

# EXPERIMENTALPHYSIK I: MECHANIK

Prof. Dr. W. de Boer

Vorlesung Wintersemester 2003/2004

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 21. Januar 2004

Skript der Vorlesung EXPERIMENTALPHYSIK I  
von Herrn Prof. Dr. W. DE BOER im Wintersemester 2003/2004  
basierend auf TeX File der Vorlesung von Prof. Müller und Dr. H. Hartmann,  
getext von Marco Schreck.

Dieses Skript erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit und dient nur als Anleitung beim Studium.

Kommentare, Fehler, Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an [Wim.de.Boer@cern.ch](mailto:Wim.de.Boer@cern.ch).



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Grundbegriffe der Physik . . . . .	5
1.2	Physikalische Größen/Einführung in die Vektorrechnung . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Klassische Mechanik von Massenpunkten</b>	<b>15</b>
2.1	Mechanik von Massenpunkten . . . . .	15
2.1.1	Bewegung in einer Dimension . . . . .	15
2.1.2	2-dimensionale Bewegung . . . . .	18
2.1.3	Dreidimensionale Bewegung . . . . .	18
2.2	Messungen und Datenauswertung . . . . .	20
2.2.1	Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	20
2.2.2	Fehlerfortpflanzung . . . . .	21
2.3	Die Newtonschen Gesetze . . . . .	22
2.3.1	Anwendungen von Newtons Gesetzen . . . . .	23
2.3.2	Kreisbewegung . . . . .	30
2.3.3	Sonderfall: Konstante Kreisbewegung . . . . .	32
2.3.4	Rotationsdynamik . . . . .	34
2.3.5	Das Federpendel . . . . .	37
2.3.6	Reibung . . . . .	41
2.3.7	Arbeit und Energie . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Lineare Bewegungen für Systeme von Massenpunkten</b>	<b>59</b>
3.1	Schwerpunkt und Impuls (CM=center of mass) . . . . .	59
3.2	Elastische und unelastische Stöße . . . . .	64
3.2.1	Streuung eines Teilchens in einem Potential $V = a/r$ . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Rotationen für Systeme von Massenpunkten</b>	<b>73</b>
4.1	Rotationskinematik . . . . .	73
4.2	Rotationsdynamik . . . . .	75
4.2.1	Rotierende Bezugssysteme . . . . .	83
4.3	Rollbewegungen . . . . .	84
4.4	Mechanische Stabilität . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Gravitation</b>	<b>91</b>
5.1	Das Gravitationsgesetz . . . . .	91
5.1.1	Der historische Weg zum Gravitationsgesetz . . . . .	91
5.1.2	Das Newtonsche Gravitationsgesetz . . . . .	94
5.2	Das Gravitationspotential . . . . .	96
5.3	Planetenbahnen, Keplersche Gesetze . . . . .	98
5.4	Herleitung der Bahnkurven . . . . .	99
5.5	Gravitation in Massenverteilungen . . . . .	100
<b>6</b>	<b>Schwingungen und Wellen</b>	<b>109</b>
6.1	Wellenausbreitung in der Mechanik . . . . .	109
6.1.1	Schwingungen (Wiederholung) . . . . .	109
6.1.2	Wellen . . . . .	122
6.1.3	Anwendung: Akustik, Schallwellen . . . . .	130
6.1.4	Wellen von bewegten Quellen/Empfängern (Doppler-Effekt) . . . . .	136
6.1.5	Überlagerung von Wellen . . . . .	138

<b>7</b>	<b>Relativistische Mechanik</b>	<b>151</b>
7.1	Bewegte Bezugssysteme, Transformationen . . . . .	151
7.2	Relativistische Kinematik . . . . .	153
7.2.1	Spezielles Relativitätsprinzip . . . . .	153
7.2.2	Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit . . . . .	153
7.2.3	Wiederholung: Galileitransformationen . . . . .	155
7.2.4	Lorentztransformation . . . . .	156
7.2.5	Relativistische Effekte . . . . .	157
7.3	Relativistische Dynamik . . . . .	160
7.4	Lorentzinvariante Vierervektoren im 4-dimensionalen Minkowski Raum . . . . .	162
7.4.1	Anwendung der Vierervektoren: . . . . .	164
<b>8</b>	<b>Physikalische Eigenschaften fester Körper und Flüssigkeiten</b>	<b>165</b>
8.1	Physik fester Körper . . . . .	165
8.1.1	Elastische Verformung . . . . .	165
8.1.2	Härte eines Festkörpers . . . . .	174
8.1.3	Thermische Eigenschaften von Festkörpern . . . . .	174
8.2	Mechanik von Flüssigkeiten . . . . .	178
8.2.1	Hydrostatik . . . . .	178
8.2.2	Hydrostatischer Druck durch Gravitation . . . . .	179
8.2.3	Hydrodynamik . . . . .	183
8.3	Licht und Materie - Korpuskel und Welle . . . . .	186
8.3.1	Licht als elektromagnetische Welle . . . . .	186
8.3.2	Licht als Korpuskel . . . . .	187
8.3.3	Materie als Welle . . . . .	188
8.3.4	Elektromagnetische Wellen im Vakuum im Dreidimensionalen . . . . .	190
8.3.5	Materiewellen . . . . .	191

# Kapitel 1

## Einleitung

### Was ist Physik?

Die Physik ist die mathematischste aller Naturwissenschaften. Durch sie wird die Natur in quantitativer, universeller Weise beobachtet und beschrieben. Die Beobachtungen werden auf fundamentale Gesetze zurückgeführt.

- Nur reproduzierbare Phänomene werden erfaßt!

### 1.1 Grundbegriffe der Physik

a.) Internationale Konvention (SI (Système International))

\* Länge: Meter (m)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Länge	Meter	m	$10^{-14}$

1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht in Vakuum während der Dauer von  $\frac{1}{299\,792\,458}$  Sekunden durchläuft.

\* Zeit: Sekunde (s)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Zeit	Sekunde	s	$10^{-14}$

1 Sekunde ist das 9192631770-fache der Periodendauer, der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklides Cs<sup>133</sup> entsprechenden Strahlung.

\* Masse: Kilo (kg)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Masse	Kilogramm	kg	$10^{-9}$

1 Kilogramm ist die Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

\* Temperatur: Kelvin (K)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Temperatur	Kelvin	K	$10^{-6}$

1 Kelvin ist der 273,16-te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.

\* elektrischer Strom: Ampère (A)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Stromstärke	Ampère	A	$10^{-6}$

1 Ampère ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen elektrischen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge elektrodynamisch die Kraft  $\frac{1}{5\,000\,000}$  Kilogrammometer durch Sekundequadrat hervorrufen würde.

\* Lichtstärke: Candela (Cd)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Lichtstärke	Candela	cd	$5 \cdot 10^{-3}$

1 Candela ist die Lichtstärke, mit der  $\frac{1}{600\,000}$  Quadratmeter der Oberfläche eines schwarzen Strahlers bei der Temperatur des beim Druck 101 325 Kilogramm durch Meter und durch Sekundequadrat erstarrenden Platins senkrecht zu seiner Oberfläche leuchtet.

\* Substanzmenge: Mol (mol)

Basisgröße	Basiseinheit	Symbol	relative Genauigkeit
Stoffmenge	mol	mol	$10^{-6}$

1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems bestimmter Zusammensetzung, das aus ebenso vielen Teilchen besteht, wie  $\frac{12}{1000}$  Kilogramm des Nuklides  $C^{12}$ .

b.) Abgeleitete Größen

Größe	Name der SI-Einheit (Basiseinheit bzw. abgeleitete Einheit)	Symbol, Zusammenhang mit Basiseinheiten
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
Fläche	Quadratmeter	$m^2$
Volumen	Kubikmeter	$m^3$
Frequenz	Hertz	$Hz = \frac{1}{s}$
Geschwindigkeit	Meter/Sekunde	$\frac{m}{s}$
Beschleunigung	Meter/Quadratsekunde	$\frac{m}{s^2}$
Kraft	Newton	$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$
Druck	Pascal	$Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m \cdot s^2}$
Arbeit, Energie, Wärmemenge	Joule	$J = Nm = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$
Leistung	Watt	$W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$
Dichte	Kilogramm/Kubikmeter	$\frac{kg}{m^3}$
Temperatur	Kelvin	K
Stromstärke	Ampère	A
Ladung	Coulomb	$C = As$
Stromdichte	Ampère/Quadratmeter	$\frac{A}{m^2}$
Spannung	Volt	$V = \frac{J}{C} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A}$
Widerstand	Ohm	$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3 \cdot A^2}$

Fortsetzung ...

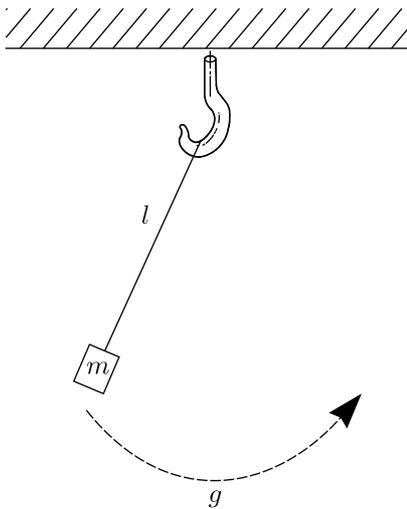
... Fortsetzung

Größe	Name der SI-Einheit (Basiseinheit bzw. abgeleitete Einheit)	Symbol, Zusammenhang mit Basiseinheiten
	Farad	$F = \frac{C}{V} = \frac{s^4 \cdot A^2}{kg \cdot m^2}$
elektrische Feldstärke	Volt/Meter	$\frac{V}{m} = \frac{kg \cdot m}{s^3 \cdot A}$
magnetische Feldstärke	Ampère/Meter	$\frac{A}{m}$
magnetische Induktion	Tesla	$T = \frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{kg}{s^2 \cdot A}$
Induktivität	Henry	$H = \frac{V \cdot s}{A} = \frac{kg \cdot m^2}{s^2 \cdot A^2}$
Lichtstärke	Candela	cd
Energiedosis	Gray	$Gy = \frac{J}{kg} = \frac{m^2}{s^2}$
Aktivität	Becquerel	$Bq = \frac{1}{s}$
Stoffmenge	Mol	mol

**Dimensionsbetrachtungen:**

**Beispiel: Formel für Schwingungsdauer eines Pendels**

**Ansatz:**



$$t \propto m^a \cdot l^b \cdot g^c$$

a, b, c sind zu bestimmen.

**Dimensionen :**

$$T^1 \propto M^a \cdot L^b \cdot \frac{L}{T^2}^c = M^a \cdot L^{b+c} \cdot T^{-2c}$$

**Vergleiche Exponenten:**

$$1 = -2c$$

$$0 = a$$



$$0 = b + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}; b = +\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow t \propto l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Wir werden im Thema „Schwingungen und Wellen“ feststellen, daß die Formel für die Schwingungsdauer

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \text{ lautet.}$$

c.) Präfixe

Zehnerpotenz	Name	Abkürzung	Beispiel
$10^{15}$	Peta	P	PByte
$10^{12}$	Tera	T	TeV
$10^9$	Giga	G	GW
$10^6$	Mega	M	MW
$10^3$	Kilo	k	kg
$10^2$	Hekto	h	hl
$10^1$	Deka	da	Dekade
$10^{-1}$	Dezi	d	dm
$10^{-2}$	Zenti	e	cm
$10^{-3}$	Milli	m	mm
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$	$\mu\text{m}$
$10^{-9}$	Nano	n	nV
$10^{-12}$	Piko	p	pF, pV
$10^{-15}$	Femto	f	fs

d.) Definitionen

Meter	<1799: <1960: heute:	$\frac{1}{10^7}$ Umfang Erdquadrant Platin-Iridium-Stab: 1 m Laufstrecke des Lichtes im Vakuum in $\frac{1}{299792458}$ s $\frac{\delta l}{l} \approx 10^{-14}$
Sekunde	1964:	1s = 9192651770 Schwingungen des Cs-Atoms $\frac{\delta t}{t} \approx 10^{-13}$
Kilogramm		Masse des Urkilogramms in Sèvres Kopie z.B. in Physikalisch-Technischer Bundesanstalt in Braunschweig $\frac{\delta m}{m} \approx 10^{-9}$

e.) Beispiele

Länge	1 cm = $\frac{1}{100}$ m 1 $\mu\text{m}$ 1 nm 1 Å = $10^{-10}$ m 1 fm = $10^{-15}$ m 1 AE = $150 \cdot 10^6$ km	Käfer Bakterie Wellenlänge Licht Atom Proton (Abstand Erde-Sonne)
-------	--	--

Fortsetzung ...

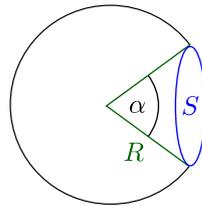
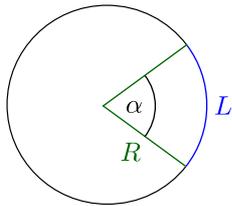
... Fortsetzung

Zeit	$1 \text{ Ly} = 9,5 \cdot 10^{12} \text{ km}$ $1 \text{ Ps (Parsec)} = 3,1 \text{ Ly}$  $1 \text{ Jahr} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s} \approx \pi \cdot 10^7 \text{ s}$ $T_{\text{Universum}} = 10^{15} \text{ Jahre}$ $T_{\text{Topquark}} = 6 \cdot 10^{-25} \text{ s}$ $T_{\text{Proton}} > 10^{32} \text{ Jahre}$	
Masse	$2 \cdot 10^{42} \text{ kg (!)}$ $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ $9 \cdot 10^1 \text{ kg}$ $1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $< 5 \cdot 10^{-63} \text{ kg} \approx 0 \text{ kg}$	Galaxie Sonne Erde Professor de Boer Proton Elektron ( $e^-$ ) Photon( $\gamma$ )

Achtung: Masse  $\neq$  Gewicht

f.) Winkeleinheiten

$1 \text{ Grad} \equiv 1^\circ$  Radian  Steradian (Öffnungswinkel)	$\frac{1}{360}$ des Umfangwinkels des Kreises  $\alpha_{\text{Rad}} = \frac{L}{R}, \alpha_{\text{Rad}} (360^\circ) = 2\pi$  $\Omega = \frac{S}{R^2}$	$\frac{\text{Kreissegment}}{\text{Radius}}$  $\frac{\text{Kugelflächensegment}}{\text{Radius}^2}$
---	--	---



## 1.2 Physikalische Größen/Einführung in die Vektorrechnung

### Skalare:

- \* Wie schwer ist etwas?

Angabe der Masse  $m$

- \* Wie lang ist etwas?

Angabe der Länge  $l$

- \* Wie komme ich nach München?

Die Angabe der Entfernung ( $\approx 200 \text{ km}$ ) reicht NICHT! Man muß auch noch die Richtung wissen! Infolgedessen benötigt man Vektoren.

### Vektoren:

Unter anderem können Verschiebungen durch Vektoren dargestellt werden. Außerdem werden beispielsweise folgende Größen durch Vektoren angegeben:

$\vec{r}$

$\vec{v}$

$\vec{a}$

$\vec{F}$

$\vec{p}$

$\vec{e}$

**Addition:**

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{Kommutativgesetz}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{Assoziativgesetz}$$

$$\vec{a} + \vec{o} = \vec{o} + \vec{a} = \vec{a} \quad \text{Neutrales Element, } \vec{o} = \text{Nullvektor}$$

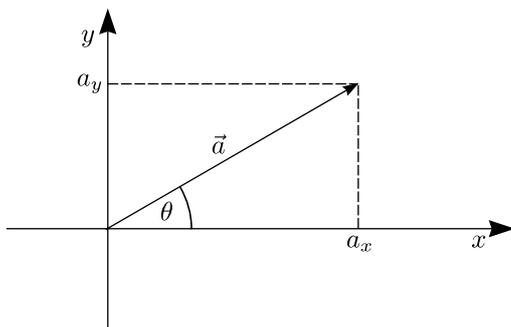
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{o} \quad \text{inverses Element}$$

Identität: gleiche Länge (BETRAG) und gleiche Richtung

**Zusammenfassung:**

a.) Vektoren im 2d:

$$\vec{a} \equiv a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \equiv a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y \equiv [a_x, a_y] \equiv \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$



Für den Betrag (Länge) eines Vektors im Zweidimensionalen ergibt sich:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Die Beträge der normierten Basisvektoren der Ebene ist gleich 1:

$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = 1$$

Für die Normierung eines allgemeinen Vektors  $\vec{a}$  ergibt sich:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 1$$

$$|\vec{a}^0| = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$$

In Polarkoordinaten kann man die  $x$ - und  $y$ -Komponente eines Vektors folgendermaßen formulieren:

$$a_x = a \cos \theta$$

$$a_y = a \sin \theta$$

$$\vec{a} = |\vec{a}| \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

Damit läßt sich der Vektor  $\vec{a}$  schreiben als:

$$\vec{a} = a \cos \theta \cdot \vec{e}_x + a \sin \theta \cdot \vec{e}_y$$

Bei Addition zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  addieren sich deren Komponenten einzeln:

$$\vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + b_x \vec{e}_x + b_y \vec{e}_y = (a_x + b_x) \vec{e}_x + (a_y + b_y) \vec{e}_y$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Bei Multiplikation eines Vektors  $\vec{a}$  mit einer Konstante  $n$  werden die einzelnen Komponenten von  $\vec{a}$  mit  $n$  multipliziert.

$$n \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} na_x \\ na_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (a_x + b_x + c_x + d_x) \vec{e}_x + (a_y + b_y + c_y + d_y) \vec{e}_y$$

b.) Vektoren im 3d:

Analog gilt dies für Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ :

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$\vec{a} = a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z$$

$$\vec{a} = [a_x, a_y, a_z]$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Für die  $S$ -Multiplikation (Skalar  $\cdot$  Vektor) ergibt sich:

$$s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_x \\ sa_y \\ sa_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \equiv |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$a_x \vec{e}_x \cdot b_x \vec{e}_x + a_x \vec{e}_x \cdot b_y \vec{e}_y + a_x \vec{e}_x \cdot b_z \vec{e}_z + \dots + a_z \vec{e}_z \cdot b_x \vec{e}_x + a_z \vec{e}_z \cdot b_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z \cdot b_z \vec{e}_z = a_x b_x \cdot \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_1 + a_y b_y \cdot \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_y}_1 + a_z b_z \cdot \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_1$$

c.) Produkte von Vektoren:

\* Inneres Produkt „ $\circ$ “ (Skalarprodukt)

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Hieraus ergibt sich also ein Skalar.

Kommutativgesetz:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$$

Distributivgesetz:

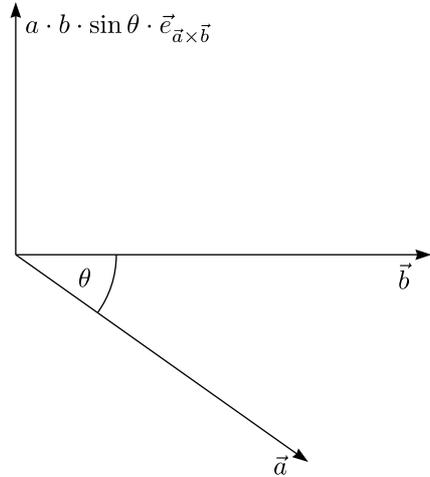
$$\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$$

**Orthogonalität:**

Wenn  $a \perp b$  ist, gilt  $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ . Bei Gleichheit der Vektoren ( $\vec{a} = \vec{b}$ ) erhalten wir:

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 = a^2$$

\* Äußeres Produkt „ $\times$ “ (Vektorprodukt)

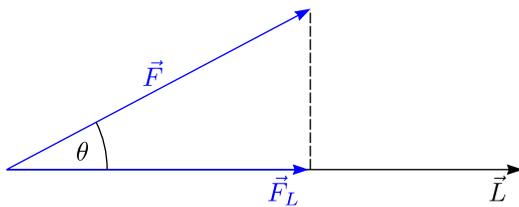


$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv a \cdot b \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_{\vec{a} \times \vec{b}}$$

Es ergibt sich also ein Vektor, der senkrecht sowohl auf  $\vec{a}$  als auch auf  $\vec{b}$  steht.

$$\vec{e}_{\vec{a} \times \vec{b}} \perp \vec{a}, \vec{b}$$

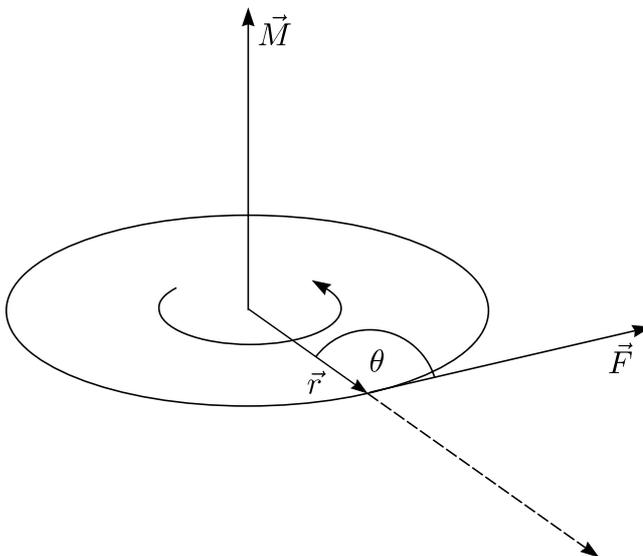
**Beispiel für Skalarprodukt:**



Arbeit=Kraft  $\circ$  Weg

$$W = \vec{F} \circ \vec{L} = |\vec{F}| \cdot |\vec{L}| \cdot \cos \varphi$$

**Beispiel für Vektorprodukt:**



Drehmoment=Radius  $\times$  Kraft

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin \varphi$$

Die Richtung des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b}$  wird bestimmt durch die Drehrichtung von  $a$  nach  $b$ : wenn man einen Korkenzieher oder die Finger der rechten Hand von  $a$  nach  $b$  dreht, gibt die Richtung des Korkenziehers oder die Richtung des Daumens die Richtung des Vektorprodukts (senkrecht auf der  $a, b$ -Ebene) an.

$$\vec{a} \times \vec{b}$$





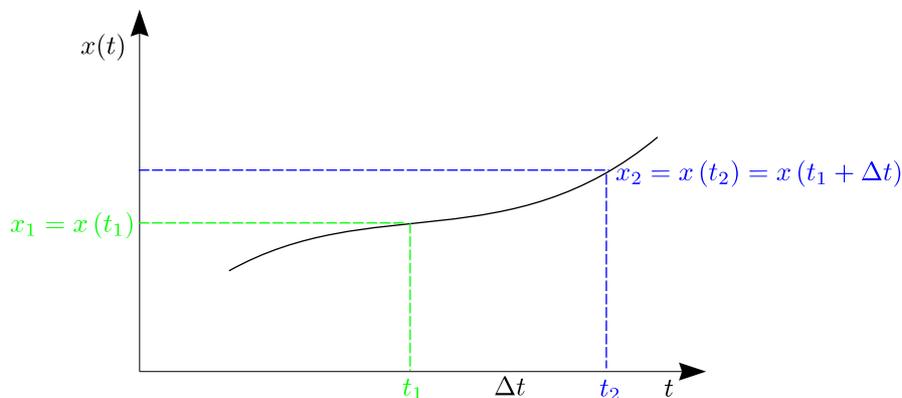
# Kapitel 2

## Klassische Mechanik von Massenpunkten

### 2.1 Mechanik von Massenpunkten

#### 2.1.1 Bewegung in einer Dimension

a.) Generell:



\* Geschwindigkeit  $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ :

$$\langle v \rangle = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Umgekehrt folgt:

$$x_2 = x_1 + \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

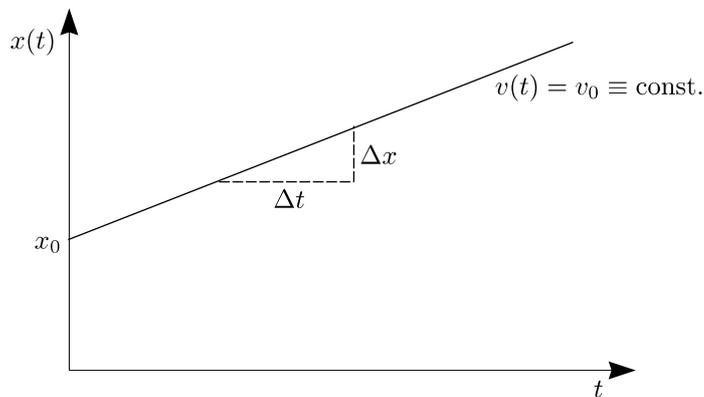
\* Beschleunigung  $\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$ :

$$\langle a \rangle = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

b.) Spezialfall 1

Unbeschleunigte Bewegung:  $a(t) = 0$



$$v(t) = v_0 \equiv \text{const.}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

c.) Spezialfall 2: Konstante Beschleunigung

$$a(t) = a_0 = \text{const.}$$

$$v(t) = a_0 \cdot t + v_0$$

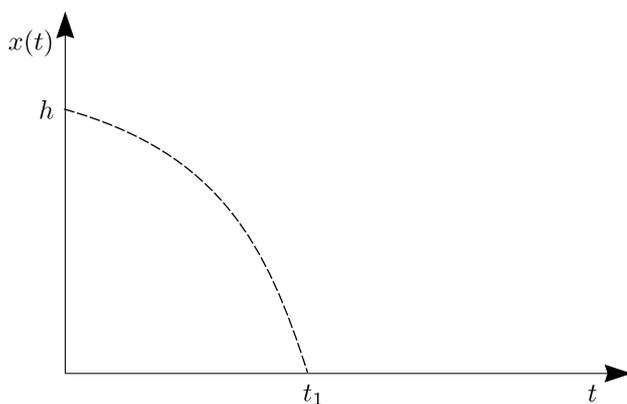
$$x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

**Beispiel: Fallender Stein:**

$$a(t) = -g$$

$$v(t) = -g \cdot t \quad (v_0 = 0)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$



\* Fallzeit :

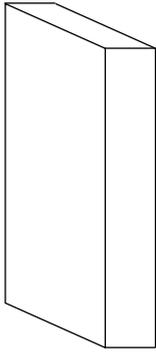
$$\left. \begin{array}{l} x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + h \\ x(t_1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

\* Bestimmung von g:

Man messe  $t_1$ ,  $h$ . Daraus folgt nun  $g = \frac{2h}{t_1^2}$ .

