordinatensystems die Vektoren der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. (**1 Punkt**)

Antwort: Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ zeigt vom Massepunkt parallel zur momentanen Bewegungsrichtung, also tangential zum Kreis. (**0,5 Punkte**) Der Massepunkt erfährt eine Zentripetalbechleunigung, daher zeigt der Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ radial von Massepunkt zum Ursprung. (**0,5 Punkte**)



b) Erläutern Sie kurz die beiden Eigenschaften der Masse, träge und schwer zu sein. (**1 Punkt**)

Antwort: Der Begriff „träge Masse“ bezieht sich auf die Eigenschaft, dass die Beschleunigung eines Objekts aufgrund einer äußeren Kraft umgekehrt proportional zur dessen Masse ist. Das Objekt wird also umso weniger durch eine äußere Kraft beschleunigt, umso größer seine Masse ist. (**0,5 Punkte**) Das ergibt sich direkt aus dem zweiten newtonschen Gesetz in der Form

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Die „schwere Masse“ bezieht sich auf die Anziehung zwischen zwei Massen m_1 und m_2 aufgrund der Gravitationskraft zwischen ihnen: (**0,5 Punkte**)

$$\vec{F}_{G,m_2\to m_1} = -\frac{G\cdot m_1\cdot m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\cdot\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}.$$

Exakte Formel für Gravitationsgesetz nicht benötigt, aber Zusammenhang, dass Gravitationskraft von der „schweren“ Masse abhängt, sollte erkennbar sein.

c) Vergleichen Sie die Arbeit $W(\Delta\vec{x})$, die verrichtet werden muss, um eine entspannte Feder 2 cm weit zu dehnen, mit der Arbeit, die erforderlich ist, um sie 1 cm weit zu dehnen, d. h. bestimmen Sie das Verhältnis $W(|\Delta\vec{x}| = 2\,\text{cm})/W(|\Delta\vec{x}| = 1\,\text{cm})$. (**1 Punkt**)

Antwort: Die Spannarbeit einer Feder bei einer Auslenkung $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$ ($\vec{x}_0$ Ruhelage) gegen die Rückstellkraft $\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$ ist gegeben durch $W = {}^1\!/_2 k(\Delta\vec{x})^2$ (berechenbar aus dem Wegintegral der Rückstellkraft) (**0,5 Punkte**) . Das Verhältnis ergibt sich zu (**0,5 Punkte**)

$$\frac{W(\Delta x = 2\,\text{cm})}{W(\Delta x = 1\,\text{cm})} = \frac{{}^1\!/_2 \cdot k \cdot (2\,\text{cm})^2}{{}^1\!/_2 \cdot k \cdot (1\,\text{cm})^2} = \frac{(2\,\text{cm})^2}{(1\,\text{cm})^2} = 4$$

Anschaulich: Da die Arbeit quadratisch in der Auslenkung ist, ist für eine doppelte Auslenkung die vierfache Arbeit notwendig.

d) Bei welchem x-Wert liegt der Schwerpunkt eines eindimensionalen Systems aus zwei Massepunkten mit $m_1 = m$ bei $x = 1\,\text{cm}$ und $m_2 = 3m$ bei $x = 5\,\text{cm}$? (**1 Punkt**)

Antwort: Im allgemeinen ist der Schwerpunkt eines Systems aus N Massepunkten definiert als die mit den jeweiligen Massen m_i gewichtete Vektorsumme der Ortsvektoren, normiert auf die Gesamtmasse $M = \sum m_i$

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{r}_i.$$

Im eindimensionalen Fall und mit zwei Massen reduziert sich diese Gleichung auf

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot (m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2)\,.$$

(**0,5 Punkte**)

Einsetzen der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte ergibt

$$x_{\text{CM}} = \frac{1}{4m} \cdot (m \cdot 1\,\text{cm} + 3m \cdot 5\,\text{cm}) = 4\,\text{cm}.$$

(**0,5 Punkte**)

Aufgabe 2: Skischanze (6 Punkte)

Diese Aufgabe behandelt zum größten Teil den freien Fall.

