Karlsruhe Institute of Technology

Physikalisches Institut
Karlsruher Institut für Technologie

Prof. Wulf Wulfhekel
Simon Gerber

17. Februar 2026

Lösung für Probeklausur

WS 2025/26

Aufgabe 1: Energieerhaltung (6 Punkte)

Sie wollen eine Achterbahn konstruieren. Am höchsten Punkt h_0 startet ein Wagen (Masse m) aus der Ruhe. Er gleitet von h_0 bis $h = 0$ abwärts und direkt anschließend in einen Looping (Kreisbahn mit Radius r).

[**A**] *Wie groß ist die kinetische Energie des Wagens unter Vernachlässigung der Reibung, wenn sich der Wagen in der Höhe $h(t)$ befindet ($0 < h(t) < h_0$)? Berechnen Sie die Geschwindigkeit v des Wagens in Abhängigkeit von $h(t)$.(2P)*
0.5P für Energieerhaltung, 0.5P für $E_{\text{kin}}(h(t))$, 0.5P für $E_{\text{kin}}(t)$ und 0.5P für $v(t)$

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} &= \text{konst.} = mgh_0 \\
E_{\text{kin}}(h(t)) &= mg(h_0 - h(t)) \\
E_{\text{kin}}(t) &= \frac{1}{2}mv^2(t) \\
v(t) &= \sqrt{2g(h_0 - h(t))}
\end{aligned}$$

[**B**] *Wie hoch darf der Looping maximal sein ($2 \cdot r_{max} < h_0$), damit die Passagiere nicht aus dem Wagen fallen? (2P)*
0.5P für Kraftbedingung, 0.5P Einsetzen mit Formel für ω, 0.5P Einsetzen aus vorheriger Gleichung und Ungleichung daraus folgend, 0.5P für Endformel zwischen r und h_0
Höchster Punkt im Looping gegeben durch $h = 2r$. An diesem Punkt gilt $F_z > F_g$. Somit gilt für die Bedingungen mit $\omega = \frac{v}{r}$

$$\begin{aligned}
mr\omega^2 &> mg \\
r\frac{v^2}{r^2} &> g
\end{aligned}$$

Mit $v^2 = 2g(h_0 - 2r)$ aus vorheriger Teilaufgabe folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}2g(h_0 - 2r) &> g \\
2\frac{h_0}{r} - 4 &> 1 \\
\frac{h_0}{r} &> \frac{5}{2} \\
r &< \frac{h_0}{2.5}
\end{aligned}$$

[**C**] *Das wie vielfache seines Gewichts spürt ein Passagier maximal beim Durchfahren der Bahn (wo und warum)? Falls Sie B nicht gelöst haben, rechnen Sie mit $r = h_0/(1,5)$. (2P)*
0.5P für Punkt unten im Looping bestimmen, 0.5 für Formel aus Energieerhaltung, 0.5P

für Kraftgleichung, 0.5P für $F_{\max}$.
Die Kraft ist am größten am tiefsten Punkt des Loopings gegeben mit $\vec{F}_Z \parallel \vec{F}_G$

$$\begin{aligned} W_{\text{kin}} &= W_{\text{pot}} \\ \rightarrow v_{\max} &= \sqrt{2gh_0} \end{aligned}$$

Für die Kraft folgt daraus

$$\begin{aligned} F_{\max} &= F_g + F_z = mg + m\frac{v_{\max}^2}{r} \\ &= mg + \frac{m}{r}2gh_0 \\ &= mg + \frac{m}{h_0}5gh_0 \\ F_{\max} &= 6mg \end{aligned}$$

mit der Beziehung aus der vorherigen Teilaufgabe $r = \frac{h_0}{2.5}$ folgt, dass der Passagier das 6-fache seines Körpergewichts spürt.

Aufgabe 2: Mechanische Wellen (8 Punkte)

Ein Glaszylinder (mit Boden unten) ist insgesamt $H = 1\,\text{m}$ hoch und oben offen. Er lässt sich auf beliebige Höhe h $(0 < h < H)$ mit Wasser füllen. Eine Stimmgabel der Frequenz $f = 680\,\text{Hz}$ wird über die (obere) Öffnung gehalten. Schallgeschwindigkeit in Luft ist gegeben durch $v_L = 340\,\text{m/s}$.