\* Zahlenbeispiel:

Unfall in der Stadt : mit  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  gegen die Wand!

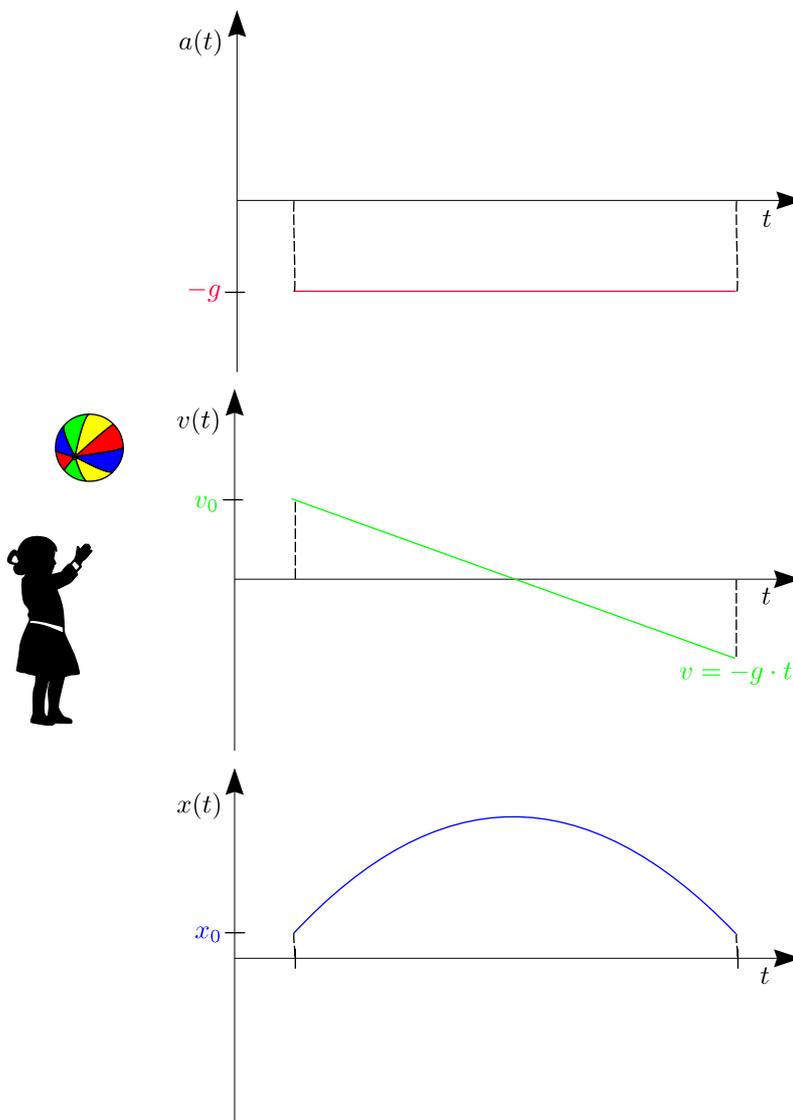


$$v = 13,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vergleiche mit Fall aus Höhe  $h = 9,9 \text{ m}$ .

$$\left\{ \text{Aus } t = \frac{v}{g} \text{ folgt } h = \frac{g}{2} t^2 = \frac{v^2}{2g} \right\}$$

Beispiel: Kind spielt Ball:

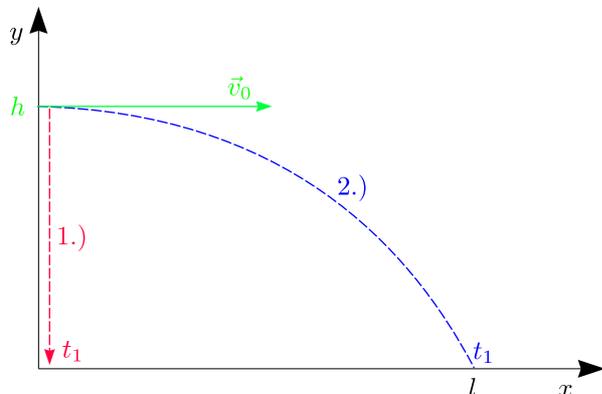


### 2.1.2 2-dimensionale Bewegung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \{x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y\}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

#### Beispiel: Fall vertikal/mit horizontaler Bewegung



$$1.) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + h \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 \equiv t(y=0) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$2.) \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{g}{2}t^2 + h \end{pmatrix} \Rightarrow t_1 \equiv t(y=0) = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$l = v_0 \cdot t = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

### 2.1.3 Dreidimensionale Bewegung

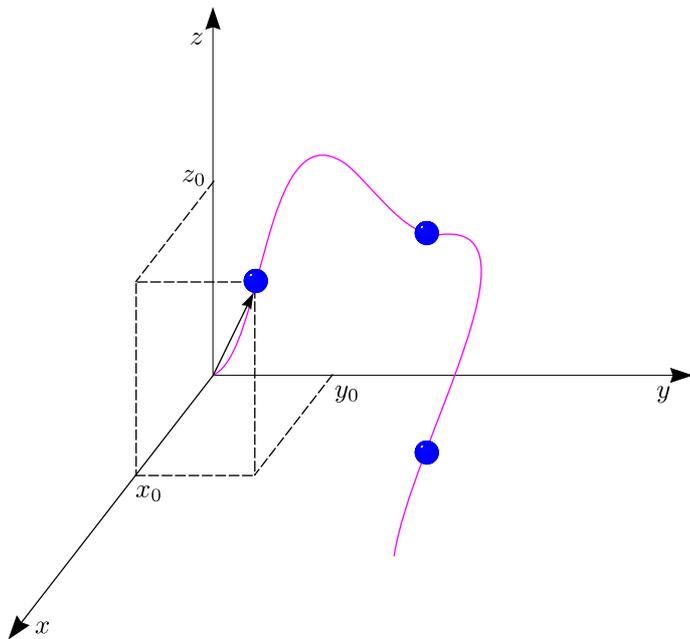
$$\left\{ \frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}, \frac{df}{dx} \equiv f' \right\} \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

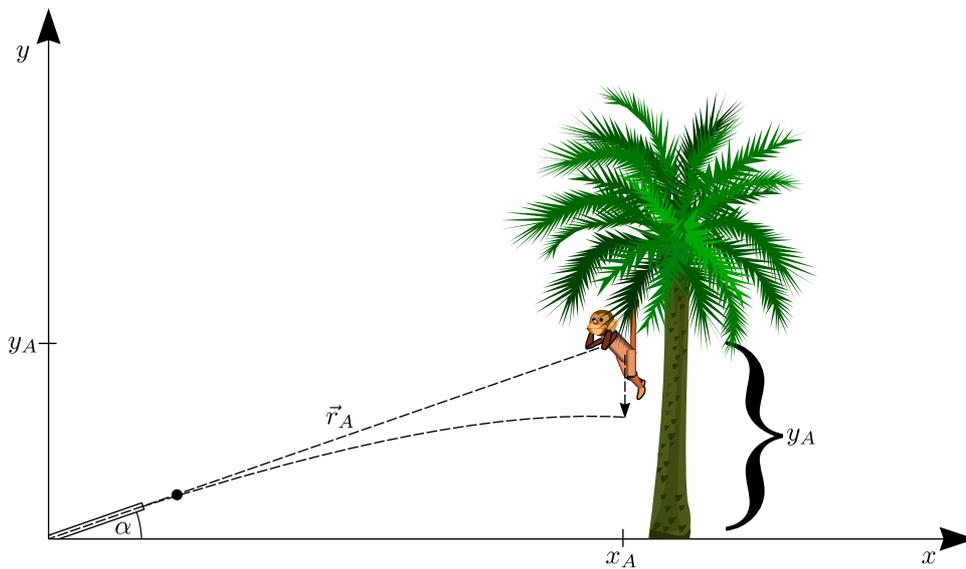
Auch hier ist die Bewegung in  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Richtung unabhängig!

#### Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_x t \\ y_0 + v_y t \\ z_0 + v_z t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$



Beispiel: Affe im Baum



\* Bahn des Affen :

$$\vec{r}_A(t) = \vec{r}_A - \frac{g}{2}t^2 \cdot \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

\* Bahn der Kugel:

$$\vec{r}_K(t) = \vec{v}_0(t) - \frac{g}{2}t^2 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} v_{0x} \cdot t \\ v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

Für  $t = t_A$  trifft die Kugel den Affen:

$$\vec{r}_A(t_A) = \vec{r}_K(t_A)$$

Es gilt somit:

$$x_A = v_{0x} \cdot t_A$$

$$y_A - \frac{g}{2}t_A^2 = v_{0y}t_A - \frac{g}{2}t_A^2$$

Damit folgt:

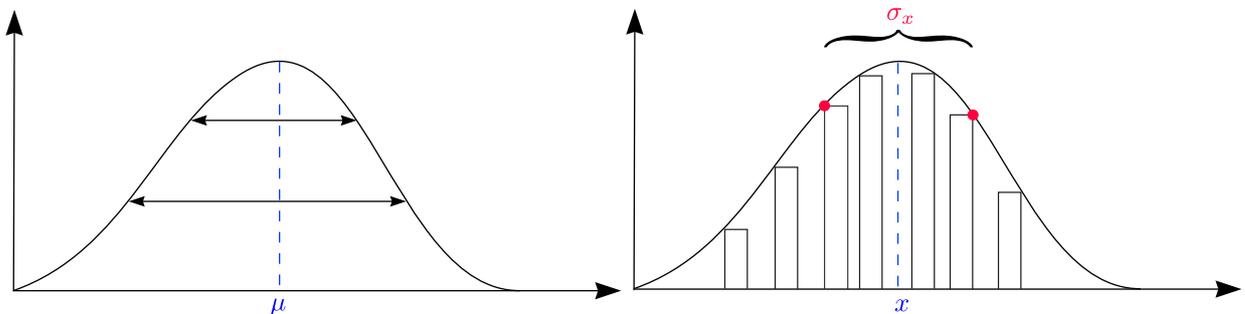
$$\frac{y_A}{x_A} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan \alpha$$

Dies ist eine wahre Aussage. Der Affe ist wohl kein guter Physiker, da er von der Kugel getroffen wird.

## 2.2 Messungen und Datenauswertung

Messung einer physikalischen Größe durch Instrumente, die Messwerte in Basiseinheiten wiedergeben. Die Genauigkeit ist begrenzt. Man unterscheidet zwischen 2 Fehlertypen (Unsicherheiten):

- Systematischer Fehler
  - Statistischer Fehler
- a.) Systematischer Fehler:  
Verfälschung der Messung durch unbekannte apparative Effekte (z.B. falsche Kalibration)
- b.) Zufällige Fehler:  
Wahrscheinlichkeit und Statistik



$$\langle x \rangle = \bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1}{N} (x_1 + x_2 + \dots + x_N)$$

$$x_w = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N x_i$$

$\sigma_x$  ist dabei ein Maß für die Breite:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Vertauschbarkeit:  $\delta(\langle x \rangle) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

### 2.2.1 Zentraler Grenzwertsatz

Vertrauen von großer Anzahl von Zufallszahlen (Messungen):

$$P(x; \mu; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Im Intervall:

$\mu \pm 1\sigma$	68%
$\mu \pm 2\sigma$	95%
$\mu \pm 3\sigma$	99,7%

**Mathematischer Einschub:**

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Die Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x_i + \Delta x, x_2, \dots, x_N) - f(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\Delta x} \right)$  heißt partielle Ableitung nach  $x_i$  (analog  $x_N$ ).

**Beispiel:**

$$v(x, t) = \frac{x}{t}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{t}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{x}{t^2}$$

**2.2.2 Fehlerfortpflanzung**

**Beispiel:**

$$v = \frac{x}{t}; \quad \sigma_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 \sigma_t^2}$$

Es sei  $t = 15$  s,  $\sigma_t = 0,5$  s,  $x = 100$  m und  $\sigma_x = 10$  cm. Damit ergibt sich:

$$v = 6,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Allgemein gilt:

$$\sigma_G = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2}$$

Statistischer und systematischer Fehler werden getrennt behandelt. Die Alternative ist folgende einfachere Rechnung (Größtfehler-Addition).

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

Das 1.Glied der mehrdimensionalen Taylor-Entwicklung lautet:

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z$$

**Beispiel:**

$$R = x^a y^b z^c$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = ax^{a-1}y^b z^c; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = x^b y^{b-1} z^c$$

Damit folgt:

$$\Delta R = \left| a \frac{R}{x} \right| \Delta x + \left| b \frac{R}{y} \right| \Delta y + \left| c \frac{R}{z} \right| \Delta z$$

Für den relativen Fehler ergibt sich:

$$\frac{\Delta R}{R} = |a| \frac{\Delta x}{x} + |b| \frac{\Delta y}{y} + |c| \frac{\Delta z}{z}$$

**Darstellung:**

Wert=(Bestwert  $\pm$  Unsicherheit)  $\cdot$  Maßeinheit

Signifikante Stelle:

$$g = (9,82 \pm 0,02) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$g = (9,8 \pm 0,2) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

**2.3 Die Newtonschen Gesetze**

$$\text{N1: } \sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = 0 \quad \left( \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \text{ mit } F = \frac{dp}{dt} \right)$$

Solange keine resultierende Kraft auf einen Körper wirkt, verbleibt er in seinem Bewegungszustand.

$$\text{N2: } \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (\vec{F} = m \cdot \vec{a})$$

Eine Kraft, die auf einen Körper mit Masse  $m$  einwirkt, führt zu einer Beschleunigung des Körpers, die proportional zur Kraft ist.

$$\text{N3: } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Zu jeder einwirkenden Kraft gibt es immer eine Gegenkraft.

$$[F] = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \equiv 1 \text{ N}$$

Auch: 1 kp = 9,81 N („Kilo“)

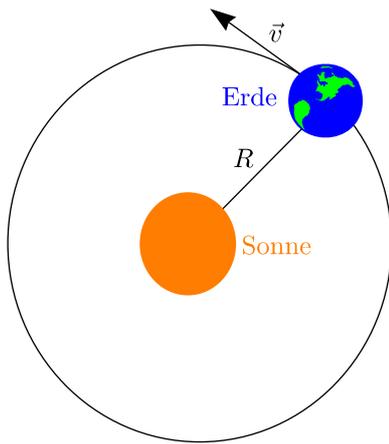
**Einheiten:**

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \quad 1 \text{ dyn} = 1 \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$$

$$1 \text{ kp} = 1 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,8 \text{ N} \text{ (Gewicht von 1 kg auf der Erde)}$$

$$1 \text{ lb} = 1 \text{ slug} \cdot 1 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} = 4,45 \text{ N}$$

$$\Rightarrow 1 \text{ slug} = 14,5 \text{ kg}$$

Beispiel:

Kraft zwischen Sonne und Erde ( $m_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ ):

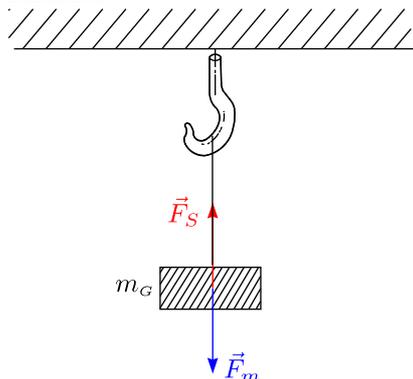
$$a_z = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{(1 \text{ Jahr})^2} \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, (\approx 6 \cdot 10^{-4} g)$$

$$F_z = m_E \cdot a_z = 3,6 \cdot 10^{22} \text{ N}$$

## 2.3.1 Anwendungen von Newtons Gesetzen

a.) Kraft am Faden

\* Seil hält:



$$\vec{F}_{m_G} = m_G \cdot \vec{g}$$

Da sich der Körper im Kräftegleichgewicht befindet, ist die Vektorsumme aller Kräfte gleich 0:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

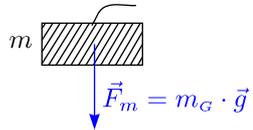
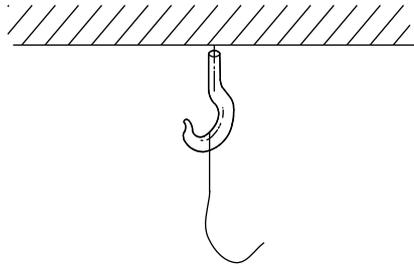
Die einzigen Kräfte, die auftreten, sind die Gewichtskraft und die Seilkraft. Die Summe aller Kräfte am ruhenden Körper ist gleich Null:

$$\vec{F}_S + \vec{F}_{m_G} = \vec{0}$$

Damit folgt:

$$\vec{F}_S = -m_G \cdot \vec{g}$$

\* Seil reißt:



$$\sum_i \vec{F}_i = m_G \cdot \vec{g} = m_T \cdot \vec{a}$$

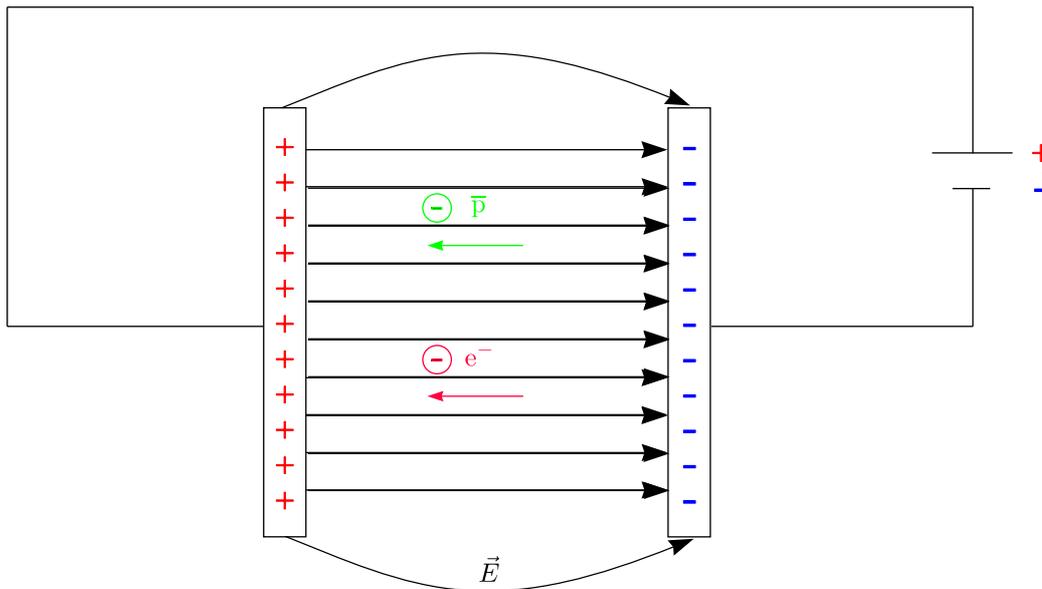
$$\vec{a} = \frac{m_G}{m_T} \cdot \vec{g} = \vec{g}$$

⇒ Träge und schwere Masse sind identisch!

⇒ Äquivalenzprinzip!

$$m_G = m_T \equiv m$$

b.) Beschleunigung im elektrostatischen Feld:



\* Elektrostatische Kraft:

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E}$$

\* Kraft auf Elektron:

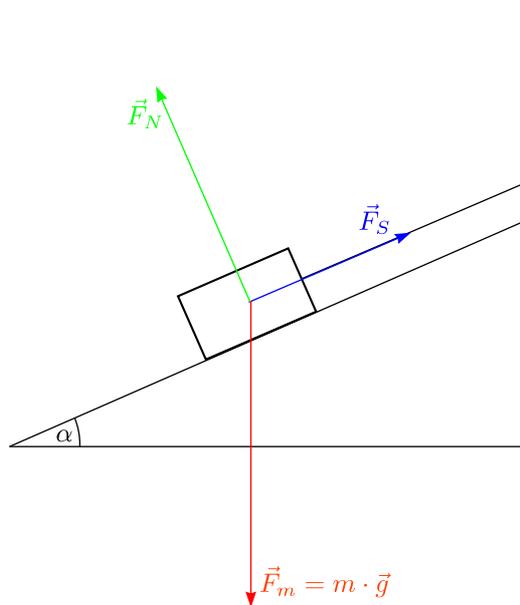
$$F_e = e \cdot E = m_{e^-} \cdot a_{e^-}$$

\* Kraft auf Antiproton:

$$F_e = e \cdot E = m_{\bar{p}} \cdot a_{\bar{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{e^-}}{a_{\bar{p}}} = \frac{m_{\bar{p}}}{m_{e^-}} \approx 2000$$

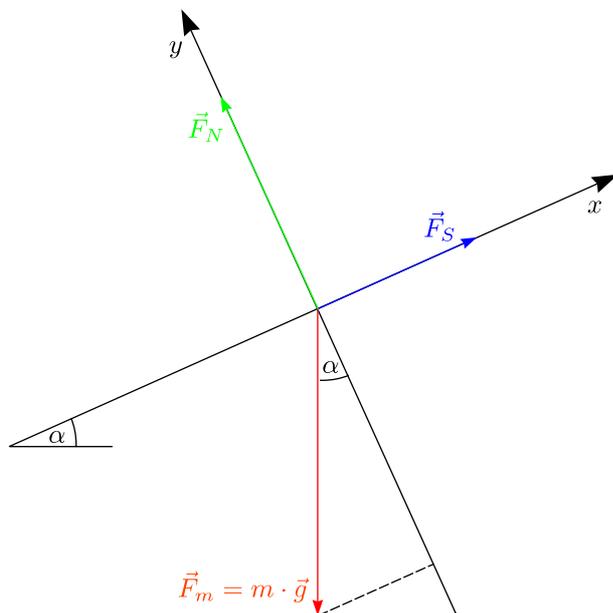
c.) Aufhängung an schräger Rampe



Die allgemeine Betrachtung liefert:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_N + \vec{F}_S + m\vec{g} = \vec{0}$$

- \* Körper ist punktförmig.
- \* Alle Kräfte, die auf Körper wirken, einzeichnen!
- \* Definiere optimales Koordinatensystem!
- \* Wenn nicht spezifiziert, wird Reibung vernachlässigt.