a) Berechnen Sie den Betrag der Absprunggeschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$. (**1 Punkt**)

Antwort:

Da nur der Höhenunterschied zwischen dem Startpunkt und dem Absprungpunkt der Schanze angegeben ist, ist die einzige Möglichkeit die Anwendung von Energieerhaltung. Da die Bewegung im Schwerefeld der Erde stattfindet, ist die Summe aus kinetischer Energie der Springerin und ihrer potentiellen Energie im Schwerefeld erhalten. (**0.5 Punkte**)

Es gilt also:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Flugbahn bzw. den Ort der Springerin $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ als Funktion der Zeit t auf. Formulieren Sie die für die Flugbahn geltenden Anfangsbedingungen und lösen Sie die Bewegungsgleichung. (**2 Punkte**)

Antwort: Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems der Einfachheit halber in den Absprungpunkt. Wir betrachten dann die x-Richtung und die y-Richtung unabhängig.

x-Richtung: Keine externe Kraft wirkt entlang dieser Richtung, also

$$m \cdot a_x = 0 \Rightarrow v_x(t) = b \Rightarrow x(t) = b \cdot t + c\,, \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

wobei b und c Integrationskonstanten sind. Die Anfangsbedingungen sind:

$$v_x(0) \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow b = v_0$$
$$x(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c = 0$$

(**0.5 Punkte**) (Nur wenn beide Anfangsbedingungen da sind.)

y-Richtung: Entgegen der y-Achse wirkt die Schwerkraft, also

$$m \cdot a_y = -mg \Rightarrow v_y(t) = -g \cdot t + d \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + d \cdot t + e\,, \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

wobei d und e Integrationskonstanten sind. Die Anfangsbedingungen sind:

$$v_y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow d = 0$$
$$y(0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow e = 0$$

(**0.5 Punkte**) (Nur wenn beide Anfangsbedingungen da sind.)

Es ergibt sich also final:

$$x(t) = v_0 \cdot t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

c) Berechnen Sie den vertikalen Abstand d_y der Springerin vom Absprungpunkt als Funktion des horizontalen Abstands d_x der Springerin vom Absprungpunkt entlang der Flugbahn. Welche Abhängigkeit ergibt sich dabei von der Höhe h der Sprungschanze? (**1 Punkt**)
Hinweis: Verwenden Sie die Abstände d_x und d_y als positive Größen und beachten Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil a).

Antwort: Die gesuchten Abstände in Abhängigkeit der Zeit sind durch die vorherige Teilaufgabe bekannt, abzüglich eines zusätzlichen Minuszeichens für den Abstand in vertikaler bzw. y-Richtung, also $d_x = v_0 \cdot t$ und $d_y = \frac{1}{2}gt^2$. Um den vertikalen Abstand als Funktion des horizontalen Abstand auszudrücken, kann der horizontale Abstand nach t aufgelöst werden und dann diese Beziehung in den vertikalen Abstand eingesetzt werden.

$$t(x) = \frac{x}{v_0} \text{ bzw. } t(d_x) = \frac{d_x}{v_0}$$
$$\Rightarrow d_y = \frac{1}{2}g\left(\frac{d_x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}d_x^2 \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Nun kann noch das Ergebnis für v_0 aus Aufgabenteil a) eingesetzt werden, also

$$d_y = \frac{1}{4h}d_x^2\,. \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

d) Bestimmen Sie den horizontalen und vertikalen Abstand des Landepunkts $d_{x,1}$ und $d_{y,1}$ vom Absprungpunkt. (**1 Punkt**)

Antwort: Um den Landepunkt zu bestimmen, muss der Schnittpunkt der „Wurfparabel“ mit der Landebahn bestimmt werden. Die Landebahn wird durch die Funktion

$$y_L(x) = -x$$

beschrieben, da der Winkel zur Vertikalen 45° beträgt und die Landebahn den Ursprung des gewählten Koordinatensystems schneidet. Für den Schnittpunkt (x_1, y_1) gilt also:

$$y_L(x_1) = y(x_1)$$
$$\Leftrightarrow -x_1 = -\frac{1}{4h}x_1^2$$
$$\Rightarrow x_1 = 4h \qquad (\textbf{0.5 Punkte})$$