[A] *Schreiben Sie die Wellengleichung für eine mechanische Welle (in einer Dimension) auf. Was ist der Unterschied zwischen einer transversalen und einer longitudinalen Welle? Nennen Sie jeweils ein Beispiel. (2.5P)*
0.5P für Wellengl., 0.5P für Erklärung transversal, 0.5P für Beispiel transversal, 0.5P für Erklärung longitudinal, 0.5P für Beispiel longitudinal.
Die Wellengleichung ist gegeben als

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - v_{\text{ph}}^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

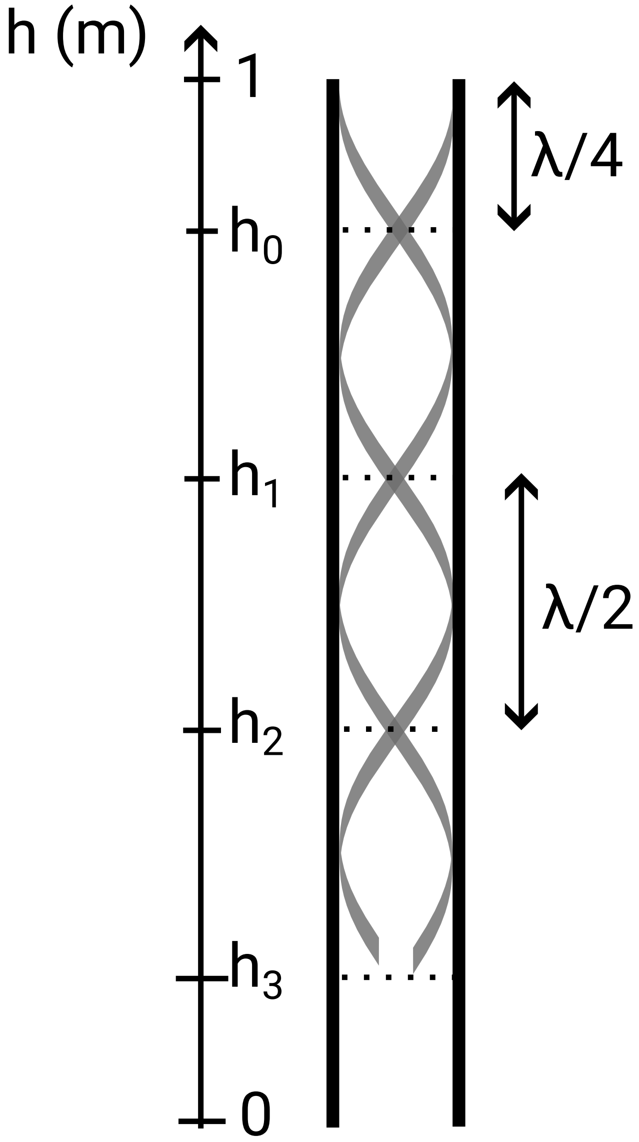
Eine transversale Welle ist definiert als Schwingung $\perp$ Ausbreitungsrichtung, gegeben zum Beispiel für Wasseroberfläche oder Gitarrensaite.
Eine longitudinale Welle ist definiert als eine Schwingung $\parallel$ Ausbreitungsrichtung, zum Beispiel für Schall

[B] *Wie groß ist die Wellenlänge λ der von der Stimmgabel erzeugten Schallwelle (Zahlenwert)? (1P)*
0.5P für Formel λ, 0.5P für Zahlenwert
Gegeben durch

$$\lambda = \frac{v_{\text{ph}}}{f} = \frac{v_L}{f} = \frac{340\,\text{m/s}}{680\,\text{Hz}} = 0{,}5\,\text{m}$$

[C] *Der Zylinder ist zunächst ganz mit Wasser gefüllt $(h = H)$ und wird dann kontinuierlich entleert $(h \rightarrow 0)$. Berechnen Sie, bei welchen Füllhöhen h_R Resonanz auftritt (Zahlenwerte)? Skizzieren Sie maßstabsgetreu die Höhe/Positionen der Knoten und Bäuche der Schwingungsamplitude für diese Fälle. (4.5P)*
1P für gute Skizze, 0.5P jeweils für Knoten und Bauchbedingung am oberen Ende und Wasseroberfläche, 0.5P für allgemeine Längenbedingung und jeweils 0.5P für jede der vier Resonanzen
Es gilt für die Schwingungen:

- Oben offen $\Rightarrow$ maximale Schwingungsamplitude („Bauch")
- Wasseroberfläche $\Rightarrow$ minimale Schwingungsamplitude („Knoten")