Die Kräfte werden komponentenweise betrachtet:

- \*  $x$ -Richtung:

$$F_S - mg \sin \alpha = 0$$

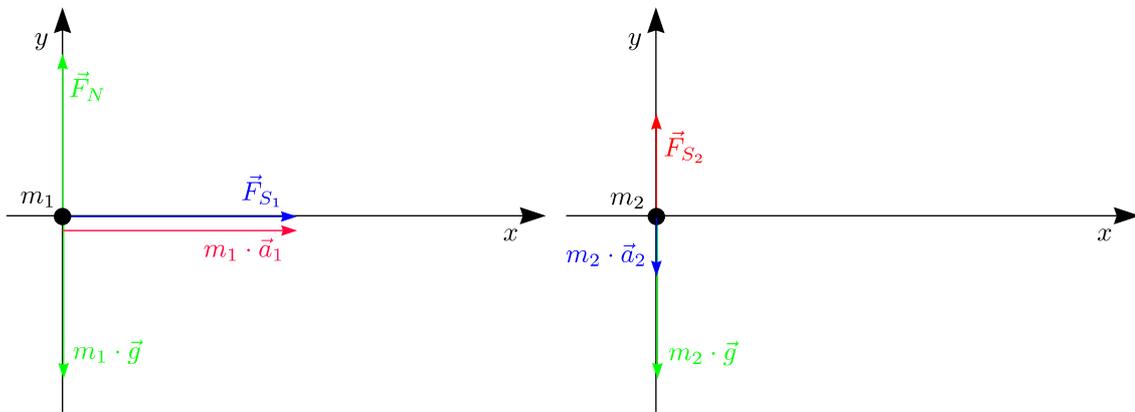
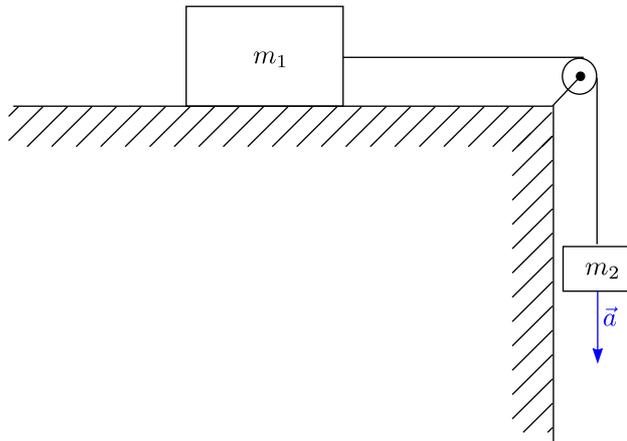
- \*  $y$ -Richtung:

$$F_N - mg \cos \alpha = 0$$

Dann ergibt sich folgende Lösung:

$$F_S = mg \sin \alpha; F_N = mg \cos \alpha$$

d.) Bewegung eines reibungsfreien Klotzes



$$\vec{F}_N + \vec{F}_{S_1} + m_1 \vec{g} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{S_2} + m_2 \vec{g} = m_2 \vec{a}_2$$

Vektoruell geschrieben lautet die Kräftebilanz:

$$\begin{pmatrix} F_{S_1} \\ F_N - m_1 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 a_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ F_{S_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_2 a_2 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die Kräfte komponentenweise und erhalten somit:

① 1.Körper:

$$y\text{-Richtung: } F_N - m_1 g = 0$$

$$x\text{-Richtung: } F_{S_1} = m_1 a_1$$

② 2.Körper:

$$y\text{-Richtung: } F_{S_2} - m_2 g = m_2 a_2$$

Die beiden Körper erfahren die gleiche Beschleunigung, außerdem sind die beiden Seilkräfte gleich groß.

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$$

$$|\vec{F}_{S_1}| = |\vec{F}_{S_2}|$$

$$\Rightarrow m_1 a - m_2 g = -m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m_2}{m_1 + m_2} g \end{pmatrix}$$

**Diskussion:**

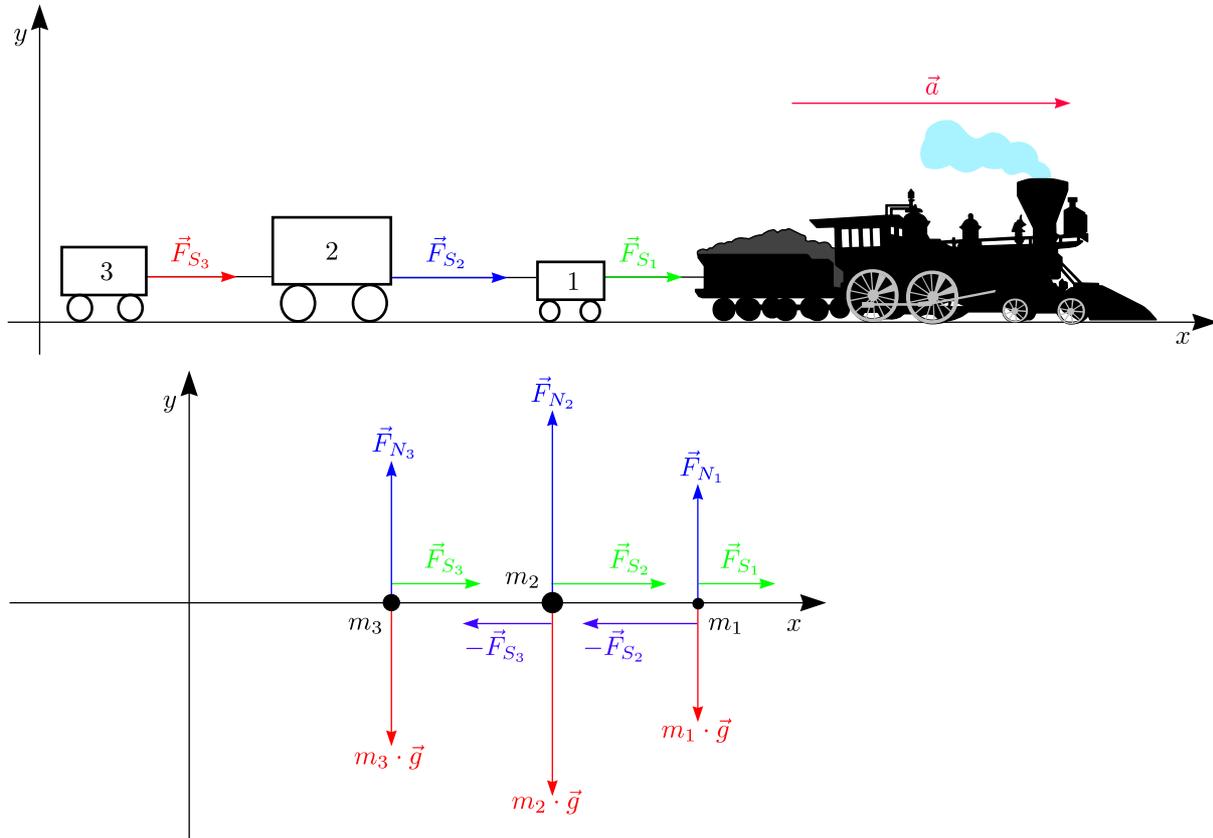
$$m_1 = 0 : a = g$$

$$m_2 \mapsto \infty : a \mapsto g$$

$$m_1 \mapsto \infty : a \mapsto 0$$

$$m_2 \mapsto 2m_2 : a \mapsto 2a$$

e.) Eisenbahn



\* 3. Waggon:

$$\vec{F}_{N_3} + m_3 \vec{g} + \vec{F}_{S_3} = m_3 \vec{a}$$

\* 2. Waggon:

$$\vec{F}_{N_2} + m_2 \vec{g} - \vec{F}_{S_3} + \vec{F}_{S_2} = m_2 \vec{a}$$

\* 1. Waggon:

$$\vec{F}_{N_1} + m_1 \vec{g} - \vec{F}_{S_2} + \vec{F}_{S_1} = m_1 \vec{a}$$

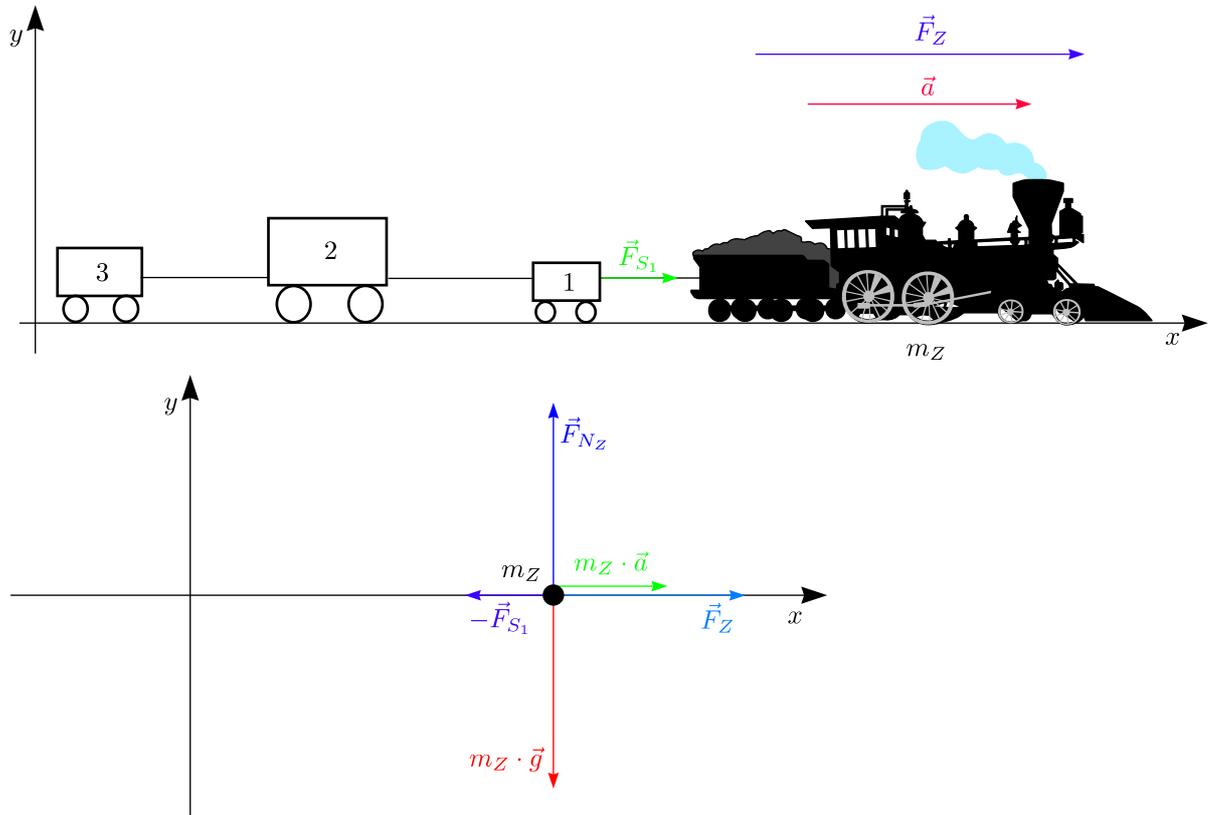
Die Kräfte in vertikaler Richtung, also die  $\vec{F}_{N_i}$  und die  $m_i \vec{g}$ , gleichen sich aus. Infolgedessen sind nur noch die waagerechten Kräfte von Bedeutung. Wir addieren die drei Gleichungen und erhalten so

$$\vec{F}_{S_1} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot a \text{ mit } a = \frac{F_Z}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Für die anderen Seilkräfte folgt:

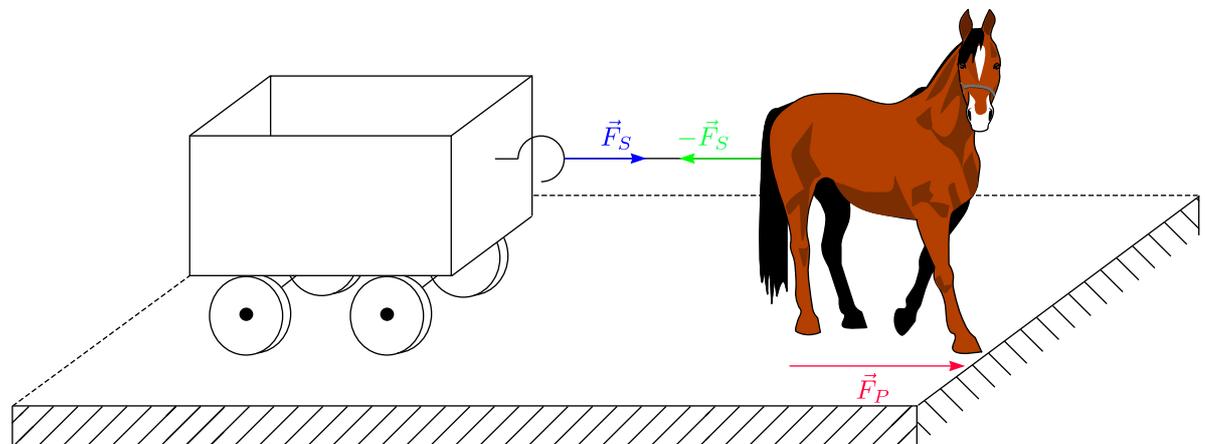
a.)  $F_{S_3} = m_3 a$

b.)  $F_{S_2} = m_3 a + m_2 a$



$$\vec{F}_Z - \vec{F}_{S1} + m_Z \vec{g} + \vec{F}_{Nz} = m_Z \vec{a}$$

f.) Die Geschichte vom faulen Pferd



Pferd:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = -\vec{F}_S + \vec{F}_P + \vec{F}_N + m\vec{g} = \vec{0} = m\vec{a}$$

h.) Schubkräfte

Welche Kräfte wirken auf die Klötze?

\* Klotz ①:

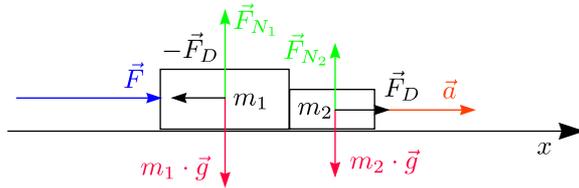
- \* Normalkraft  $\vec{F}_{N_1}$
- \* Gewichtskraft  $\vec{F}_{m_1} = m_1 \cdot \vec{g}$
- \* Druckkraft  $-\vec{F}_D$

\* Klotz ②:

- \* Normalkraft  $\vec{F}_{N_2}$
- \* Gewichtskraft  $\vec{F}_{m_2} = m_2 \cdot \vec{g}$
- \* Druckkraft  $\vec{F}_D$

Die Schubkraft  $\vec{F}$  wirkt auf das ganze System bestehend aus den beiden Klötzen.

1.) Beschleunigende Kraft  $\vec{F}$  wirkt direkt auf Klotz ①



Die Kräftebilanz für das gesamte System lautet:

$$\vec{F} + m_1\vec{g} - \vec{F}_D + \vec{F}_{N_1} + m_2\vec{g} + \vec{F}_D + \vec{F}_{N_2} = \vec{a}(m_1 + m_2)$$

Speziell für den Klotz ② erhalten wir:

$$\vec{F}_{N_2} + m_2\vec{g} + \vec{F}_D = \vec{a} \cdot m_2$$

Die relevanten Komponenten sind diejenigen in  $x$ -Richtung:

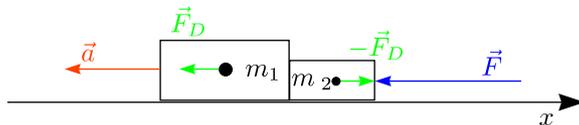
$$F_{D_x} = a_x m_2 \text{ mit } a_x = \frac{F_x}{m_1 + m_2}$$

Damit ergibt sich also:

$$F_{D_x} = F_x \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

Diese Kraft ist gleich der Kraft  $\vec{F}_{2x}$ , mit welcher der zweite Klotz beschleunigt wird.

2.) Beschleunigende Kraft  $\vec{F}$  wirkt direkt auf Klotz ②



$$F_x = -|\vec{F}| \cdot \vec{e}_x$$

$$a_x = -|\vec{a}| \cdot \vec{e}_x$$

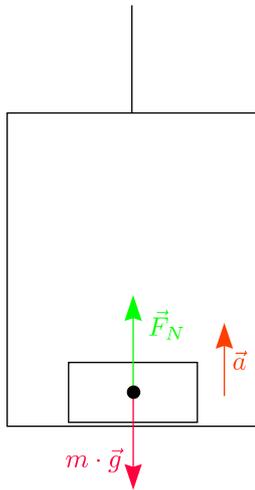
Damit ergibt sich für die Kraft  $\vec{F}_{D_x}$  auf den ersten Klotz:

$$F_{D_x} = m_1 a_x \text{ mit } a_x = \frac{F_x}{m_1 + m_2}$$

Damit gilt also:

$$F_{D_x} = F_x \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

h.) Kräfte im Aufzug



1. Aufzug steht:

$$\vec{F}_N + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$F_N = m \cdot g$$

2. Aufzug beschleunigt:

$$\vec{F}_N + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$y\text{-Richtung: } F_N - mg = ma$$

\* Beschleunigung nach oben:  $a > 0$

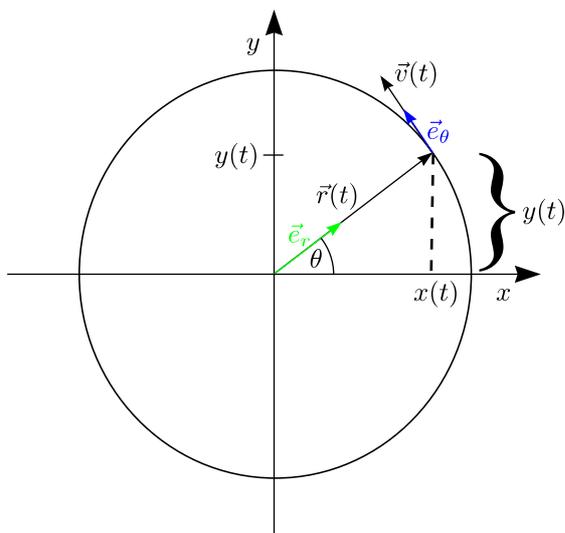
$$\vec{F}_N = m \cdot (g + a)$$

\* Beschleunigung nach unten:  $a = -|\vec{a}|$

$$\vec{F}_N = m \cdot (g - |\vec{a}|)$$

$$\text{Spezialfall: } a = g : F_N = 0$$

### 2.3.2 Kreisbewegung



$\tilde{r}(t)$ ,  $\tilde{v}(t)$ ,  $\tilde{a}(t)$  ändern sich laufend!

Bogenweg:  $s = r\theta$

$$\text{Geschwindigkeit: } \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit: } \omega \equiv \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

Einheiten: Radiant/Sekunde [rad/s]

Oder nach Integration:  $\theta = \int \omega dt = \omega t + \theta_0$  für  $\omega = \text{konstant}$

**Einführung von Polarkoordinaten:**

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix} \quad r = |\vec{r}(t)| = \text{const. } (> 0)$$

$$\vec{r}(t) = r \cdot \tilde{e}_r(t)$$

$$\tilde{e}_r(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \\ \sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{e}_\theta(t) = \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \begin{pmatrix} \frac{d(\cos \theta(t))}{dt} \\ \frac{d(\sin \theta(t))}{dt} \end{pmatrix} = r \frac{d\theta(t)}{dt} \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} = r \frac{d\theta}{dt} \tilde{e}_\theta(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{v} \perp \vec{r}$$

**Kettenregel:**

$$\frac{df(g(x))}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} \cdot \frac{df}{dg}$$

$$\vec{v}(t) = r \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} \cos(\theta(t) + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta(t) + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

$$\vec{a}(t) = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} + r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos \theta(t) \\ -\sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

**Produktregel:**

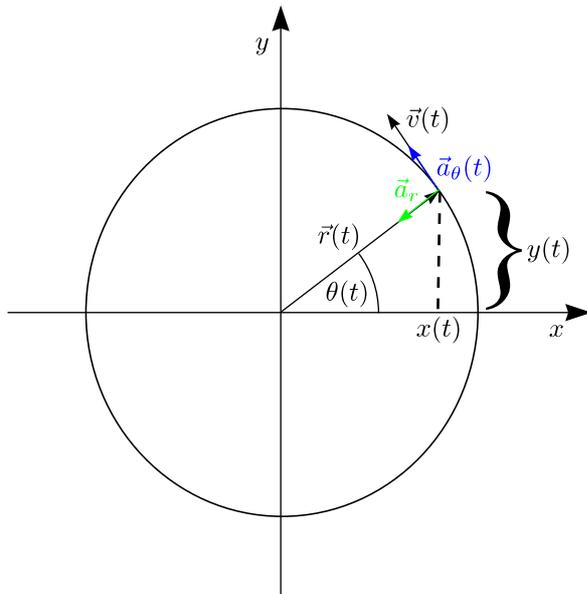
$$\frac{d(f \cdot g)}{dt} = f \cdot \frac{dg}{dt} + g \cdot \frac{df}{dt}$$

$$\vec{a}(t) = r \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot \vec{e}_\theta(t) - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \vec{e}_r(t) = \vec{a}_\theta(t) + \vec{a}_r(t)$$

$$\vec{a}_\theta(t) \hat{=} \text{Tangentialbeschleunigung}$$

$$\vec{a}_r(t) \hat{=} \text{Zentripetalbeschleunigung}$$

## 2.3.3 Sonderfall: Konstante Kreisbewegung



$$|\vec{r}(t)| = r \equiv \text{const.}$$

$$|\vec{v}(t)| = v \equiv \text{const.}$$

$$v = \left| r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_\theta \right| = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{r} \quad (\text{Winkelgeschwindigkeit})$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \frac{v}{r} \cdot t + \theta_0$$

Mit der Umlaufzeit  $T$  folgt:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \equiv \omega \cdot r; \quad \omega \equiv \text{Winkelgeschwindigkeit/Kreisfrequenz} \quad (\omega = 2\pi \cdot \nu)$$

Damit ergibt sich:

$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$$

$$\vec{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \theta_0) \\ \sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t + \theta_0) \\ \cos(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = r \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega t + \theta_0) \\ -\sin(\omega t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

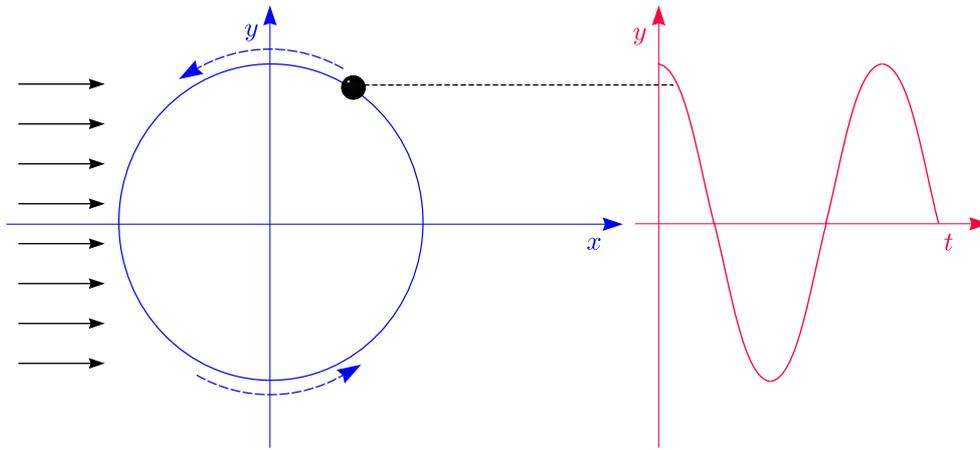
Zentripetalbeschleunigung (Tangentialbeschleunigung=0)

**In Skalaren:**

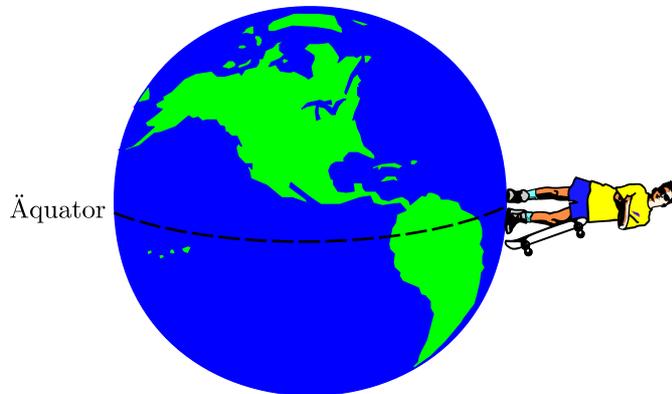
$$|\vec{r}(t)| = r$$

$$|\vec{v}(t)| = v = r \cdot \omega$$

$$|\vec{a}(t)| = a_r = r\omega^2 = \frac{v^2}{r} \quad \text{mit } \omega = \frac{v}{r}$$

Illustration:Beispiele:

a.) Unsere Geschwindigkeit am Äquator



$$r = 6380 \text{ km}, T = 24 \text{ h}$$

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{6380 \text{ km} \cdot 2\pi}{24 \text{ h}} = 1670 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 464 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$a = \frac{v^2}{r} = 0,034 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,0034g$$

⇒ Sie wiegen am Äquator 200 g weniger als am Nordpol!

b.) Wie kurz wäre der kürzeste Tag, bei dem Sie noch nicht abheben?