Es gilt also:

$$d_{x,1} = 4h$$
$$d_{y,1} = \frac{1}{4h}(4h)^2 = 4h$$

(**0.5 Punkte**)

e) Nennen Sie jeweils einen Effekt, welcher unter realen Bedingungen die Flugweite verkürzen bzw. verlängern könnte. (**1 Punkt**)

Antwort: Verkürzen: *Luftreibung* (quasi schon gegeben). (**0.5 Punkte**)

Verlängern: *Auftrieb* (durch Ski und Körper der Springerin als „Tragflügel“) – wird in der Vorlesung erst später besprochen. (**0.5 Punkte**)

Aufgabe 3: Curling (6 Punkte)

a) Zunächst betrachten wir den Abstoßvorgang. Die Spielerin drückt sich mit der Kraft $F = 360\,\mathrm{N}$ mit den Beinen von einer Startvorrichtung über eine Strecke von $s = 0{,}5\,\mathrm{m}$ ab und rutscht nach dem Abstoßvorgang zusammen mit dem Stein mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = |\vec{v}_0|$, siehe die Skizze. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_0. (**1,5 Punkte**)

Antwort: Die Geschwindigkeit v_0 lässt sich über die beim Abstoßvorgang verrichtete Arbeit berechnen. Mit der Kraft und der Strecke, über welche diese gewirkt hat, kann die verrichtete Arbeit berechnet werden. Diese Arbeit wandelt sich in kinetische Energie des Systems aus Spielerin und Scheibe um. (**0,5 Punkte**)

Die Arbeit ist in diesem Fall (konstante Kraft) gegeben durch

$$W = F \cdot s = 360\,\mathrm{N} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 180\,\mathrm{N\,m}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Es gilt dann für die kinetische Energie und die Geschwindigkeit

$$E_{\mathrm{kin},0} = \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 = W \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{M+m}} = \sqrt{\frac{360\,\mathrm{N\,m}}{90\,\mathrm{kg}}} = 2\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

b) Die Spielerin rutscht mit dem Stein bis zur Startlinie. Kurz vor Erreichen der Startlinie gibt die Spielerin dem Stein noch einen Schubs und lässt diesen dann los, siehe die Skizze. Nach dem Schubs hat die Spielerin die Geschwindigkeit $v_1 = |\vec{v}_1| = {}^6\!/_7 \cdot v_0$. Ist der Vorgang des Schubses vollkommen elastisch? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie sich überlegen, welche Erhaltungssätze gelten. Berechnen Sie im Anschluss die Geschwindigkeit $v_2 = |\vec{v}_2|$ des Steins nach dem Schubs. (**3 Punkte**)

Antwort: Es gibt hier vermeintlich zwei Möglichkeiten die Geschwindigkeit v_2 zu berechnen, Energie- und Impulserhaltung. *Letztere folgt direkt aus den Newtonschen Gesetzen und ist in Stoßvorgängen* immer *erfüllt.* (**0,5 Punkte**) *Falls direkt nur Impulserhaltung für die Geschwindigkeit verwendet wird, gibt es diesen halben Punkt nur, wenn begründet wird warum die kinematische Energieerhaltung nicht verwendet wird.*

Hier wird zunächst allgemein mit $v_1 = \alpha v_0$ gerechnet. Aus der Energieerhaltung würde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M+m)v_0^2 &= \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \\ (M+m)v_0^2 - \alpha^2 M v_0^2 &= mv_2^2 \\ v_0^2\left(\left(1-\alpha^2\right)M + m\right) &= mv_2^2 \Leftrightarrow v_2^2 = v_0^2\left(1 + \left(1-\alpha^2\right)\frac{M}{m}\right) \end{aligned}$$

folgen. (**0,5 Punkte**) *Falls direkt nur Impulserhaltung für die Geschwindigkeit verwendet wird, gibt es diesen halben Punkt nur, wenn begründet wird warum die kinematische Energieerhaltung nicht verwendet wird.*