Allgemein gilt für die Resonanzen

$$l_n = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} = \frac{(2n+1)\lambda}{4}$$

für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.
Für die 1.Resonanz gilt, der Knoten ist bei $l_0 = \frac{\lambda}{4} = 12{,}5\,\mathrm{cm}$
und damit bei Füllhöhe:

$$1\,\mathrm{m} - l_0 = h_0 = 87{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Die 2. Resonanz ist gegeben bei

$$l_1 = \frac{3\lambda}{4} = 37{,}5\,\mathrm{cm}$$
$$h_1 = 62{,}5\,\mathrm{cm}.$$

Die 3.Resonanz geben bei

$$l_2 = \frac{5\lambda}{4} = 62{,}5\,\mathrm{cm}$$
$$h_2 = 37{,}5\,\mathrm{cm}$$

Die vierte Resonanz gegeben als

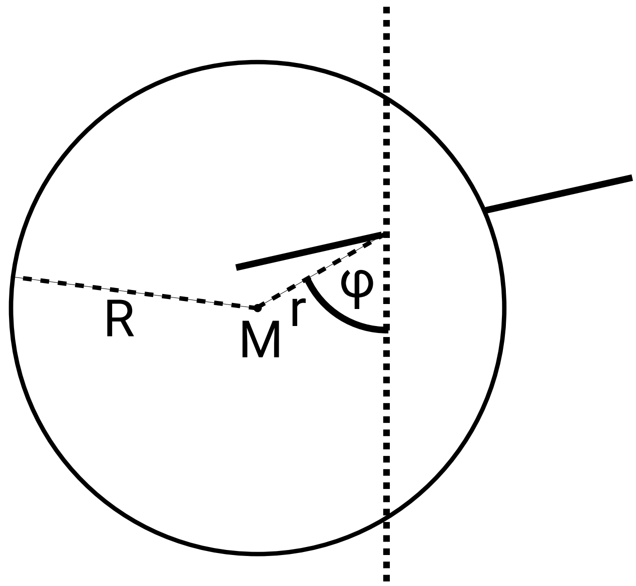
$$l_3 = \frac{7\lambda}{4} = 87{,}5\,\mathrm{cm}$$
$$h_3 = 12{,}5\,\mathrm{cm}$$

Da für weitere Resonanzen gilt $l_4 = \frac{9}{4}\lambda > 1\,\mathrm{m}$ existiert keine weitere Resonanz

Aufgabe 3: Schwingung (7 Punkte)

Eine Kreisscheibe der Masse m und dem Radius R wird nicht in der Mitte, sondern im Abstand r $(0 < r < R)$ vom Mittelpunkt senkrecht von einer Stange durchbohrt. Die Stange ist horizontal gelagert und dient als Achse für dieses Scheiben-Pendel. Reibung wird vernachlässigt.

[**A**] *Geben Sie das Trägheitsmoment Θ der Kreisscheibe bezüglich einer Drehung um die Achse der Stange an. Welches Drehmoment M ist nötig, die Kreisscheibe um den Winkel φ aus der Ruhelage auszulenken? Machen Sie sich eine Skizze, um φ zu definieren. (2P)*
1P für Skizze, 0.5 für Trägheitstensor verschoben, 0.5P für Drehmoment
Trägheitsmoment bezüglich der Aufhängung gegeben als



$$\Theta = \frac{1}{2}mR^2 + mr^2.$$

Das Drehmoment ist gegeben als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g$$
$$M = r \cdot m \cdot g \sin\varphi$$

[**B**] *Stellen Sie die Schwingungsdifferentialgleichung auf und geben Sie eine Lösung für kleine Winkel an. Wie groß ist die Kreisfrequenz ω_0 in Ihrer Lösung? (2.5P)*
0.5P für Startformel, 0.5P für aufgestelltes DGL, 0.5P für Kleinwinkelnäherung, 0.5P für Ansatz, 0.5P für Lösung
Bewegungsgleichung gegeben als

$$M = \dot{L} = \Theta\ddot{\varphi}$$
$$r \cdot m \cdot g \sin\varphi + \Theta\ddot{\varphi} = 0.$$

Für kleine Winkel gilt $\sin\varphi \approx \varphi$ und damit

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgr}{\Theta}\varphi = 0$$

Hierfür können wir folgenden Ansatz für φ verwenden, um die DGL zu lösen $\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$ und dadurch folgt

$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega_0^2 \varphi_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgr}{\Theta}}$$

[C] *Welche Schwingungsdauern ergeben sich für $r = R$ und $r = 0$? (2.5P)*
0.5P für Gleichung Schwingungsdauer, 1P für Formel mit eingesetztem Trägheitstensor, 0.5P jeweils für Grenzfall Betrachtung
Schwingungsdauern sind gegeben als

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgr}}$$

mit Einsetzen von dem Trägheitsmoment Θ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mR^2 + mr^2}{mgr}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2 + r^2}{gr}}.$$