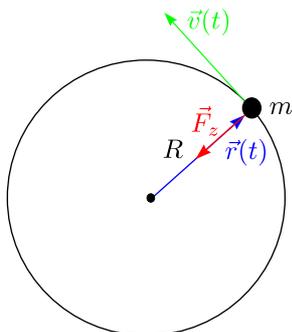
$$a_r = g = r\omega^2 = r \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}} = 1,4 \text{ h}$$

Dies entspricht der Umlaufzeit eines Satelliten im erdnahen Orbit.

### 2.3.4 Rotationsdynamik

#### Ehedem: Kinematik der Drehbewegung



Es wirkt die Zentripetalkraft:

$$\vec{F}_z = m \cdot \vec{a}_z$$

Es gilt für die Beschleunigung:

$$\vec{a}_z = \frac{\vec{F}_z}{m}$$

Damit folgt dann für die Bewegungsgleichung:

$$\boxed{\vec{a}_z(t) = -\omega^2 R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}} \text{ mit } \omega \hat{=} \text{ Kreisfrequenz}$$

Durch zweimalige Integration nach  $t$  erhalten wir  $\vec{r}(t)$ :

$$\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi_0) \\ \sin(\omega t + \phi_0) \end{pmatrix}$$

Mit  $|\vec{a}_z| = \omega^2 R = \frac{F_z}{m}$  resultiert:

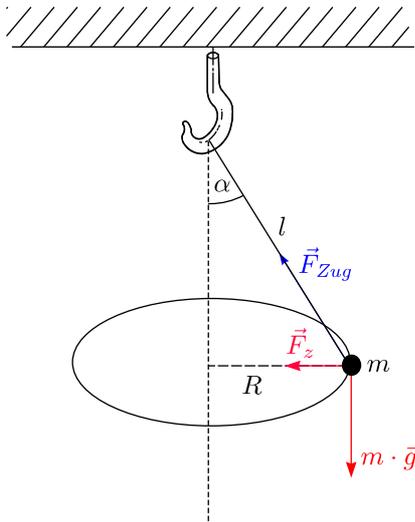
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{F_z}{m \cdot R}}}$$

Damit folgt also schließlich:

$$\boxed{\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}}t + \phi_0\right) \\ \sin\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}}t + \phi_0\right) \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}(t) = R \cdot \sqrt{\frac{F_z}{mR}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}}t + \phi_0\right) \\ \cos\left(\sqrt{\frac{F_z}{mR}}t + \phi_0\right) \end{pmatrix}}$$

#### Beispiele:

a.) Drehpendel



$$m\vec{g} + \vec{F}_{Zug} = m\vec{a}_z$$

$$\left. \begin{array}{l} x\text{-Richtung: } F_{Zug} \sin \alpha = ma_z \\ y\text{-Richtung: } F_{Zug} \cos \alpha = mg \end{array} \right\} a_z = g \cdot \tan \alpha = \omega^2 R = \omega^2 l \sin \alpha$$

Hiermit folgt für die Kreisfrequenz  $\omega$  und der Periodendauer  $T$ :

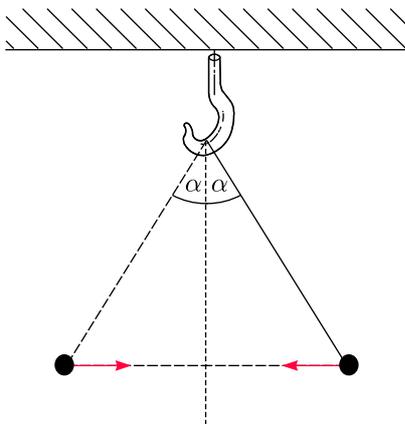
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}$$

**Diskussion:**

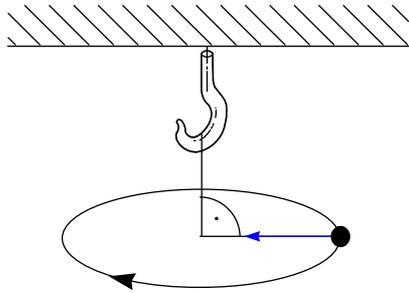
Für  $\alpha \mapsto 0^\circ$  resultiert  $T \mapsto 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ . Es handelt sich also um die Periodendauer eines Pendels.

**Projektion:**

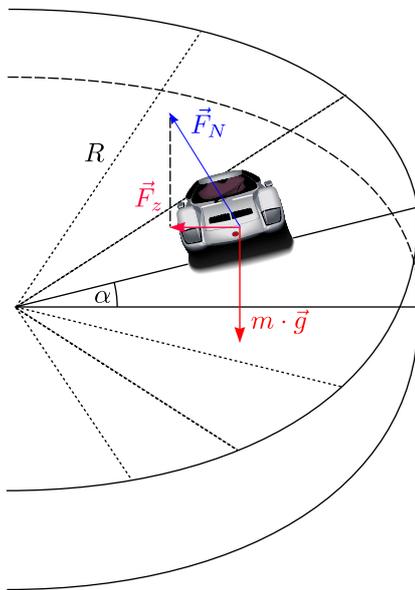


$$\alpha \mapsto 90^\circ$$

$$T \mapsto 0$$



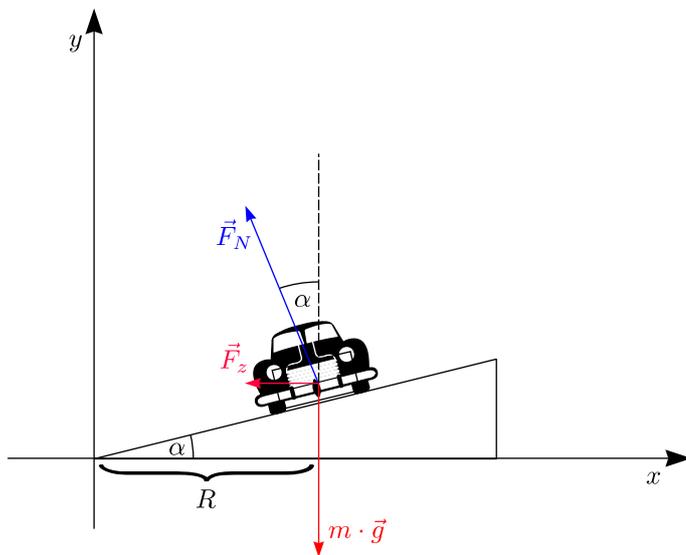
b.) Auto im Winter



$$m\vec{g} + \vec{F}_N = m\vec{a}_z$$

Betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel:

$$v = 200 \frac{\text{km}}{\text{h}}, R = 1 \text{ km}, \alpha = ?$$



$$\begin{aligned} x\text{-Richtung: } ma_z &= -F_N \sin \alpha \\ &= -mg \tan \alpha \end{aligned}$$

Hiermit haben wir folgende Beschleunigung:

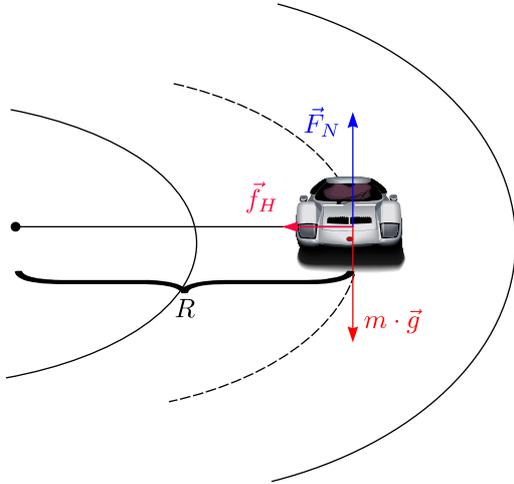
$$a_z = -g \tan \alpha = -\frac{v^2}{R}$$

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{R \cdot g} = \frac{\left(200 \cdot \frac{10^3}{3600}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{1000 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,315$$

Damit ergibt sich folgender Winkel:

$$\alpha = 17,5^\circ$$

c.) Straße mit Reibung



$$\vec{f}_H + \vec{F}_N + m\vec{g} = m\vec{a}_z$$

$$x\text{-Richtung: } a_z = \frac{f_H}{m} = \mu_H \cdot g = \frac{v^2}{R}$$

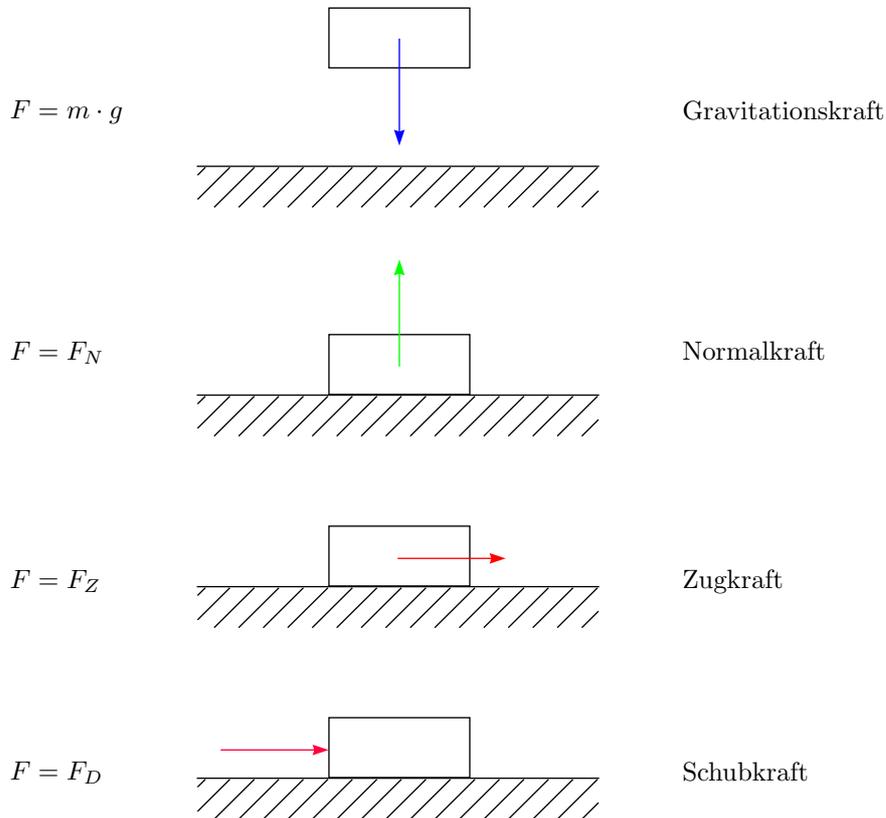
Damit folgt für die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{R \cdot \mu_H \cdot g}$$

Solange  $v \leq \sqrt{R \cdot \mu_H \cdot g}$  rutscht das Auto nicht! Wenn  $v > \sqrt{R \cdot \mu_H \cdot g}$  beginnt es zu rutschen!

### 2.3.5 Das Federpendel

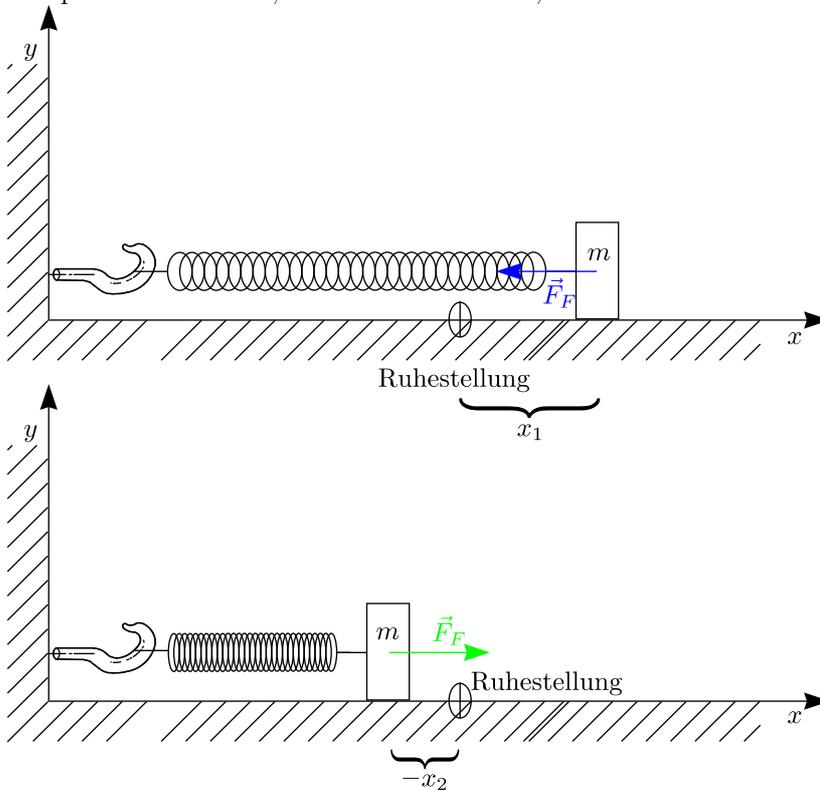
Bis jetzt kennen wir:



Bis jetzt waren Kräfte konstant. Damit galt die Bewegungsgleichung:

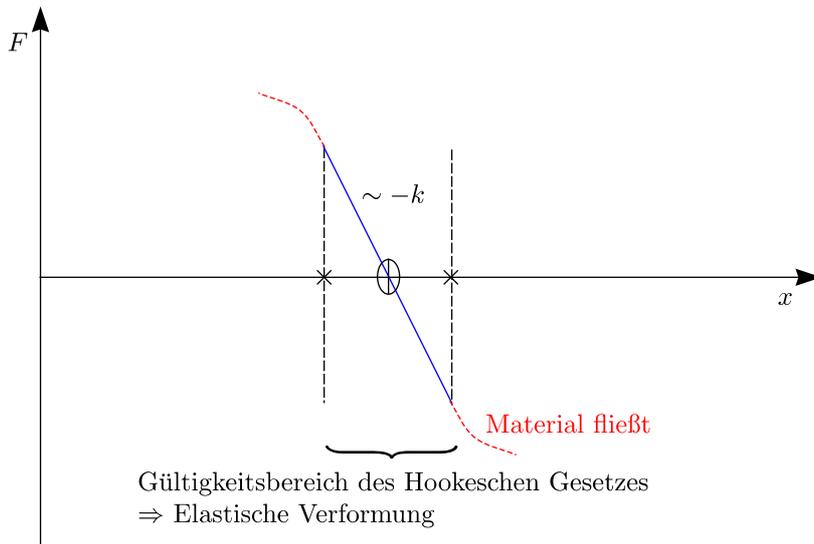
$$\vec{r}(t) = \frac{\vec{a}}{2}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{r}_0$$

Als Beispiel für eine Kraft, die nicht konstant ist, wollen wir die Federkraft näher betrachten:



Das sogenannte Hookesche Gesetz lautet:

$$\vec{F}_F = -k\vec{x} \text{ mit } k \hat{=} \text{Federkonstante}$$



Es ergibt sich folgende Beschleunigung:

$$a_F = \frac{F_F}{m} = \boxed{-\frac{kx}{m}}$$

a.) Bewegungsgleichung:

$$a(t) = \underbrace{\frac{d^2x(t)}{dt^2}}_{\text{Differentialgleichung 2. Ordnung}} = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

Wir verwenden zur Lösung folgenden Ansatz:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

Wir setzen dies in die Gleichung ein:

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \theta_0) = -\frac{k}{m} x_0 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

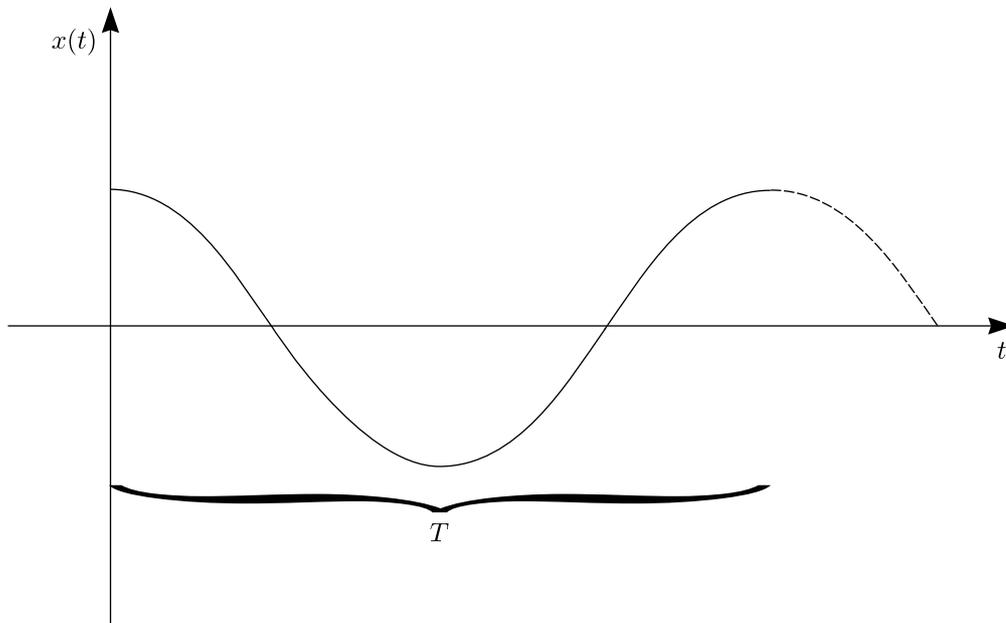
Wir haben folgende Randbedingungen:

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ &= x_0 \cos(\theta_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \theta_0 = 0$$

Die Lösung lautet dann:

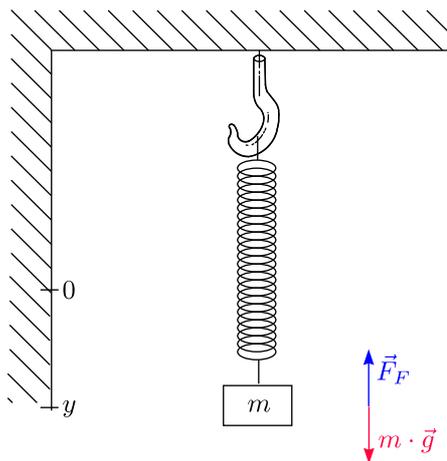
$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$



Aus  $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  folgt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

b.) Anwendung: Gewichtsmessung



$$\vec{F}_F + m\vec{g} = \vec{0}$$

Betrachten wir die  $y$ -Komponente:

$$ky = -mg$$

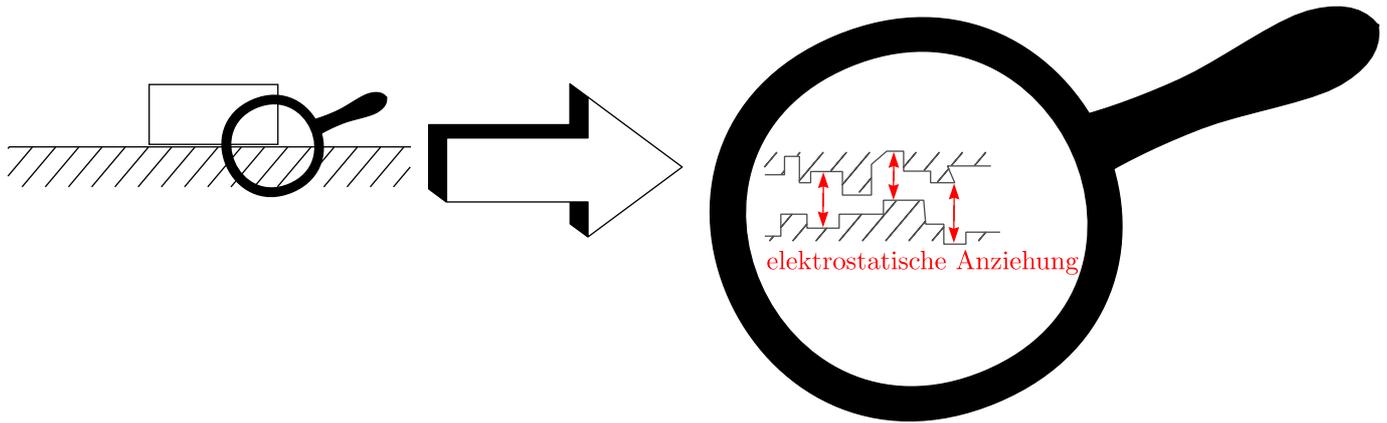
Damit ergibt sich:

$$y = -\frac{mg}{k}$$

Damit folgt das Gewicht des Massestücks:

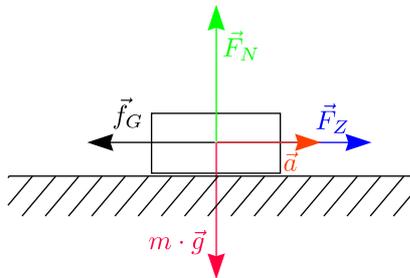
$$mg = ky$$

2.3.6 Reibung



- ① Haftreibung  $\vec{f}_H$  ( $v_{rel} = 0$ )  
„Verklebung“ zweier Körper durch Rauigkeit oder elektrostatische Kräfte
- ② Gleitreibung  $\vec{f}_G$  ( $v_{rel} > 0$ )
- ③ (Reibung durch Viskosität)

a.) Illustration :



$$\left. \begin{aligned} f_H &= \mu_H \cdot F_N \\ f_G &= \mu_G \cdot F_N \end{aligned} \right\} \mu \hat{=} \text{Reibungskoeffizient}$$

$$\mu_H > \mu_G$$

$$\vec{F} + \vec{f}_G + \vec{F}_N + m\vec{g} = m\vec{a} \quad (|\vec{F}| > |\vec{f}_G|)$$

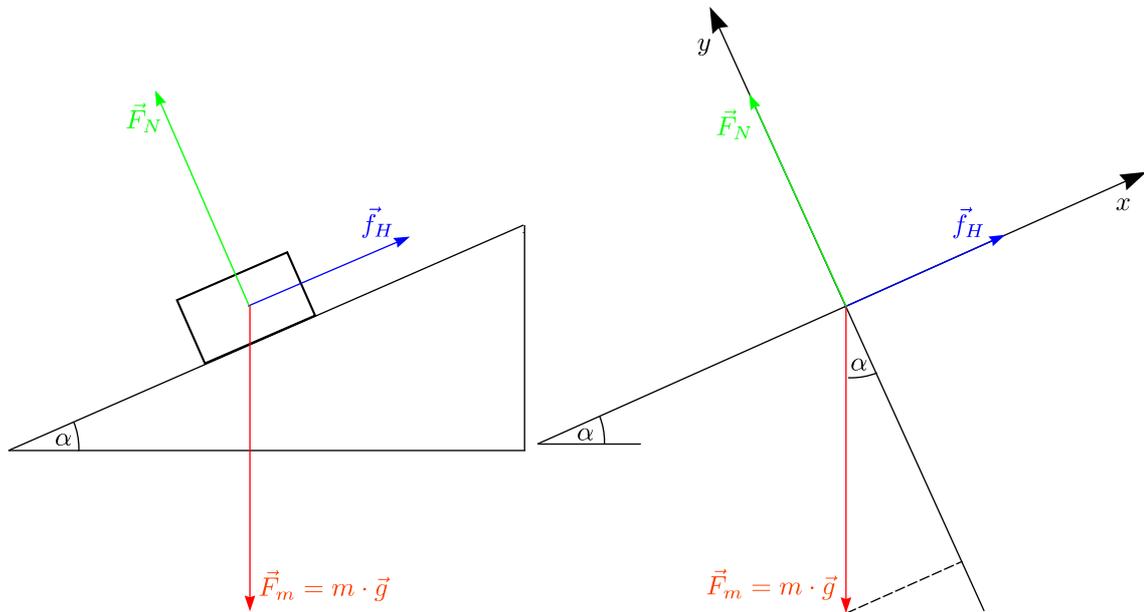
$$\vec{F} + \vec{f}_H + \vec{F}_N + m\vec{g} = \vec{0} \quad (|\vec{F}| \leq |\vec{f}_H|)$$

Sonderfall :

$$\vec{F} + \vec{f}_G + \vec{F}_N + m\vec{g} = \vec{0}$$

Für  $\vec{F} = -\vec{f}_G$  gleitet der Körper mit konstanter Geschwindigkeit.

b.) Beispiel:



x-Richtung:  $-mg \sin \alpha + f_H = 0$

y-Richtung:  $F_N - mg \cos \alpha = 0$

$\Rightarrow f_H = mg \sin \alpha$

$\Rightarrow F_N = mg \cos \alpha$

Mit  $f_H = F_N \cdot \mu_H$  und  $\mu_H = \tan \alpha$ , wobei  $\alpha$  der maximal mögliche Wert ist (bevor  $m$  gleitet).