Aus der Impulserhaltung folgt jedoch

$$\begin{aligned}(M+m)v_0 &= Mv_1 + mv_2\\ (M+m)v_0 - \alpha M v_0 &= mv_2\\ v_0\left((1-\alpha)M+m\right) = mv_2 &\Leftrightarrow v_2 = v_0\left(1+(1-\alpha)\frac{M}{m}\right).\end{aligned}$$

(**0,5 Punkte**)

In unserem Fall gilt $\alpha = 6/7$. Beide Gleichungen dann gleichzeitig zu erfüllen, ist nicht möglich. Deshalb muss „innere“ Energie umgewandelt werden. Der Schubs entspricht also einem unelastischen Stoß. (**0,5 Punkte**) *Den halben Punkt gibt es, wenn erkannt und begründet wird, dass der Stoß unelastisch ist.*

Beim Impuls gibt es keine analoge Umwandlung, er ist auch bei unelastischen Stößen erhalten, deshalb wird die Geschwindigkeit v_2 durch die Impulserhaltung bestimmt (**0,5 Punkte**) und es gilt im vorliegenden Fall

$$v_2 = v_0\left(1+\frac{1}{7}\frac{M}{m}\right) = v_0\left(1+\frac{1}{7}\frac{70\,\mathrm{kg}}{20\,\mathrm{kg}}\right) = \frac{3}{2}v_0 = 3\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\,. \qquad (\textbf{0,5 Punkte})$$

Es gibt keine Punkte, wenn nur die Energieerhaltung ohne Berücksichtigung der inneren Energie verwendet wird. Dieser Ansatz verletzt die Impulserhaltung und ist damit nicht richtig. Falls beide Erhaltungssätze ohne Erklärung, welche Geschwindigkeit die korrekte Geschwindigkeit ist, da stehen, gibt es ebenso keine Punkte.

(Nicht verlangt: Die richtige Energiebilanz ist deshalb

$$\frac{1}{2}(M+m)v_0^2 = \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \Delta U\,,$$

wobei ΔU die Änderung der inneren Energie repräsentiert. Wenn die Geschwindigkeit aus der Impulserhaltung verwendet wird um ΔU zu berechnen wird

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\frac{M}{49}\left(1+\frac{M}{m}\right)v_0^2$$

erhalten. Dies bedeutet, dass innere Energie abgezogen wurde, um die kinetische Energie des Endzustands aufbringen zu können. Dies kann z.B. Energie sein, welche durch die Stoßbewegung der Spielerin umgesetzt wird.)

c) Der Stein bewegt sich nun mit konstanter Geschwindigkeit v_2 auf einen auf dem Spielfeld schon platzierten und ruhenden Stein zu. Zeigen Sie, dass bei einem vollständig elastischen Zusammenstoß, nach welchem sich beide Steine bewegen, der Winkel zwischen den Bewegungsrichtungen der beiden Steine 90° betragen muss. (**1,5 Punkte**)

Antwort: Der Zusammenstoß der beiden Steine kann als zweidimensionaler Stoß zweier gleicher Massen beschrieben werden. Im Folgenden beschreibt $\vec{v}_i$ die Geschwindigkeit des sich vor dem Stoß bewegenden Steins, $\vec{v}_f$ dessen Geschwindigkeit nach dem Stoß und $\vec{v}_f'$ die Geschwindigkeit des initial ruhenden Steins nach dem Stoß. Bei diesem elastischen Stoß gilt wieder Energieerhaltung und Impulserhaltung.

Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 &= \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}_f'^2 \\ \Leftrightarrow \vec{v}_i^2 &= \vec{v}_f^2 + \vec{v}_f'^2 \qquad (\textbf{0,5 Punkte}) \end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$\begin{aligned} m\vec{v}_i &= m\vec{v}_f + m\vec{v}_f' \\ \Leftrightarrow \vec{v}_i &= \vec{v}_f + \vec{v}_f' \qquad (\textbf{0,5 Punkte}) \end{aligned}$$

Aus der Gleichung der Impulserhaltung folgt, dass die Geschwindigkeitsvektoren der Steine ein Dreieck bilden. Aus der Energieerhaltung folgt, dass die Seiten dieses Dreiecks den Satz des Pythagoras erfüllen und damit ein rechter Winkel zwischen $\vec{v}_f$ und $\vec{v}_f'$ vorliegen muss.