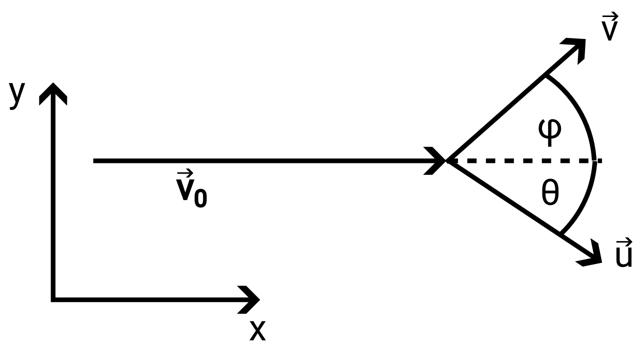
Hierfür kann man sich die Grenzfälle anschauen:

- Für $r \to 0$: $T \to \infty$
- Für $r = R$: $T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}R^2+R^2}{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$

Aufgabe 4: Stoßprozesse (7 Punkte)

Ein Teilchen 1 (Masse m_1) mit der Geschwindigkeit v_0 stößt mit einem ruhenden Teilchen 2 (Masse m_2) zusammen und wird um den Winkel φ aus seiner Einfallsrichtung abgelenkt. Seine Geschwindigkeit nach dem Stoß ist v. Das zweite Teilchen wird gestreut, wobei sein Geschwindigkeitsvektor u den Winkel θ mit der Einfallsrichtung des ersten Teilchens bildet.

[A] *Berechnen Sie $\tan(\theta)$ in Abhängigkeit von v, v_0 und φ. (3P)*
0.5P jeweils für x und y- Komponente, 0.5P jeweils für Formeln nach umstellen, 0.5P für Division, 0.5P für Endformel
Impulserhaltung komponentenweise $\vec{p} =$ konstant



(I) $m_1 v_0 = m_1 v \cos\varphi + m_2 u \cos\theta$ (x-Komponente) (1)

(II) $0 = m_1 v \sin\varphi - m_2 u \sin\theta$ (y-Komponente) (2)

Umstellen:

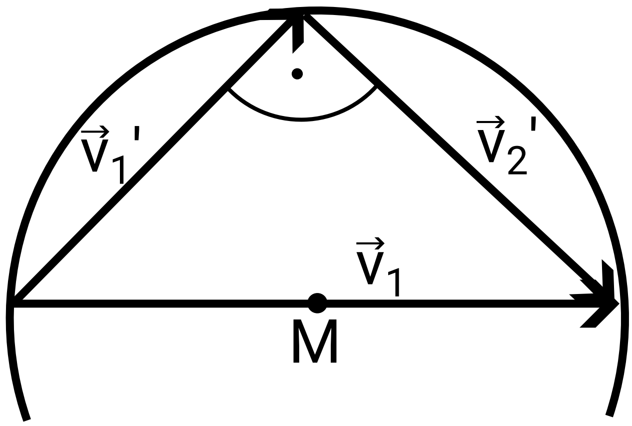
$$m_2 u \cos\theta = -m_1 v \cos\varphi + m_1 v_0 \tag{Ia}$$
$$m_2 u \sin\theta = m_1 v \sin\varphi \tag{IIa}$$

Division von (IIa) durch (Ia):

$$\tan\theta = \frac{m_1 v \sin\varphi}{m_1 v_0 - m_1 v \cos\varphi} = \frac{v \sin\varphi}{v_0 - v\cos\varphi}.$$

Nun betrachten wir den Stoßprozess von zwei Kugeln: Kugel 1 trifft mit v_1 auf eine ruhende Kugel 2 mit gleicher Masse und gleichem Durchmesser. Der „transversale "Abstand zwischen den Kugelmittelpunkten wird Stoßparameter b genannt.

[B] *Zeigen Sie, dass sich die beiden Kugeln im Fall eines völlig elastischen Stoßes immer unter einem rechten Winkel voneinander entfernen, unabhängig vom genauen Wert von b. Hinweis: Ignorieren Sie b für diesen Aufgabenteil. Was gilt bei einem elastischen Stoß? (2P)*
0.5P für Impulserhaltung, 0.5P für Energieerhaltung, 0.5P für Satz von Thales, 0.5P für Schlussfolgerung daraus
Impulserhaltung gibt



$$m\vec{v}_1 = m\vec{v}_1' + m\vec{v}_2' \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'.$$

und für die Energieerhaltung gilt

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$

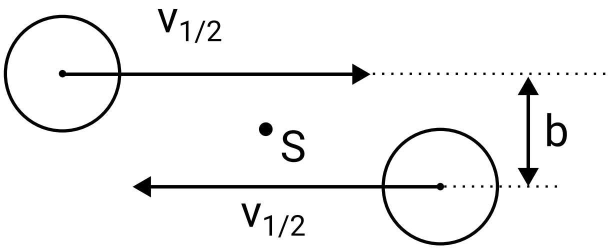
Beides ist genau dann erfüllt, wenn $\vec{v}_1' \perp \vec{v}_2'$. (Geometrische Interpretation über den Thaleskreis.)