Holz auf Holz :  $\mu_H = \tan 26^\circ = 0,49$      $\mu_G = \tan 10^\circ = 0,18$

Sandpapier auf Holz:  $\mu_H = \tan 33^\circ = 0,65$      $\mu_G = \tan 28^\circ = 0,53$

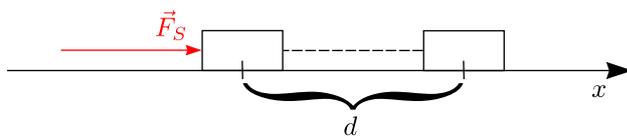
### 2.3.7 Arbeit und Energie

(Oder seit Adam und Eva das Paradies verlassen mußten)

Arbeit  $\equiv$  Kraft  $\times$  Weg

#### Einfachster Fall:

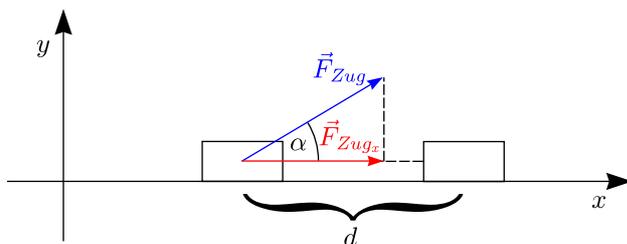
$A = F \cdot d$



$A = F_S \cdot d$

#### Genereller:

$A = \vec{F} \cdot \vec{d}$

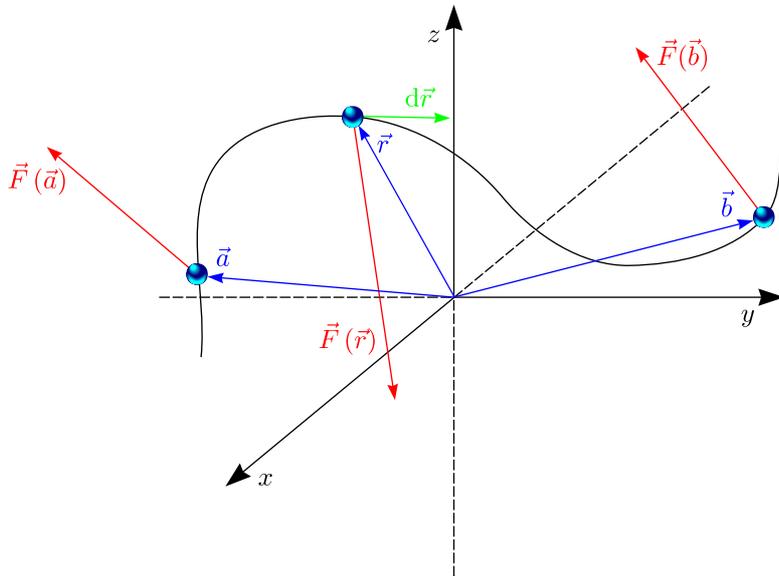


$A = F_{Zug_x} \cdot d = |\vec{F}_{Zug}| \cdot d \cdot \cos \alpha$

**Allgemein:**

$$A_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$



$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

$$[A] = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \equiv 1 \text{ Nm}$$

$$\equiv 1 \text{ Joule}$$

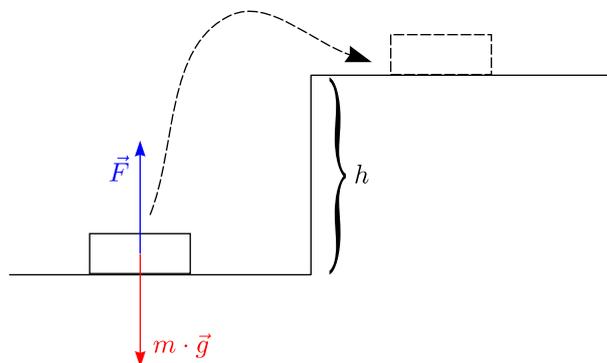
$$\equiv 1 \text{ Ws}$$

**Illustration:**

a.) Klettern auf Stufe ( $v = \text{const.}$ )

$$\vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

$$F = mg$$



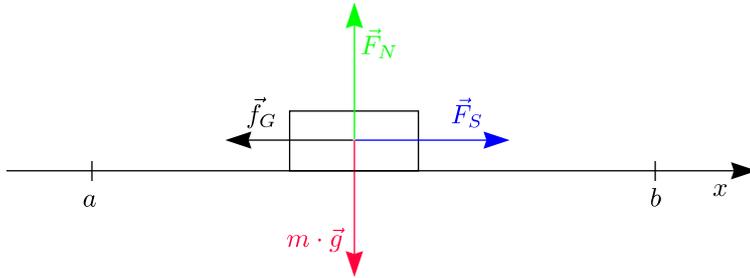
$$A = \vec{F} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = m \cdot g \cdot h$$

Professor Müller steigt die Stufe hinauf:

$$A = 0,5 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 80 \text{ kg} = 392 \text{ Nm} = 392 \text{ Ws}$$

Mit dieser Arbeit kann man eine 40 W-Glühbirne 10 s leuchten lassen!

b.) Schiebe Kiste ( $v = \text{const.}$ )



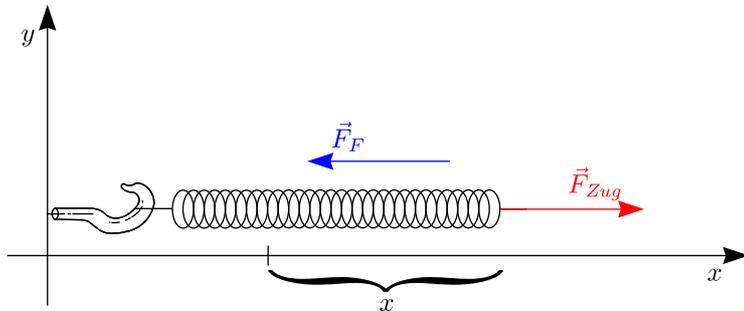
$$\vec{F}_N + m\vec{g} + \vec{F}_S + \vec{f}_G = \vec{0}$$

Kraft, die Arbeit leistet:

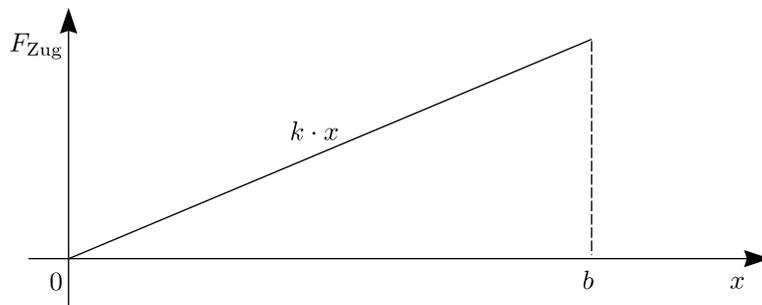
$$\vec{F}_S = -\vec{f}_G$$

$$A = \vec{F}_S \cdot \vec{d} = f_G \cdot (b - a)$$

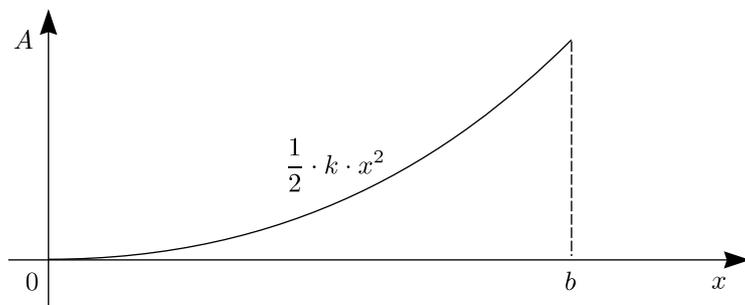
c.) Dehnung einer Feder



$$x\text{-Richtung: } F_{\text{Zug}} = k \cdot x$$

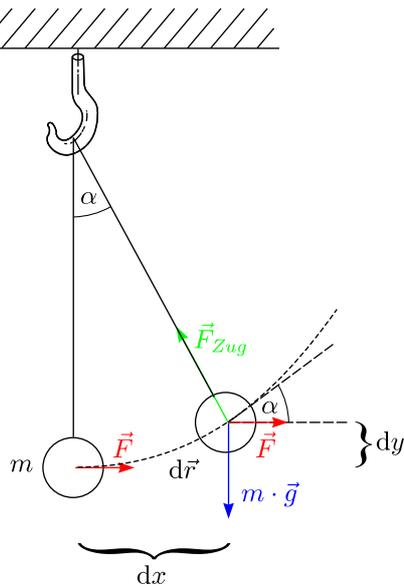


$$F_{\text{Zug}} = k \cdot x$$



$$A = \int_0^b kx \, dx = \frac{k}{2} b^2$$

d.) Schiebe Schaukel an:

**Keine Beschleunigung:**

$$\vec{F}_{\text{Zug}} + \vec{F} + m\vec{g} = \vec{0}$$

\*  $x$ -Richtung:

$$F - F_{\text{Zug}} \sin \alpha = 0$$

\*  $y$ -Richtung:

$$F_{\text{Zug}} \cos \alpha - mg = 0$$

$$\Rightarrow F = F_{\text{Zug}} \sin \alpha = m \cdot g \cdot \tan \alpha$$

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \cdot g \cdot \tan \alpha \cdot dx$$

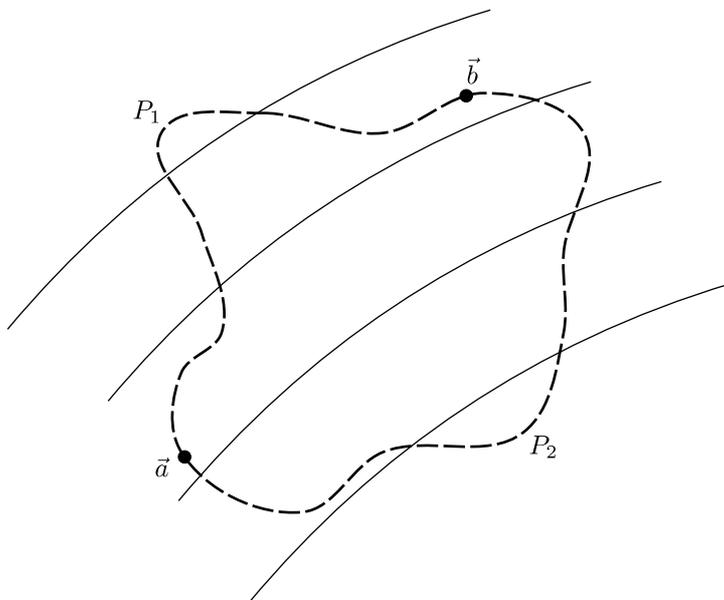
Mit  $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$  folgt:

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} mg \frac{dy}{dx} dx = \int_{a_y}^{b_y} mg dy = mg \cdot (b_y - a_y) = m \cdot g \cdot h$$

$$\textcircled{1} \text{ Arbeit } A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{r}$$

Arbeit im konservativen Kraftfeldern unabhängig vom Weg:

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{P_2}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{r} = - \int_{\vec{a}}^{P_1} \vec{F} d\vec{r}$$

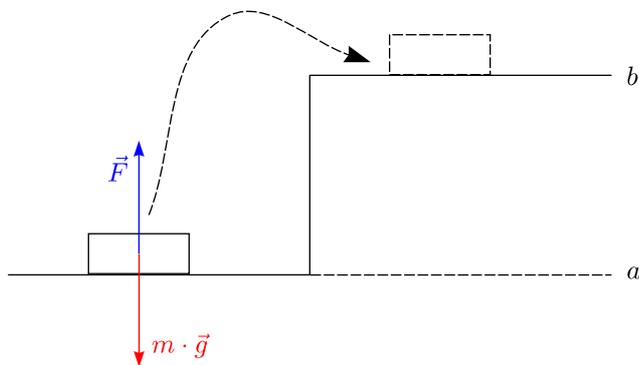


$$A_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}} = \oint \vec{F} \, d\vec{r} = 0$$

**Beispiele:**

\* (Homogenes) Gravitationsfeld

$$A = \int_a^b mg \, dy = mg(b - a)$$

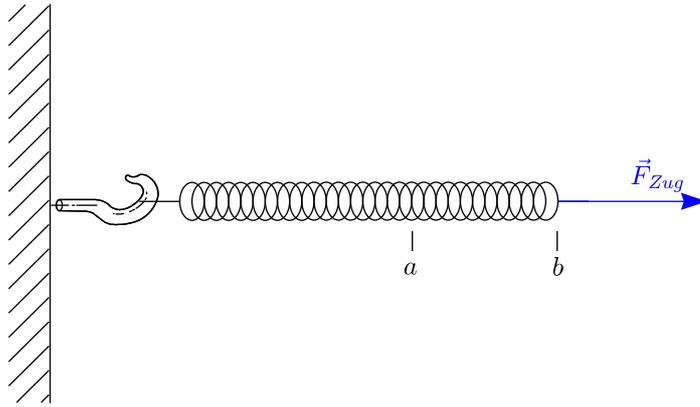


$$A_{\vec{b} \rightarrow \vec{a}} = + \int_b^a mg \, dy = -mg(b - a)$$

$$A_{\vec{a} \rightarrow \vec{a}} = 0$$

\* Federkraft

$$F = -kx \quad (\text{Hookesches Gesetz})$$

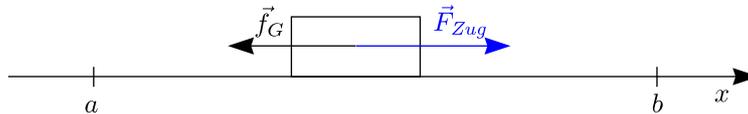


Für die Zugkraft ergibt sich:

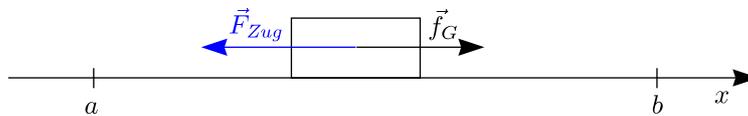
$$F_{Zug} = +kx$$

$$A_{a \rightarrow b} = \int_a^b kx \, dx = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) = - \int_b^a kx \, dx = -A_{b \rightarrow a}$$

\* Nicht konservative Kraft: Reibung



$$A_{a \rightarrow b} = \int_a^b f_G \, dx = f_G(b - a)$$



$$A_{b \rightarrow a} = - \int_b^a f_G \, dx = f_G(b - a) = A_{a \rightarrow b}$$

Das heißt:

$$A_{a \rightarrow a} = \oint \vec{f}_G \, d\vec{r} \neq 0$$

**Definition von konservativen Kräften:**

Die Kraft ist konservativ, wenn es eine skalare Funktion gibt, für die gilt:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{-\vec{\nabla}}_{\substack{\text{Nabla} \\ \text{(arab. Pfeil)}}} V(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (\partial \triangleq \text{partielle Ableitung})$$

$$\begin{aligned}
 A_{\vec{a} \rightarrow \vec{b}} &= \oint \vec{F} \, d\vec{r} = - \oint \left( \frac{\partial}{\partial x} \right) V(\vec{r}) \underbrace{\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} = \\
 &= - \int_{a_x}^{b_x} \frac{\partial}{\partial x} V(\vec{r}) \, dx - \int_{a_y}^{b_y} \frac{\partial}{\partial y} V(\vec{r}) \, dy - \int_{a_z}^{b_z} \frac{\partial}{\partial z} V(\vec{r}) \, dz = \\
 &= -(V(b_x) - V(a_x)) + V(b_y) - V(a_y) + V(b_z) - V(a_z) = 0
 \end{aligned}$$

② Kinetische Energie:

Wenn resultierende Kraft Arbeit leistet ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ), bekommt das Objekt kinetische Energie:

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \cdot \vec{a}(\vec{r}, t) \, d\vec{r} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \, d\vec{r} = \int_{\vec{v}_a}^{\vec{v}_b} m \vec{v} \, d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_b^2 - v_a^2) = E_k(\vec{b}) - E_k(\vec{a})$$

③ Potentielle Energie:

Potentielle Energie ist gespeicherte Energie, die vollständig umgewandelt werden kann in kinetische Energie.

$$A = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} \, d\vec{r} = E_p(\vec{b}) - E_p(\vec{a})$$

**Energieerhaltungssatz:**

Die Summe aller Energien in einem abgeschlossenen System ist konstant.

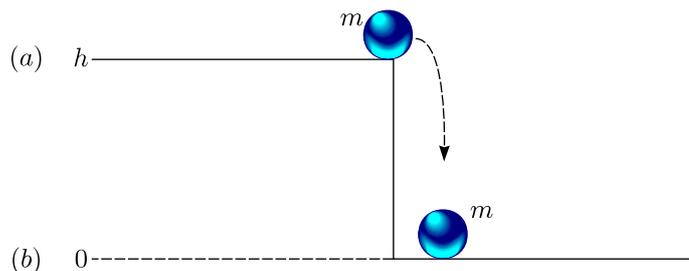
Spezialfall: reibungslose mechanische Energie

$$E = E_k(\vec{a}) + E_p(\vec{a}) = E_k(\vec{b}) + E_p(\vec{b}) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

**Illustrationen und Beispiele:**

a.) Fallender Gegenstand

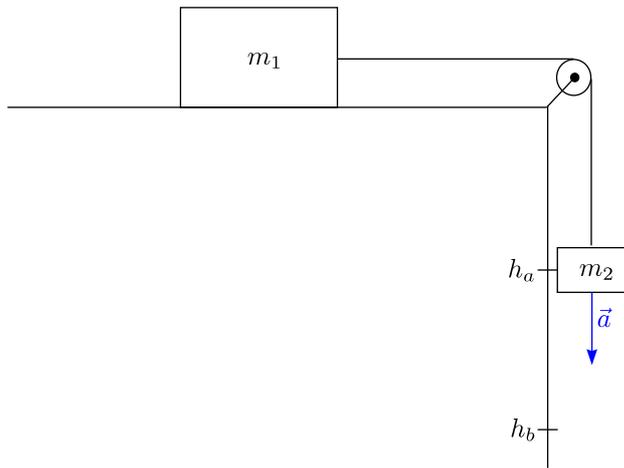


$$E = E_p(a) + E_k(a) = m \cdot g \cdot h + 0 = E_p(b) + E_k(b) = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

Damit ergibt sich folgende Geschwindigkeit:

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

b.) Beschleunigung eines Gleiters



$$E = m_2gh_a + 0 = m_2gh_b + \frac{1}{2}m_2v^2 + \frac{1}{2}m_1v^2$$

Hiermit folgt:

$$v = \sqrt{\frac{2m_2g(h_a - h_b)}{m_2 + m_1}}$$

Betrachten wir wiederum folgendes Zahlenbeispiel:

$$h = h_a - h_b = 1,47 \text{ m}$$

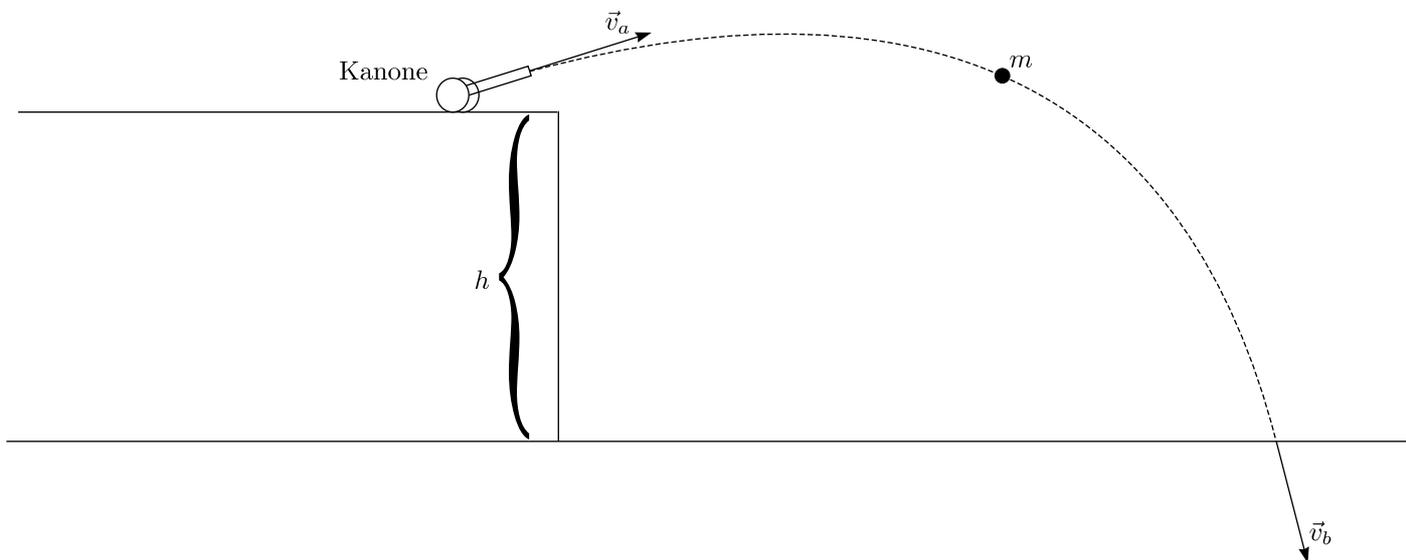
$$m_2 = 6 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$m_1 = 0,255 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow v_{\text{theoretisch}} = 0,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Rightarrow v_{\text{experimentell}} = 0,77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c.) Kanonenschuß