Dies lässt sich auch explizit zeigen, durch Quadrieren der Impulserhaltungsgleichung.

$$\vec{v}_i^2 = (\vec{v}_f + \vec{v}_f')^2 = \vec{v}_f^2 + \vec{v}_f'^2 + 2\vec{v}_f \cdot \vec{v}_f'$$

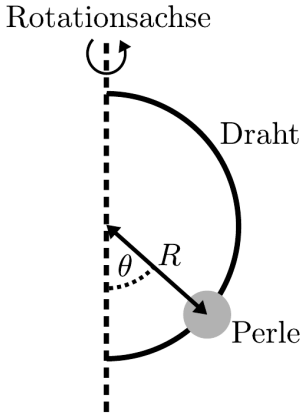
Wird dies mit der Energieerhaltungsgleichung verglichen, so folgt sofort, dass entweder einer der beiden Geschwindigkeitsvektoren im Endzustand verschwinden muss (ist hier nicht gesucht, da explizit in der Aufgabenstellung steht, dass sich beide Steine bewegen sollen) oder dass

$$\vec{v}_f \cdot \vec{v}_f' = 0\,.$$

Dies bedeutet jedoch ebenso, dass $\vec{v}_f \perp \vec{v}_f'$. (**0,5 Punkte**) *Den halben Punkt gibt es entweder für die obige Erklärung mit dem Dreieck oder für das explizite Zeigen.*

Aufgabe 4: Perle an Draht (4 Punkte)

Eine Perle mit einer Masse m gleitet reibungsfrei auf einem halbkreisförmigen Drahtstück mit dem Radius R, das sich mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit von ω um die vertikale Achse dreht, siehe Skizze unten. Berechnen Sie den Winkel θ zwischen der Rotationsachse des Drahtstücks und der Verbindungslinie vom Mittelpunkt des Halbkreises zur Perle, bei dem die Perle in Bezug auf den rotierenden Draht an der gleichen Stelle bleibt.



Antwort: Zunächst überlegen wir uns, welche Kräfte in der Situation wirken. Es wirkt die Schwerkraft auf die Perle und die Kraft, welche durch den Draht auf die Perle ausgeübt wird. Die Schwerkraft wirkt mit dem Betrag $F_G = mg$ senkrecht nach unten. (**0,5 Punkte**)
Da die Kugel reibungsfrei gleitet, wirkt die Kraft des Drahtes auf die Perle stets senkrecht zum Draht, ist also eine Normalkraft mit Betrag F_N. (**0,5 Punkte**)
Damit die Perle in einer stationären Position verbleibt, muss die vertikale Komponente der Normalkraft des Drahtes die Schwerkraft der Kugel ausgleichen (**0,5 Punkte**) und die horizontale Komponente der Normalkraft bringt die Zentripetalkraft für die Kreisbewegung auf. (**0,5 Punkte**)
Es gilt also:

$$F_N \sin\theta = mr\omega^2 \quad (\textbf{0,5 Punkte}) \tag{1}$$

$$F_N \cos\theta = mg \quad (\textbf{0,5 Punkte}) \tag{2}$$

wobei r der Radius der von der Perle durchlaufenen Kreisbahn (oder deren Abstand zur Rotationsachse) ist und ω die Winkelgeschwindigkeit der Perle bzw. des rotierenden Drahtstücks beschreibt. Hieraus folgt sofort

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\omega^2}{g}. \tag{3}$$

Unter Verwendung von $r = R\sin\theta$ (**0,5 Punkte**) folgt

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\omega^2}{g} = \frac{\omega^2 R\sin\theta}{g} \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R} \tag{4}$$

Für den gesuchten Winkel gilt also

$$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right). \quad (\textbf{0,5 Punkte}) \tag{5}$$