[C] *Nach einem völlig inelastischen Stoß, der aber die Form der Kugeln unverändert lässt, ist der gemeinsamen Translationsbewegung eine Rotation der Kugeln um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S überlagert. Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit dieser Rotation linear vom Stoßparameter b abhängt! Benutzen Sie für Ihre Überlegung ein Bezugssystem, in dem der gemeinsame Schwerpunkt der beiden Kugeln ruht und betrachten Sie den Drehimpuls. (2P)*
0.5P für L_{vor}, 0.5P für L_{nach}, 0.5P für Drehimpulserhaltung, 0.5P für finale Proportionalität
Vor dem Stoß: Drehimpuls um den Schwerpunkt S

$$L_{\text{vor}} = 2 \cdot m \cdot \frac{v_1}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2}mv_1 b.$$

Nach dem Stoß: Rotation des Systems um S

$$L_{\text{nach}} = \Theta_S \omega.$$



Im Schwerpunktssystem bewegen sich beide Kugeln wegen gleicher Massen mit den Geschwindigkeiten $+v_1/2$ bzw. $-v_1/2$.

Drehimpulserhaltung:

$$L_{\mathsf{vor}} = L_{\mathsf{nach}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} mvb = \Theta_S \omega, \qquad \Theta_S = \text{konstant}.$$

$$\omega \propto b.$$

Aufgabe 5: Spezielle Relativitätstheorie

In der Höhe von $h = 9{,}6\,\mathrm{km}$ kommt es zur Kollision eines kosmischen Teilchens der Höhenstrahlung und der Atmosphäre der Erde. Dabei wird ein Myon erzeugt. Myonen leben im Schnitt nur etwa $\tau = 2 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}$ bevor sie zerfallen.

[A] *Haben die Myonen (im Mittel) eine Chance, die Erdoberfläche zu erreichen, wenn wir die relativistische Dilatationen außer Acht lassen? Begründen Sie ihre Antwort!*
Wenn die relativistische Dilatation außer Acht gelassen wird, gilt für die Geschwindigkeit und damit für die minimal benötigte Zeit

$$v_{\max} = c$$
$$t_{min} = \frac{h}{v_{\max}} = \frac{9{,}6\,\mathrm{km}}{300\,000\,\mathrm{km/s}}$$
$$t_{min} = 3{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}$$

Die minimal benötigte Zeit ist somit deutlich größer als die Lebenszeit der Myonen. Die Myonen werden die Erdoberfläche nicht erreichen.

[B] *Wie schnell müssen die Myonen ungefähr sein, damit sie mit relativistischer Zeitdilatation die Erdoberfläche erreichen? Rechnen Sie zuerst aus, wie groß γ dafür sein müsste. Nutzen Sie im Weiteren:*

$$(1 \pm x)^{1/2} \approx 1 \pm \frac{1}{2} \cdot x \quad \text{(für kleine x)}$$

γ lässt sich berechnen mit

$$t' = \gamma \cdot t \rightarrow \gamma = \frac{t'}{t}.$$

Für die Zeiten gilt

$$t' = 3{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} = 32\,\mu\mathrm{s}$$
$$t = 2\,\mu\mathrm{s}$$
$$\rightarrow \gamma = \frac{t'}{t} \approx 16$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit

$$
\begin{aligned}
\gamma^2 &= \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
1-\frac{v^2}{c^2} &= \frac{1}{16^2} \\
v^2 &= (1-\frac{1}{16^2})\cdot c^2 \\
v &= c\cdot\sqrt{(1-\frac{1}{16^2})}
\end{aligned}
$$

Hierfür können wir nun die gegebene Näherung einsetzen und erhalten

$$
\begin{aligned}
&v = c\cdot(1-\frac{1}{2}(\frac{1}{16^2})) \\
&v \approx 0.998\cdot c
\end{aligned}
$$

Die Myonen müssen ungefähr mit $v \approx 0.998{\cdot}c$ fliegen, um im Mittel die Erdoberfläche zu erreichen.