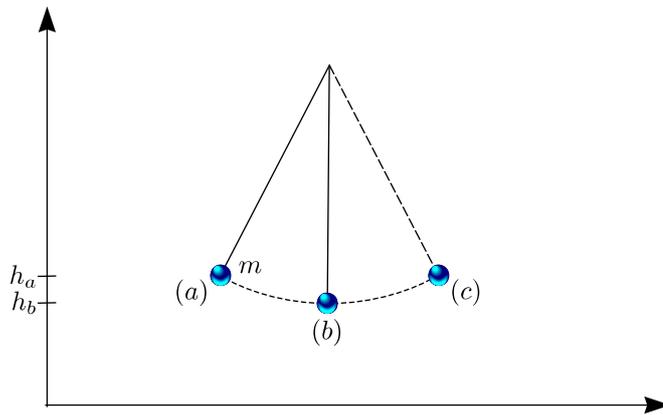


**Energien:**

$$E = E_p(a) + E_k(a) = mgh + \frac{1}{2}mv_a^2 = E_p(b) + E_k(b) = 0 + \frac{1}{2}mv_b^2$$

$$\Rightarrow v_b = \sqrt{2gh + v_a^2}$$

d.) Illustration: Schwingendes Pendel

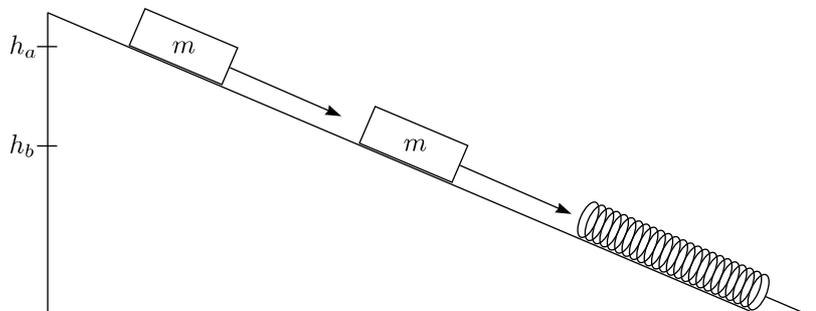


$$E_a = mgh_a$$

$$E_b = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgh_b$$

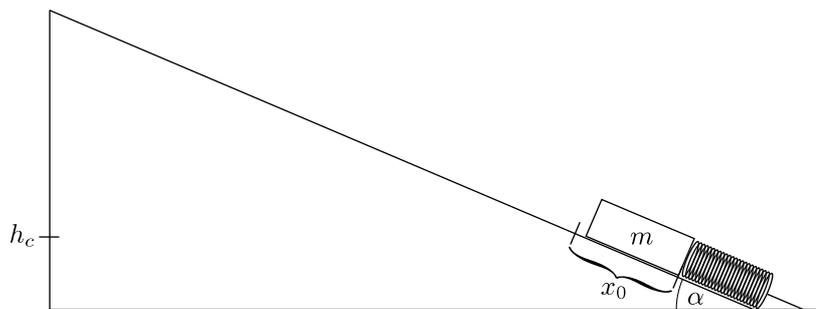
$$E_c = mgh_a$$

e.) Federkraft



$$E = E_a = m \cdot g \cdot h_a$$

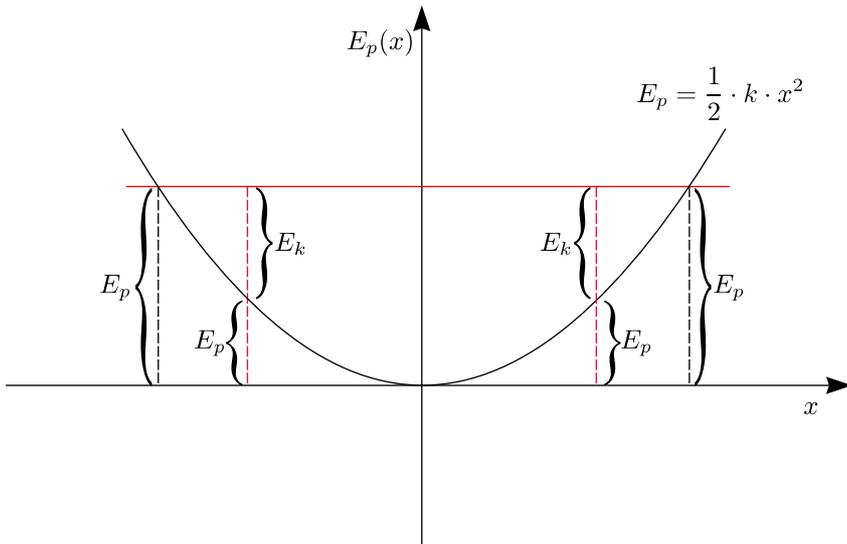
$$E_b = m \cdot g \cdot h_b + \frac{1}{2}mv_b^2$$



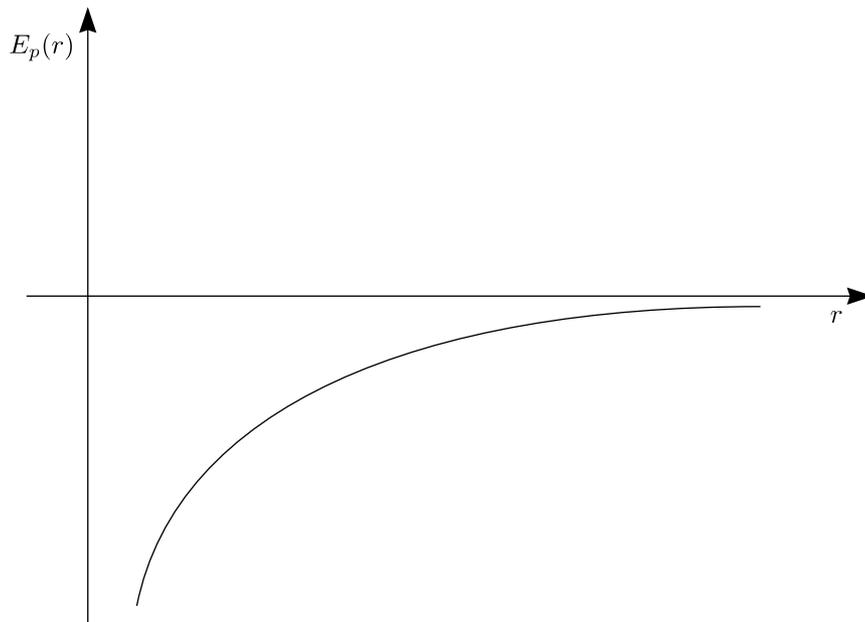
$$E = mgh_c + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot h_a = m \cdot g \cdot h_c + \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{2mg(h_a - h_c)}{k}}$$

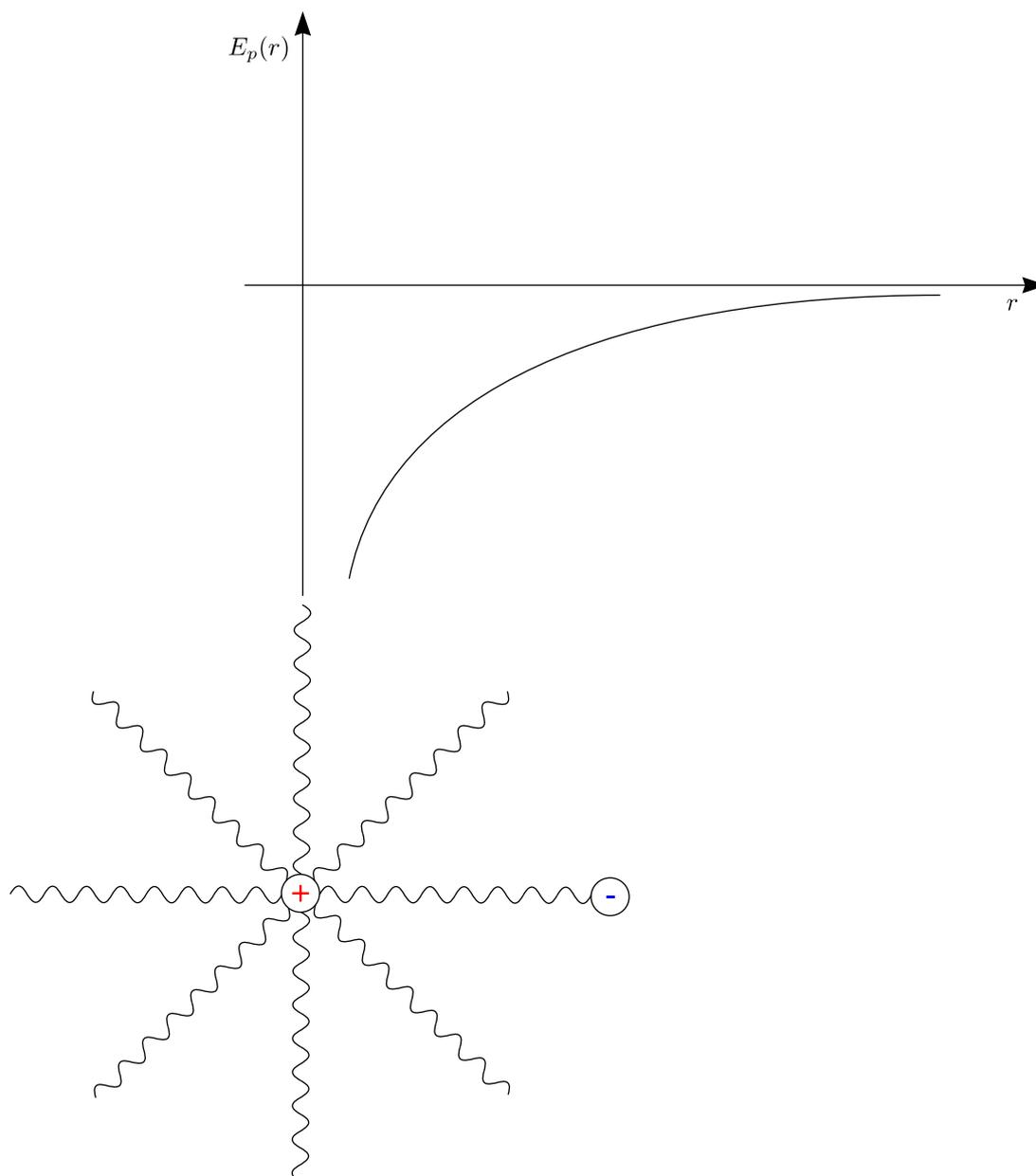
Energiediagramme:Federpotential:

$$E = E_k + E_p = \text{const.}$$

Gravitationspotential:

$$E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

**Elektrostatistisches Potential:**



$$E_p(r) = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

\* Bisher:

Es galten die Gesetze der Erhaltung mechanischer Energie, d.h. wir verzichteten auf dissipative Kräfte.

$$E = E_p(\vec{a}) + E_k(\vec{a}) = E_p(\vec{b}) + E_k(\vec{b}) = \text{const.}$$

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k = 0$$

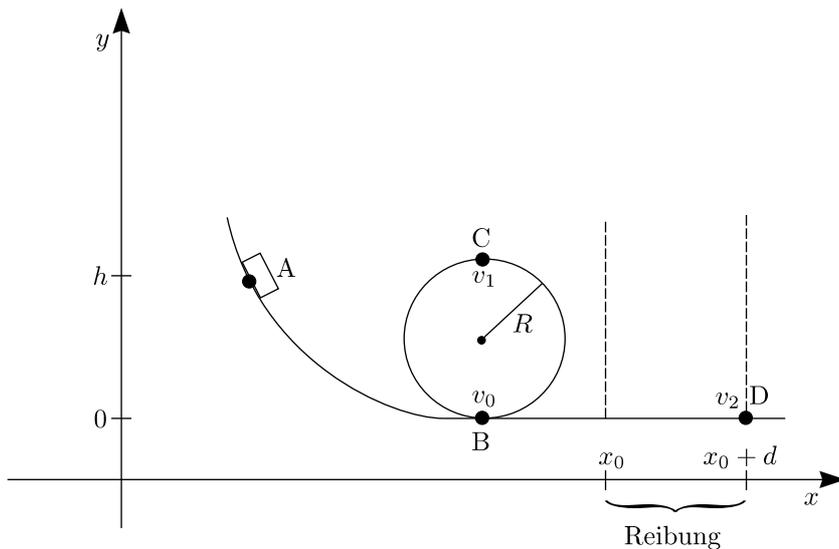
\* Jetzt:

Die „innere“ Energie ist eine Art Arbeit, welche nicht vollständig in kinetische Energie (im allgemeinen mechanische Arbeit) zurückgewandelt werden kann.

**Beispiel:**

Für Reibung, Wärmeenergie, Verformungsenergie, „innere“ Energie gilt:

$$E_{tot} = E_p(\vec{a}) + E_k(\vec{a}) = E_p(\vec{b}) + E_k(\vec{b}) + \underbrace{E_{IN}}_{-\int_{\vec{F}_1}^{\vec{F}_2} \vec{F}_{1N} d\vec{r}}$$

**Rechenbeispiel: Achterbahn mit Looping**

a.) Ohne „innere Energie“

A.)  $E_A = m \cdot g \cdot h + 0E$

B.)  $E_B = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2$

C.)  $E_C = m \cdot g \cdot (2R) + \frac{1}{2}mv_1^2$

Hiermit folgt:

$$v_0 = \sqrt{2gh}$$

$$v_1 = \sqrt{2gh - 4gR}$$

**Zahlenbeispiel:**

Es sei  $h = 60$  m,  $R = 20$  m und  $m = 600$  kg. Damit ergeben sich folgende Geschwindigkeiten:

$$v_0 \approx 34,29 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_1 \approx 19,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b.) Jetzt wollen wir auf der Strecke  $d$  bremsen. (REIBUNG AN!)

A.)  $E_A = m \cdot g \cdot h + 0 + 0$

B.)  $E_B = 0 + \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$

D.)  $E_D = 0 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \int_{x_0}^{x_0+d} f_g dx$

$$E_{IN} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}_g d\vec{r} = - \int_{x_0}^{x_0+d} -f_g dx$$

**Zahlenbeispiel:**

$$d = 40 \text{ m}$$

$$\mu = 0.5$$

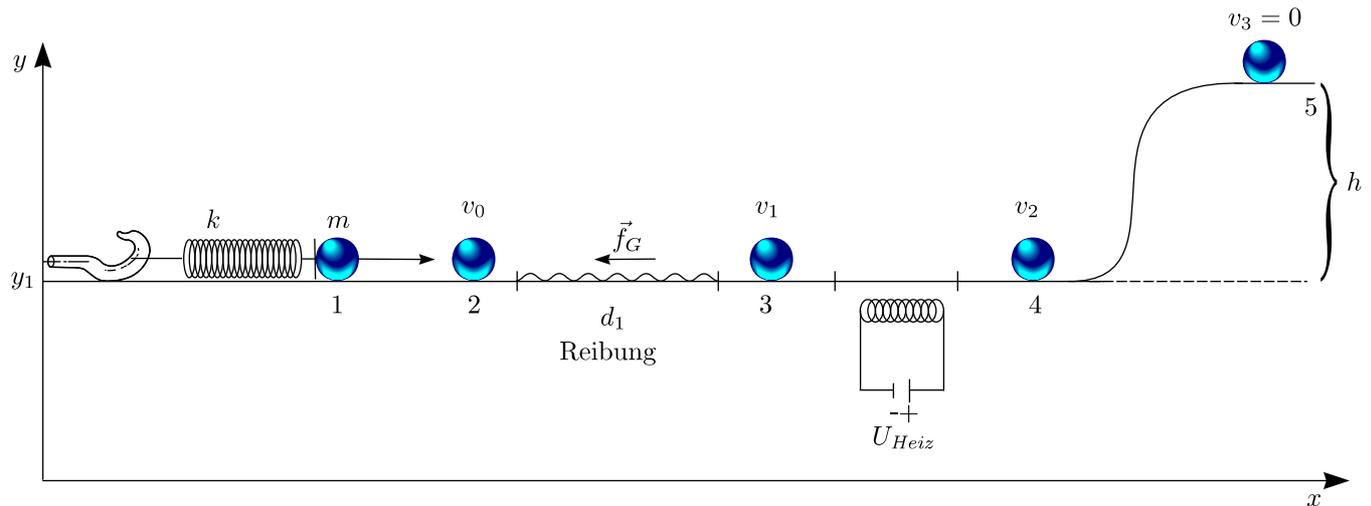
$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gh - \frac{2f_g d}{m}} = \sqrt{2gh - 2\mu g d} \approx 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\text{mit } f_g = m \cdot g \cdot \mu)$$

**Zentral: Energieerhaltung**

Die Energie  $E$  ist eine mengenartige Größe. Energietransformationen in einem geschlossenen System:

$$E_{tot} = E_p + E_k + E_{IN} = \text{const.}$$

$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k + \Delta E_{IN} = 0$$

**Beispiel:**


$$1.) E_{tot} = m \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2}kd^2; E_k = 0; E_{IN_1} = 0, E_{IN_2} = 0$$

$$2.) E_{tot} = m \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2}mv_0^2; E_{IN_1} = 0, E_{IN_2} = 0$$

$$3.) m \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + E_{IN_1}$$

$$4.) m \cdot g \cdot y_1 + \frac{1}{2}mv_2^2 + E_{IN_1} + E_{IN_2}$$

$$5.) m \cdot g \cdot (y_1 + h) + E_{IN_1} + E_{IN_2}$$

**Energietransformationen:**

$$2.) \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd^2$$

$$3.) E_{IN_1} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2)$$

$$4.) E_{IN_2} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$5.) mgh = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Zu jedem Zeitpunkt (Ort) kann man somit die Bewegung beschreiben.

RECHNEN MIT ENERGIEN IST HÄUFIG EINFACHER ALS MIT BEWEGUNGSGLEICHUNGEN  
ODER KRÄFTEN!

**Leistung (engl. power):**

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t} \text{ (Arbeit im Zeitintervall)}$$

$$P = \frac{dA}{dt}, [P] = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} = 1 \text{W}$$

Nach James Watt (\*1736): Entwickler der modernen Dampfmaschine (Auch 1 PS = 735, 4988 W)

**Versuch:**

Wir bestimmen die Leistung des Übungsgruppenleiters, Höhe: 3m

$$\langle P \rangle = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} = \frac{80 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m}}{t} \approx \frac{3 \text{ PS}}{5 \text{ s}} = \frac{3}{5} \text{ PS}$$

**Zusammenhang zwischen mechanischer und elektrischer Leistung:**

$$1 \text{ W} = 1 \text{ N} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1 \text{ VA}; \text{Lampe: } 50 - 100 \text{ W}$$

Porsche :

1200 kg,  $t = 5 \text{ s}$

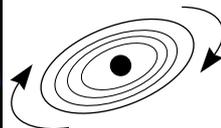
$$v = 0 \Rightarrow v = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left( 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$\langle P \rangle = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 1200 \text{ kg} \cdot \left( 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{t} \approx 94 \text{ kW} = 126 \text{ PS}$$

**Schwerpunkt und Impuls:**

Bis jetzt haben wir Körper nur im geschlossenen System betrachtet. Jetzt wollen wir makroskopische Systeme, in denen  $N$  Teilchen miteinander wechselwirken, untersuchen. Unser Interesse gilt der Gesamtbewegung des Systems.

**Beispiel:**



Unsere Milchstraße besteht aus ungefähr  $10^{10}$  Sonnen. Jeder Stern hat Eigenbewegung und außerdem bewegt sich das ganze. Also definieren wir:

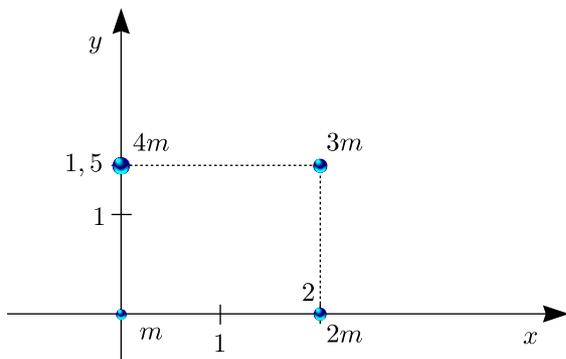
- \* Massenmittelpunkt
- \* Schwerpunkt
- \* center of mass (CM)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \int \vec{r}(m) dm \text{ für unendlich viele Teilchen (Sonne)}$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i^N m_i r_i}{\sum_i^N m_i} \text{ für } N \text{ Teilchen}$$

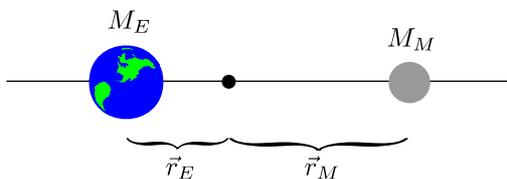
$\vec{r}_{CM}$  ist der masserichtete Mittelwert der Abstände.

**Beispiel 1:**



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2m \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3m \begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix} + 4m \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}}{m + 2m + 3m + 4m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,05 \end{pmatrix}$$

**Beispiel 2: Erde-Mond**



$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_E \vec{r}_E + m_M \vec{r}_M}{m_E + m_M} = \frac{-m_E r_E + m_M r_M}{m_E + m_M} = 0, d = x_E + x_M$$

Betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel:

$$m_E = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}; m_M = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg} \Rightarrow x_E = \frac{m_M d}{m_E + m_M}$$

**Der Impuls:**

Geschwindigkeit  $\times$  Masse

$$[p] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$\vec{p} = \vec{v} \cdot m$  gilt für Vielteilchensysteme als auch für massive Körper.

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \quad \sum_i m_i = m$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt} \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_i \vec{p}_i$$

Analog gilt dies für die Beschleunigung.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt} \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{v}_i = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i$$

**Ohne äußeren Kräfte gilt:**

Ziehen wir das 1.Newtonsche Gesetz zu Rate:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow m \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{0}$$

$$m \vec{a}_{CM} = m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \text{ oder } \vec{p}_{CM} = \text{const.}$$

Das Gesetz der Impulserhaltung folgt direkt aus Newton.

Wenn keine externen Kräfte vorhanden sind, ist die Summe aller Momente im geschlossenen System konstant

#### **Ballistisches Pendel:**

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_2^2 = (m_1 + m_2) g \cdot h$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Da es keine äußeren Kräfte gibt, ist  $\vec{r}_{CM}$  erhalten.

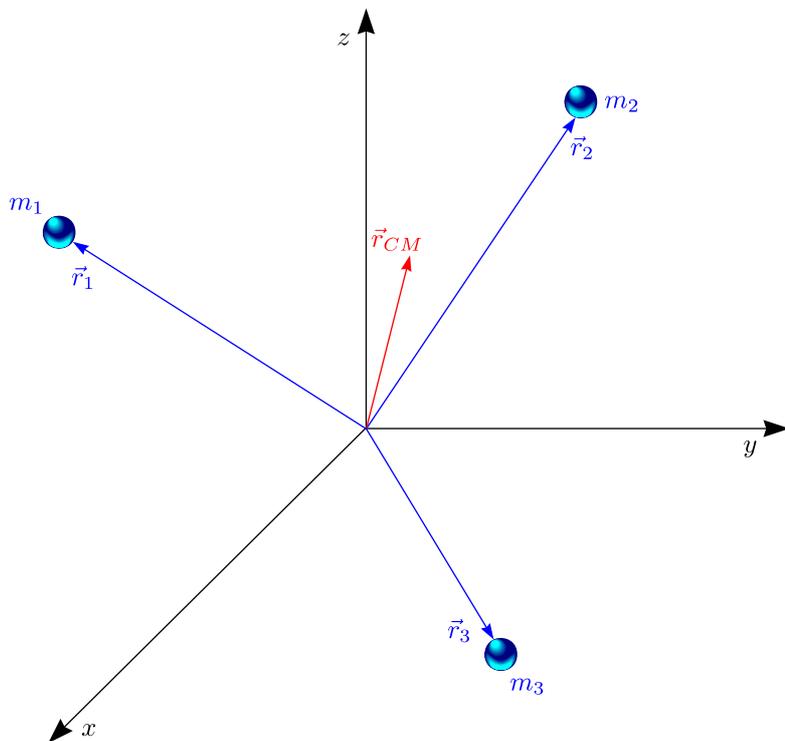


# Kapitel 3

## Lineare Bewegungen für Systeme von Massenpunkten

### 3.1 Schwerpunkt und Impuls (CM=center of mass)

$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$



Für unendlich viele Teilchen kann man dies verallgemeinern:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} dm = \frac{1}{M} \cdot \int \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) dm$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M};$$

$$M \cdot \vec{v}_{CM} \equiv \vec{p}_{CM} = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\vec{a}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{M}; M \cdot \vec{a}_{CM} = \vec{F}_{CM} = \sum_i \vec{F}_i$$

### Der Impulserhaltungssatz:

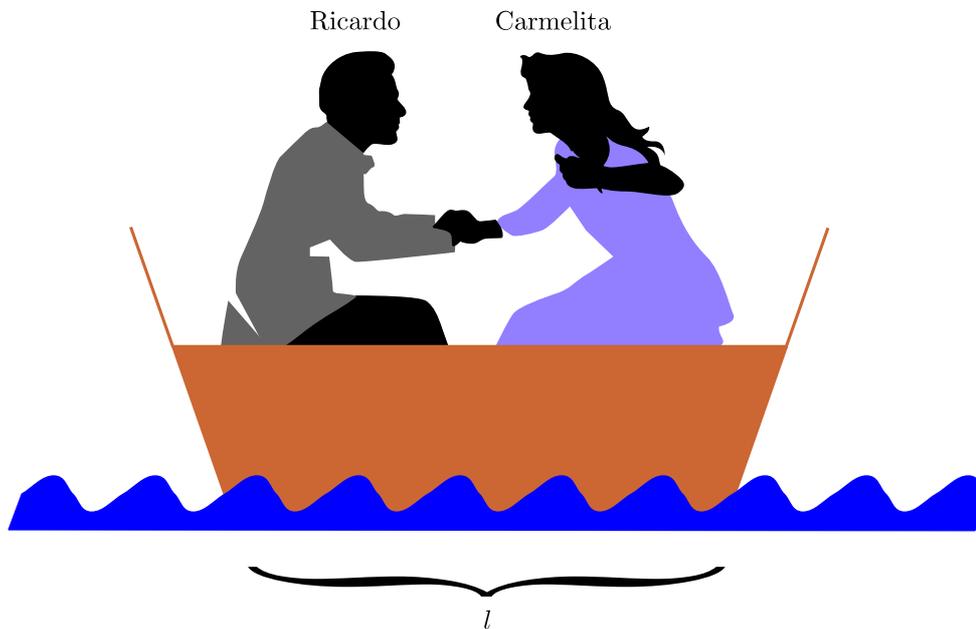
In einem geschlossenen System ohne resultierende EXTERNE Kraft ist der Gesamtimpuls erhalten (Beachte: alle interne Kräfte zwischen den Massenpunkten heben sich nach dem 3. Newtonschen Gesetz auf!):

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{\sigma} \triangleq \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{\sigma}$$

#### 1. Beispiele, Demonstrationen:

Wenn keine äußeren Kräfte wirken, ist  $\vec{p}_{CM}$  erhalten. ODER: WIE ERFAHRE ICH DAS GEWICHT MEINES ÜBUNGSGRUPPENLEITERS? (funktioniert auch bei Frauen!)

#### Ricardo, Carmelita in einem Boot:

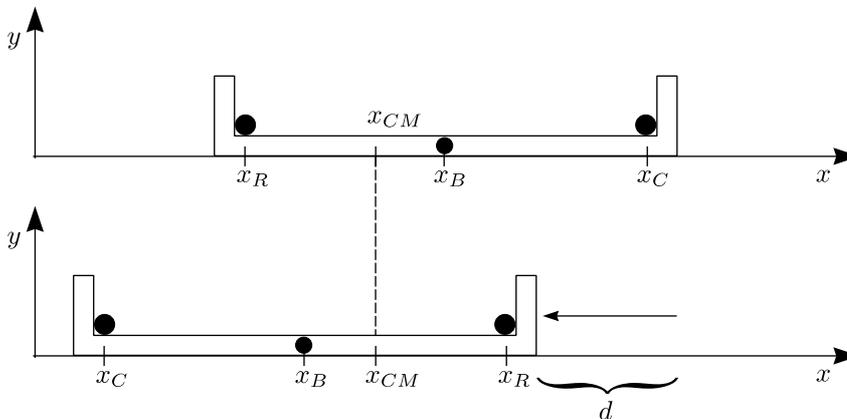


$$m_R = 80 \text{ kg}, m_C = ?$$

$$m_B = 30 \text{ kg}$$

$$l = 3 \text{ m}$$

Die beiden tauschen die Plätze. Dabei bewegt sich das Boot um 40 cm.



$$Mx_{CM} = m_R x_R + m_B x_B + m_C x_C$$

Auch gilt:

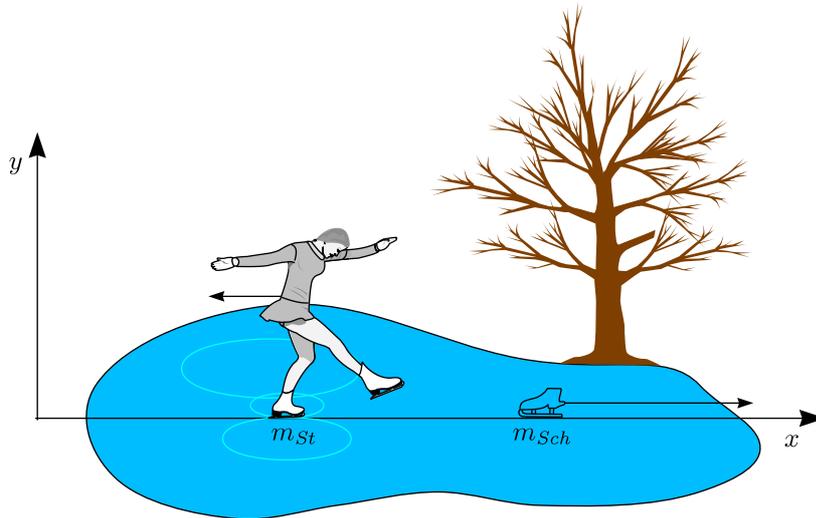
$$x_C = x_R + l$$

$$d = 0,40 \text{ m}$$

$$Mx'_{CM} = m_Rx'_R + m_Bx'_B + m_Cx'_C = m_R(x_C - d) + m_B(x_B - d) + m_C(x_R - d) = Mx_{CM}$$

$$m_C = \frac{m_R(l - d) - m_Bd}{l + d} \approx 57,6 \text{ kg}$$

Sie stehen auf dem Eis, werfen Schuh von sich:



$$m_{St} = 73 \text{ kg} \quad v_{CM} = 0$$

$$m_{Sch} = 2 \text{ kg} \quad v_{Sch} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Keine resultierenden äußeren Kräfte:

$$\vec{p}_{CM} = \text{const.} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

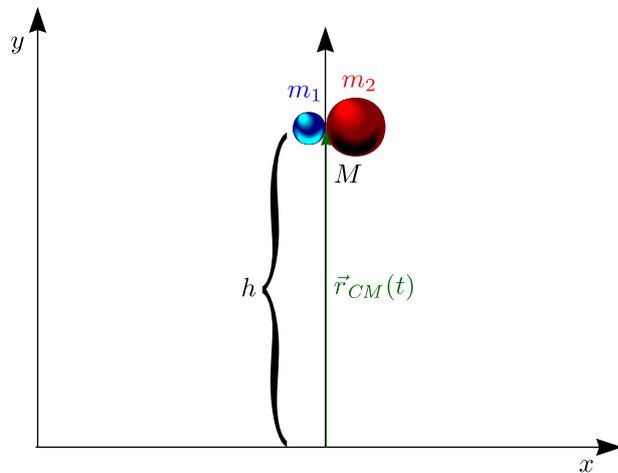
Hier:  $\vec{p}_{CM} = \vec{0} = m_{St}\vec{v}_{St} + m_{Sch}\vec{v}_{Sch}$

x-Richtung:  $m_{Sch}v_{Sch} - m_{St}v_{St} = 0$

$$\Rightarrow v_{St} = \frac{m_{Sch}}{m_{St}}v_{Sch} = \frac{2 \text{ kg}}{73 \text{ kg}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 0,27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Beispiele:**

CM-Bewegung mit externer Kraft:



Betrachte Fall der Kugeln:

a.) Kugeln kleben zusammen

$$M = m_1 + m_2$$

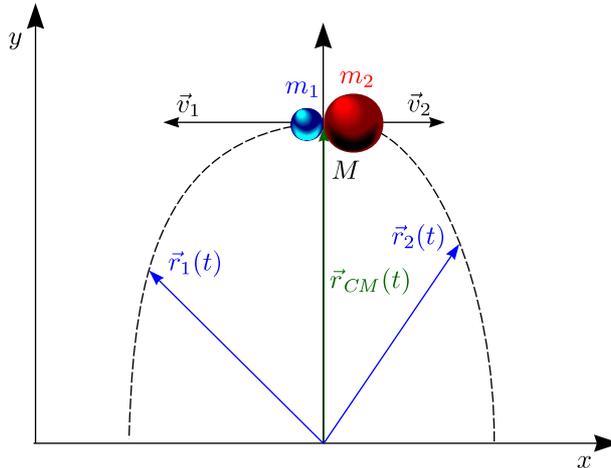
$$\vec{F}_{CM} = m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} = M \vec{g} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{p}_{CM} = M \vec{g}$$

$$\vec{p}_{CM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mgt \end{pmatrix}; \vec{v}_{CM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{CM} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{g}{2}t^2 + h \end{pmatrix}$$

b.) Kugeln bewegen sich auseinander:



$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} -v_1 t \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}; \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} v_2 t \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_{CM}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{M} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} -m_1 v_1 t + m_2 v_2 t \\ M (h - \frac{g}{2}t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

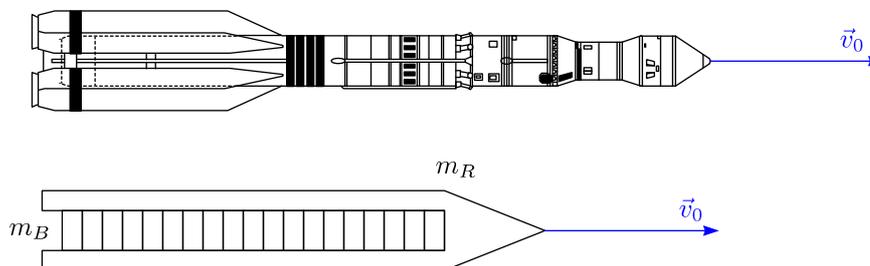
$$(m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0)$$

$$\vec{v}_{CM}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_{CM}(t) = M \cdot \vec{v}_{CM}(t) = M \cdot \vec{g} \cdot t$$

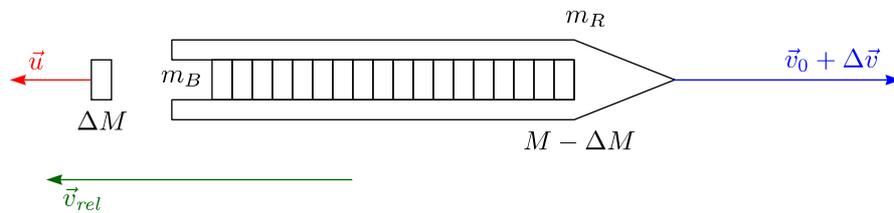
$$\frac{d\vec{p}_{CM}(t)}{dt} = M \cdot \vec{g}$$

2. Systeme mit variierender Masse: Raketen



$$\vec{p}_{CM} = (m_R + m_B) \cdot \vec{v}_0 = M \cdot v_0$$

$$t = t_0 + \Delta t$$



$$\begin{aligned} \vec{p}_{CM} &= (m - \Delta M)(\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}) + \Delta M \cdot \vec{u} = \\ &= (M - \Delta M) \cdot (\vec{v}_0 + \Delta\vec{v}) + \Delta M(\vec{v}_{rel} + \vec{v}_0) = \\ &= M\vec{v}_0 + M\Delta\vec{v} - \underbrace{\Delta M\Delta\vec{v}}_{\text{klein}} + \Delta M\vec{v}_{rel} + \Delta M\vec{v}_0 = \vec{p}_{CM} = M\vec{v}_0 \end{aligned}$$

Damit resultiert:

$$M\Delta\vec{v} + \Delta M\vec{v}_{rel} = 0$$

Für  $\Delta t \mapsto 0$ :  $\underbrace{\frac{dM}{dt}\vec{v}_{rel}}_{\text{Schubkraft}} + M\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$

Wir zerlegen dies in Komponenten:

$$\begin{aligned} -\frac{dM}{dt}\vec{v}_{rel} &= M\frac{dv}{dt} \\ -\int \frac{dM}{M} &= \frac{1}{v_{rel}} \int_{v_0}^{v_{end}} dv \end{aligned}$$

$$M = m_R + m_B$$

Damit ergibt sich dann für die Endgeschwindigkeit:

$$v_{end} = v_{rel} \cdot \ln\left(\frac{m_R + m_B}{m_R}\right) + v_0$$

**Beispiele:**

a.) Saturn V (Apollo):



Der Brennstoff dieser Rakete besteht aus Kerosin und flüssigem Sauerstoff (O<sub>2</sub>(l)).

$$v_{rel} = 3,1 \cdot 10^7 \frac{m}{s}$$

$$m_R + m_B = 2450 \text{ t (!)}$$

$$m_B = 1700 \text{ t}$$

Die Brenndauer des Treibstoffs beträgt 100 s.

Unter Vernachlässigung der Gravitation ergibt sich eine Endgeschwindigkeit von:

$$v_{end} = 3700 \frac{m}{s}$$

Korrekt ist jedoch:

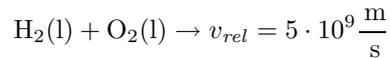
$$v_{end} = 3700 \frac{m}{s} - g \cdot 100 \text{ s} = 2700 \frac{m}{s} < 10700 \frac{m}{s} \text{ (Fluchtgeschwindigkeit)!}$$

Dies ist viel zu wenig! Die Lösung dieses Dilemmas ist nun die Mehrstufenrakete, bei welcher im Laufe des Flugs  $m_R$  reduziert wird!

b.) Reise um nächsten Stern ( $\alpha$ -Centauri):

$$v_{end} \stackrel{!}{=} c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

\* Konventioneller Treibstoff:



$$m_R = 10^5 \text{ kg}$$

$$v_{end} = v_{rel} \cdot \ln \left( \frac{m_R + m_B}{m_R} \right)$$

Damit gilt:

$$m_B = m_R \cdot \left( e^{\frac{v_{end}}{v_{rel}}} - 1 \right)$$

Für  $v_{end} = c$  ergibt sich eine Masse des Brennstoffs von  $10^{4912}$  kg! Dies geht nicht!

\* Kernfusion von  $D + T$ :

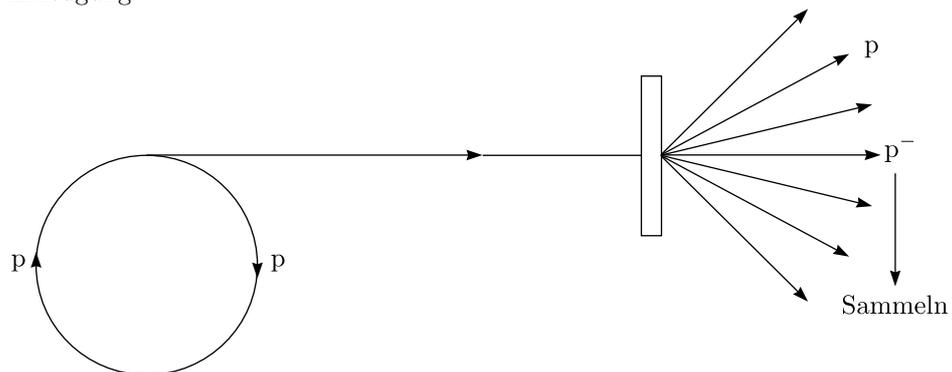
$$v_{rel} = 3 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m_B = 2,2 \cdot 10^6 \text{ t}$$

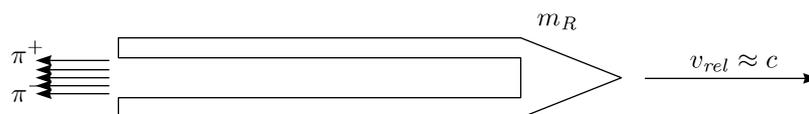
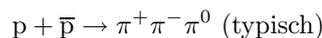
Geht auch nicht!

\* Antimaterie:

a.) Erzeugung:



b.) Vernichtung von Materie und Antimaterie im Raumschiff: Rückstoß



$$m_B = 100 \text{ t} \cdot \left( e^{\frac{c}{c \cdot \frac{2}{3}}} - 1 \right) \approx 450 \text{ t}$$

Muß mitgenommen werden zum Bremsen:

$$\Rightarrow m_B = 550 \text{ t} \cdot e^{\frac{c}{c \cdot \frac{2}{3}}} = 2465 \text{ t}$$

Allerdings wurde bislang nur ca. 0,1 mg an  $\bar{p}$  hergestellt!

## 3.2 Elastische und unelastische Stöße

### Elastische Stöße :

Kinetische Energie vor und nach dem Stoß sind gleich:

$$E_{tot} = E_{ki} + E_{pi} = E_{kf} + E_{pf} \text{ (} i=\text{initial, } f=\text{final)}$$

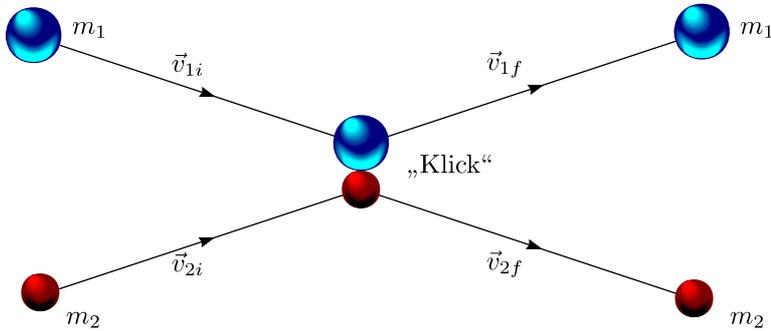
$$E_{ki} = E_{kf}$$

Inelastische Stöße :

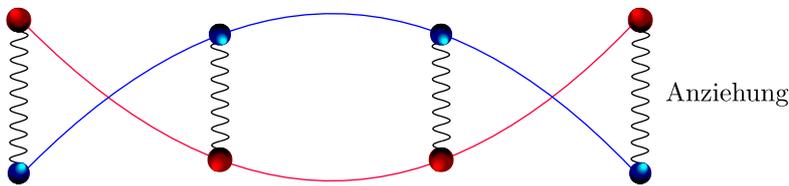
$$E_{kf} = E_{ki} - Q \quad (Q=\text{innere Energie})$$

Beispiele von Stößen:

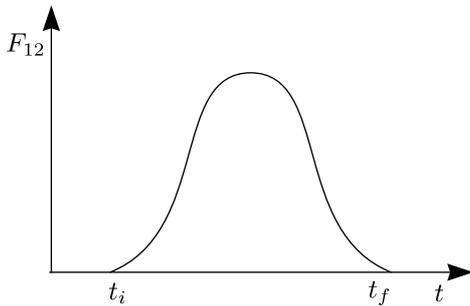
Beim Billard :



Gravitation:



Kraftübertragung durch Kraftstoß:



$$\Delta \vec{p}_1 = \vec{p}_{1f} - \vec{p}_{1i} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} dt$$

$$\Delta \vec{p}_2 = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}_{1 \rightarrow 2} dt$$

3. Newtonsches Gesetz :  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \Rightarrow \Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{p}_{CM} = \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \text{const.}$$

$\Rightarrow$  Impulserhaltungssatz

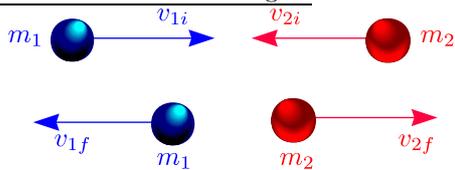
Spezialfall: Elastischer Stoß

$$\vec{p}_{CM} = \text{const.} = m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

$$E_k = \text{const.} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

**Illustration:**

Im eindimensionalen Fall gilt:



$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = \frac{1}{2}m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

$$\Rightarrow v_{1i} + v_{1f} = v_{2i} + v_{2f}$$

$$\Rightarrow v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}$$

Einsetzen ergibt:

$$v_{1f} = v_{1i} \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) + v_{2i} \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$v_{2f} = v_{1i} \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) + v_{2i} \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right)$$

**Beispiele:**

\*  $m_1 = m_2$  (Billard)

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v_{2i} \\ v_{2f} &= v_{1i} \end{aligned}$$

\*  $m_1 = m_2$  und  $v_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} v_{1f} &= 0 \\ v_{2f} &= v_{1i} \end{aligned}$$

\*  $m_2 = \infty$  und  $v_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} v_{1f} &= -v_{1i} + \underbrace{v_{2i} \cdot 2}_{=0} \\ v_{2f} &= 0 \end{aligned}$$

\*  $m_1 = \infty$  und  $v_{2i} = 0$

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v_{1i} \\ v_{2f} &= 2v_{1i} \end{aligned}$$

**Inelastischer Stoß:**

$$\vec{p}_{CM} = \text{const.}, E_{CM} \neq \text{const.}!$$

$$E_{tot} = E_{k1i} + E_{k2i} = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = E_{k1f} + E_{k2f} + Q \quad (Q \equiv \text{„}U_{\text{int}}\text{“})$$

$$= \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + Q$$

**Illustration:**

Eindimensional, total inelastisch:



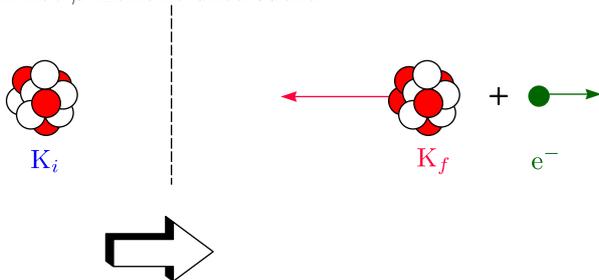
Impulserhaltung:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f = p_{CM} (= \text{const.})$$

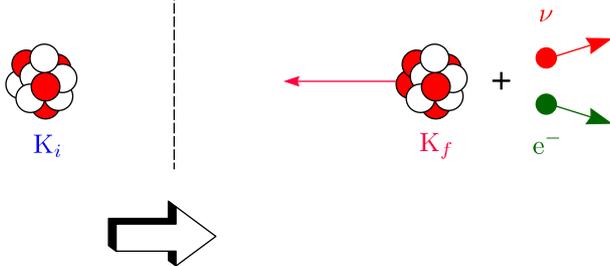
$$\Rightarrow v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

**Beispiel für Energie/Impulserhaltung:**

Man hat  $\beta$ -Zerfälle untersucht:



Hierbei wurde festgestellt, daß  $\vec{p}_{K_i} > \vec{p}_{K_f} + \vec{p}_{e^-}$ . Die Lösung des Problems ist nun folgende:



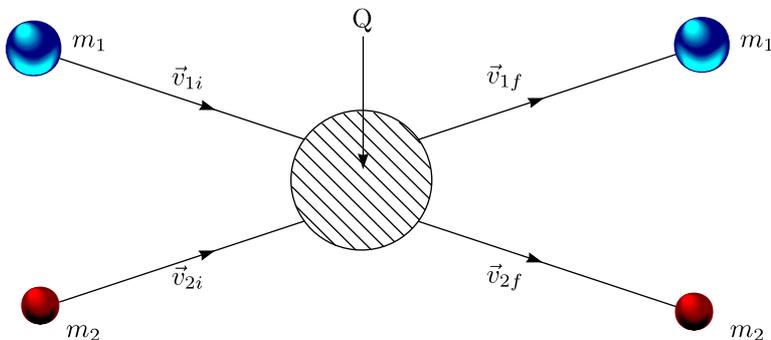
Postulat von Pauli (1933): Neutrino

**Energie:**

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + Q$$

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1i} - v_{2i})^2$$

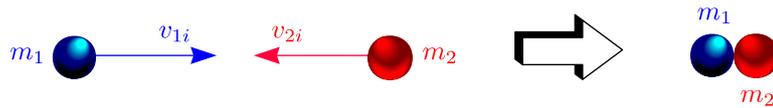
**Allgemeine Anwendung von Stößen:**



Aus der Bewegung am Anfang und am Ende kann man Rückschlüsse über den Stoßprozess ziehen.

**Beispiele:**

\*  $m_1 = m_2, v_{2i} = -v_{1i}$



$\Rightarrow v_f = 0; E_{tot} = 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = Q$

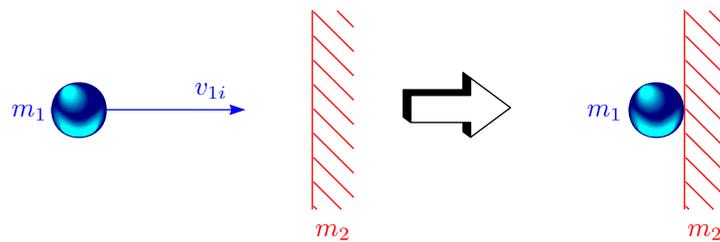
\*  $m_1 = m_2, v_{2i} = 0$



$\Rightarrow v_f = \frac{1}{2} v_{1i}$

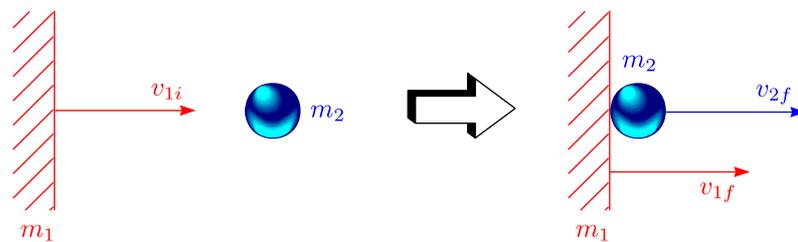
$E_{tot} = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_f^2 + Q = \frac{1}{4} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{4} m_1 v_{1i}^2$

\*  $m_2 = \infty, v_{2i} = 0$



$\Rightarrow v_f = v_{2i} = 0, E_{tot} = Q = \frac{1}{2} m v_{1i}^2$

\*  $m_1 = \infty, v_{2i} = 0$

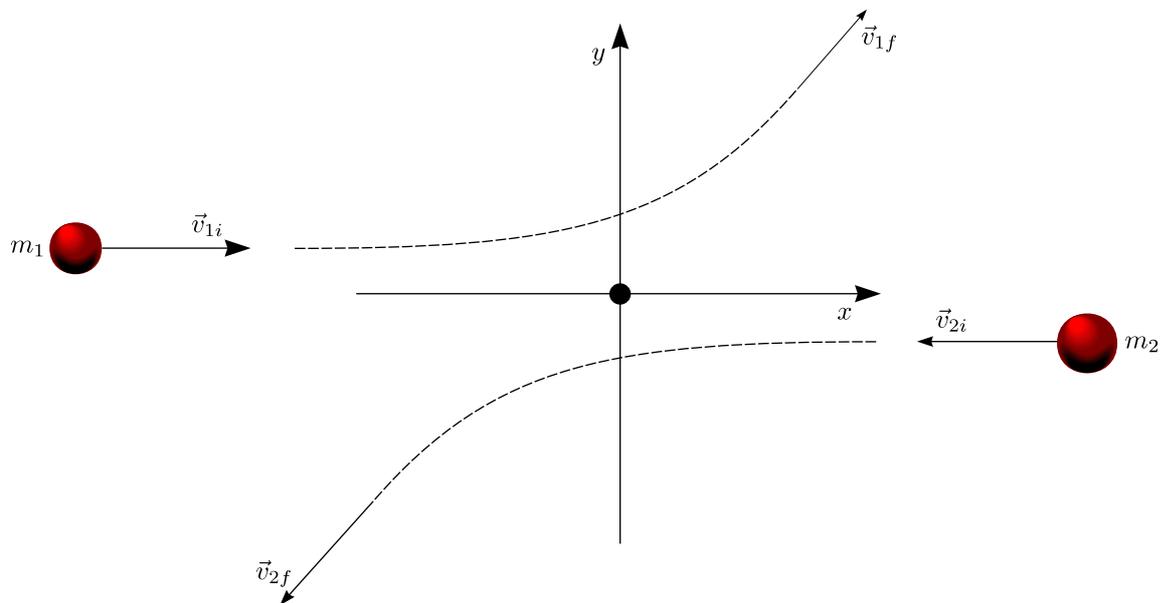


$\Rightarrow v_f = v_{1i}, E_{tot} = \infty, Q = \frac{1}{2} m_2 v_{1i}^2$

**Stöße in 2 bzw. 3 Dimensionen:**

Es gibt 2 gebräuchliche Systeme, um Stöße zu beschreiben:

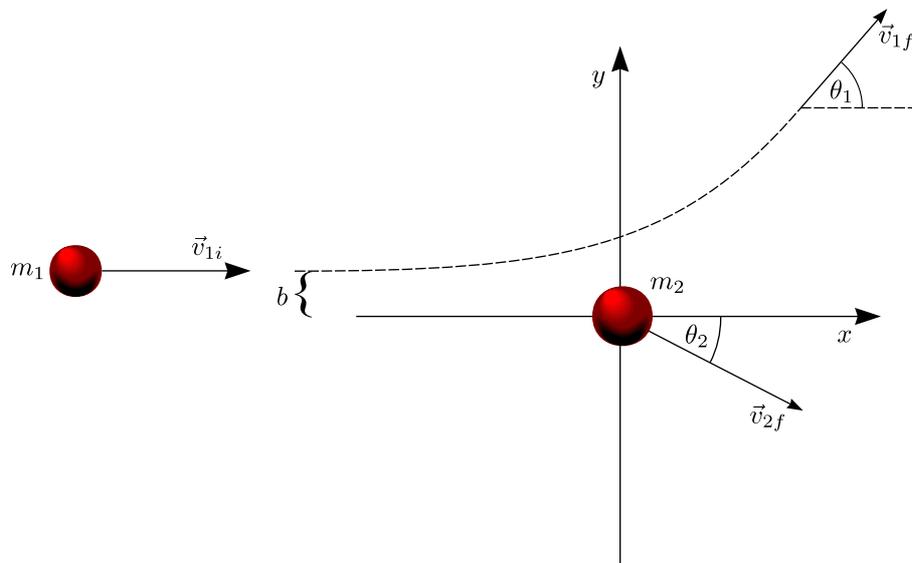
- ① Schwerpunktsystem (CM-System, center of mass)  
 Beobachter ruht im Massenschwerpunkt.



$$\vec{p}_{CM} = m_1 \vec{v}_{1i} = m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = \vec{0}$$

② Laborsystem

Der Beobachter ruht im  $m_2$



„b“ ist der sogenannte Impaktparameter.

$$\vec{p}_{CM} = m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

In Komponenten:

$$x\text{-Richtung: } m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

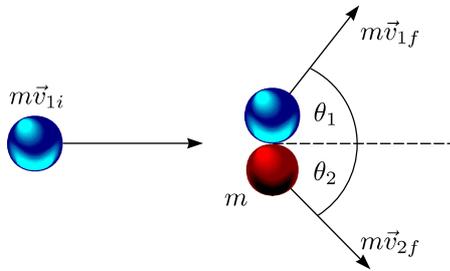
$$y\text{-Richtung: } 0 = -m_2 v_{2f} \sin \theta_2 + m_1 v_{1f} \sin \theta_1$$

$$E_{tot} = \frac{m_1}{2} v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + Q$$

Es ergeben sich 3 Gleichungen. Wenn die Anfangsbedingungen bekannt sind, bleiben 2 Unbekannte.

Spezialfall:

$$m_1 = m_2 = m, Q = 0$$



$$m\vec{v}_{1i} = m\vec{v}_{1f} + m\vec{v}_{2f}$$

$$\text{a.) } v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2\vec{v}_{1f}\vec{v}_{2f} = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 + 2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta_1 + \theta_2)$$

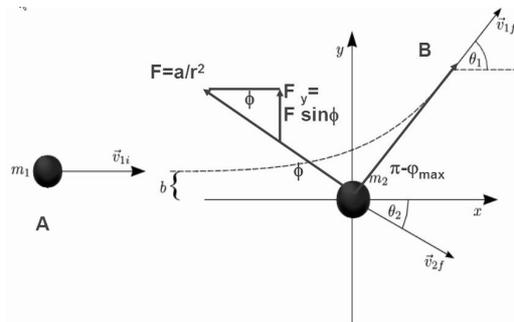
$$\text{b.) } \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}m(v_{1f}^2 + v_{2f}^2)$$

Wenn man diese beiden Bedingungen gleichsetzt, folgt:

$$2v_{1f}v_{2f}\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

### 3.2.1 Streuung eines Teilchens in einem Potential $V = a/r$



Dieser wichtiger Fall trifft z.B. zu auf die Streuung von geladenen Teilchen in einem Coulomb Feld oder von Kometen im Gravitationsfeld der Sonne. Wie wir aus der Bewegung der Planeten wissen, ist nicht der Impuls des Teilchens erhalten, sondern der Drehimpuls (bei einer Zentralkraft). Es ist zweckmäßig wieder Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  zu benutzen. Der Betrag des Drehimpulses ist dann:

$$L = |\vec{r} \times \mu\vec{v}| = \mu r^2 \frac{d\phi}{dt} = \mu v_0 b,$$

wobei  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  die reduzierte Masse ist und der letzte Term der Anfangsdrehimpuls mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ergibt, da der Term  $r \sin \phi$  aus dem Vektorprodukt genau dem Impaktparameter  $b$  entspricht.

Für die Ablenkung von  $m_1$  ist die  $y$ -Komponente der Kraft verantwortlich, wofür gilt:

$$F_y dt = dp = \mu dv_y.$$

Setzen wir für die Kraft  $F_y = F \sin \phi = a \sin \phi / r^2$  ein und eliminieren mit der obigen Drehimpulsgleichung  $dt/r^2$ , dann gilt:

$$dv_y = \frac{a \sin \phi}{\mu v_0 b} d\phi.$$

Die totale Ablenkung kann man bekommen durch diese Gleichung von A nach B zu integrieren. In A gilt:  $v_y = 0$ ,  $\phi = 0$  und in B gilt:  $v_y = v_0 \sin \theta$ ,  $\theta = \pi - \phi_{max}$ . Da bei einem elastischen Stoß der Betrag der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  erhalten bleibt, ergibt die Integration dieser Gleichung:

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{a}{\mu v_0 b} \int_0^{\pi - \theta} \sin \phi d\phi$$

$$v_0 \sin \theta = \frac{a}{\mu v_0 b} (1 + \cos \theta)$$

Wegen  $(1 + \cos \theta) / \sin \theta = \cot(\theta/2)$  gilt für den Zusammenhang zwischen Stoßparameter und Ablenkwinkel im Potential  $V = a/r$ :

$$\cot(\theta/2) = \frac{\mu v_0^2}{a} b.$$

Bei zentralen Stößen ist  $b=0$ , d.h.  $\cot(\theta/2) = \infty \rightarrow \theta = \pi$ . D.h. das Teilchen wird zurück gestreut. Der Umkehrpunkt  $r_0$  kann aus  $E_k = E_p$  oder  $\mu v_0^2/2 = a/r_0$  bestimmt werden:  $r_0 = 2a/(\mu v_0^2)$ . Aus den beobachteten Rückstoßen von Heliumkernen ( $\alpha$ -Teilchen) an einer Goldfolie folgerte Rutherford in 1911 dass ein Atom praktisch "leer" ist mit alle Masse konzentriert in schweren, punktförmigen Kernen.



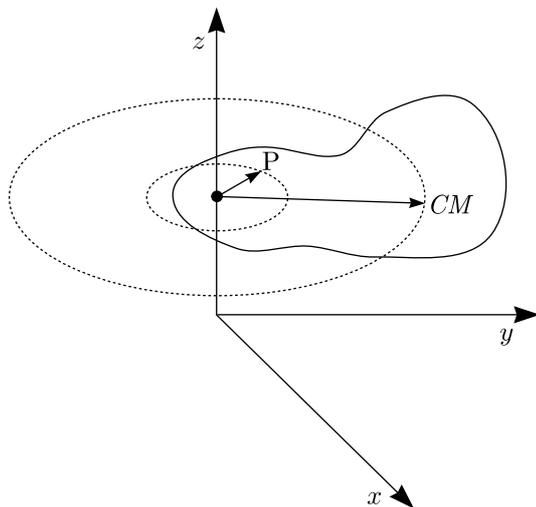
# Kapitel 4

## Rotationen für Systeme von Massenpunkten

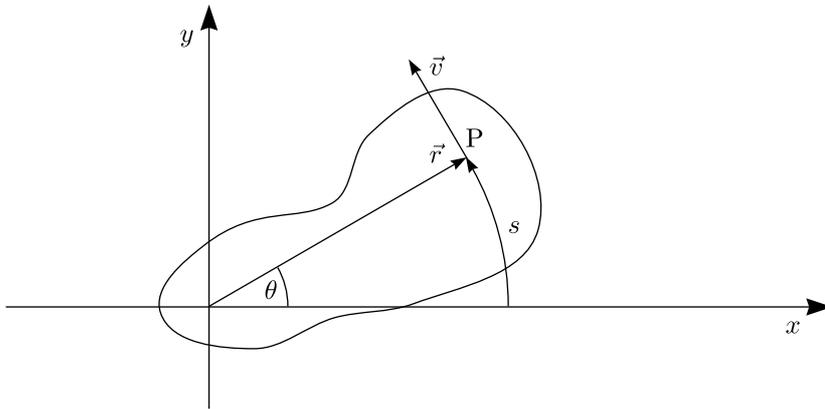
<u>Kinematik</u> Bewegungen in 3 Dimensionen (Translationen)	$\Leftrightarrow$	<u>Rotationskinematik</u> Drehbewegungen
<u>Dynamik</u> Bewegung unter Einfluß von Kräften	$\Leftrightarrow$	<u>Rotationsdynamik</u> Drehungen
von Massenpunkten, Systemen von Massenpunkten, festen Körpern		
Masse		Trägheitsmoment
Kraft		Drehmoment
Energie/Arbeit		Rotationsenergie/Rotationsarbeit
Impuls		Drehimpuls

kombinierte Dreh- und Translationsbewegung

### 4.1 Rotationskinematik



Jeder Punkt  $P$  dreht sich im Kreis mit gleichem Zentrum und gleicher Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .  
Von oben betrachtet :



$$\theta = 360^\circ \cdot \frac{s}{2\pi r} = \frac{s}{r} \quad \left( \text{in Radian } \left\{ 1 \text{ rad} \hat{=} 57,3^\circ \right\} \right)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{r} \quad (\text{Kreisfrequenz})$$

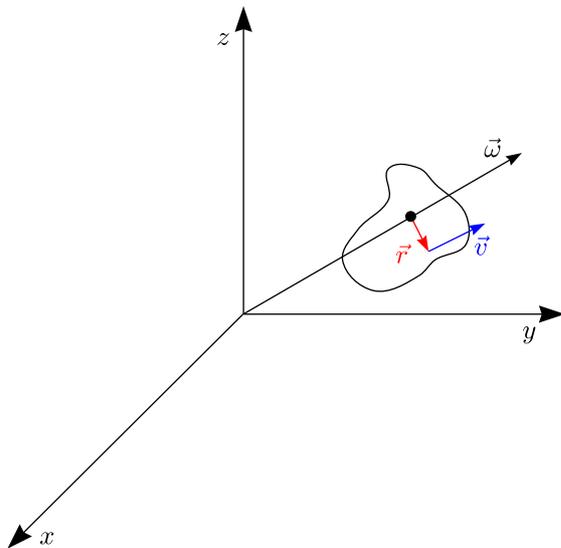
\* Konstante Drehbewegung:

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

\* Beschleunigte Bewegung:

$$\theta(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

Richtung der Drehachse:



$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \perp \vec{v}, \vec{r}$$

Für die Bewegungsgleichungen folgt:

$$\vec{r}(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = r \vec{u}_r(t) \quad |\vec{r}| = r = \text{const.}$$

$$\vec{v}(t) = r \cdot \omega(t) \cdot \vec{u}_\theta(t)$$

$$\vec{a}(t) = \underbrace{r \cdot \alpha \cdot \vec{u}_\theta(t)}_{a_T \text{ (Tangentialbeschleunigung)}} - \underbrace{r\omega^2(t) \vec{u}_r(t)}_{a_z \text{ (Zentripetalbeschleunigung)}}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r \cdot \left( \frac{\frac{d \cos \theta(t)}{dt}}{\frac{d \sin \theta(t)}{dt}} \right) = r \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega(t)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = r \cdot \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta(t) \\ \cos \theta(t) \end{pmatrix} + r \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{d \sin \theta(t)}{dt} \\ \frac{d \cos \theta(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

**Einschub: Vektorprodukt**

Das Vektorprodukt ist folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{u}_{\vec{a} \times \vec{b}}$$

Insbesondere gilt:

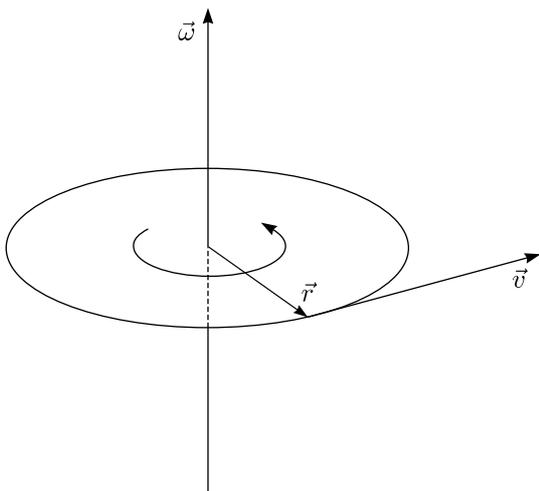
$$\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0$$

$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

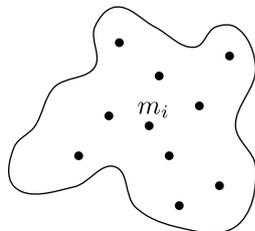
Kinematik:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\alpha} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

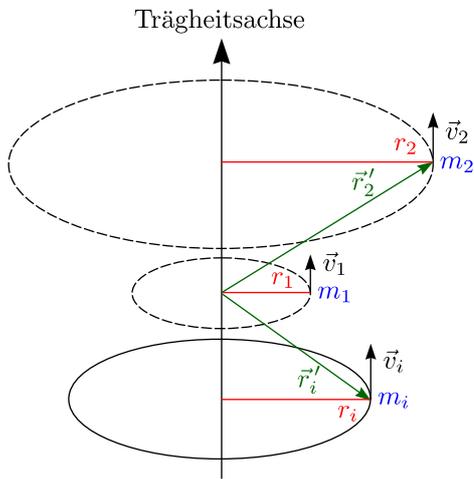
**4.2 Rotationsdynamik**

① Trägheitsmoment



$$M = \sum_i m_i$$

$$M = \int dm$$



Zu jedem Zeitpunkt gilt:

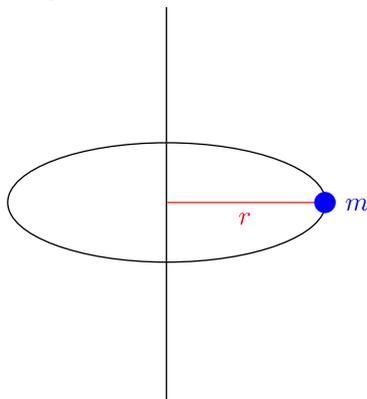
$$E_k = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \dots + \frac{1}{2}m_iv_i^2 + \dots = \frac{1}{2}(m_1r_1^2\omega^2 + m_2r_2^2\omega^2 + \dots + m_ir_i\omega^2 + \dots) =$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_i^N m_ir_i^2}_J \omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J = \sum_i^N m_ir_i^2; J = \int r^2 dm$$

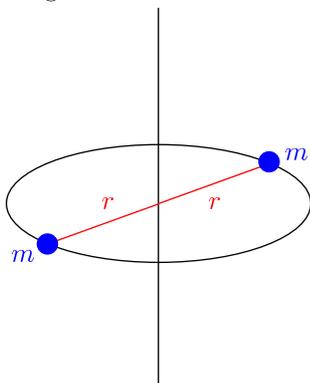
**Beispiele:**

a.) Trägheitsmoment eines kreisenden Massenpunktes



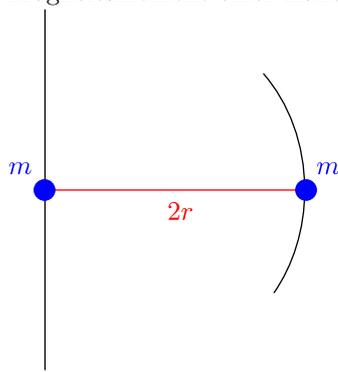
$$J = mr^2$$

b.) Trägheitsmoment einer Hantel



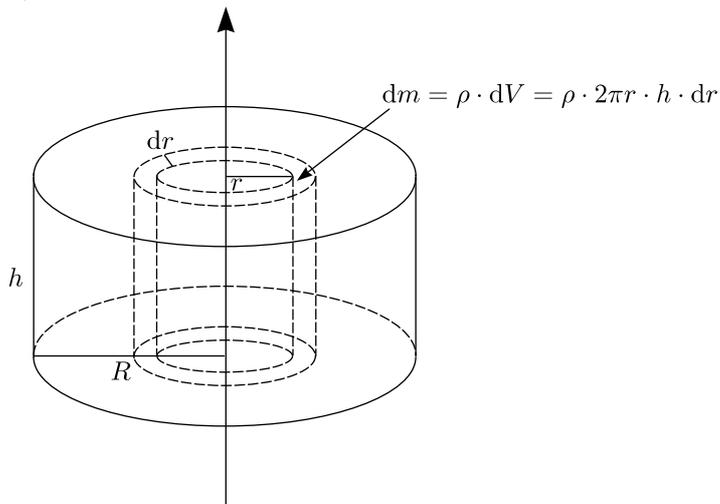
$$J = 2mr^2$$

c.) Trägheitsmoment einer Hantel (2)



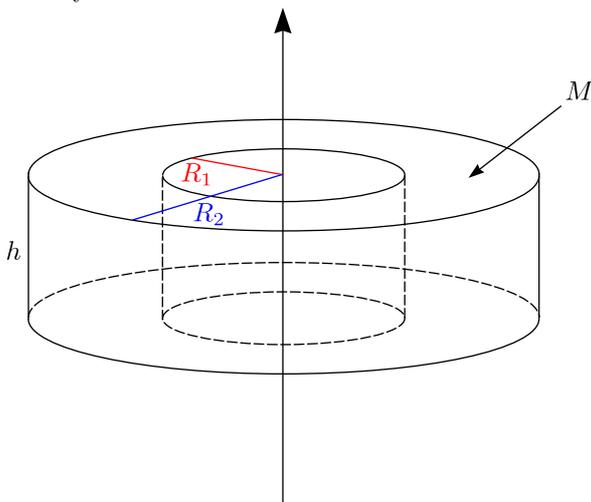
$$J = 4mr^2$$

d.) Zylinder



$$J = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \cdot \rho \cdot 2\pi r \cdot h \, dr = \int_0^R \rho \cdot h \cdot \pi \cdot 2r^3 \, dr = \underbrace{\pi \cdot h \cdot \rho \cdot R^2}_M \cdot \frac{R^2}{2} = M \cdot \frac{R^2}{2}$$

e.) Hohlzylinder

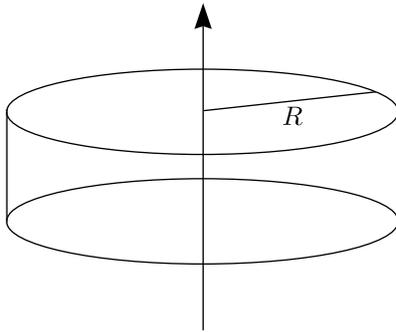


$$J = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho hr^3 \, dr = \frac{\pi\rho h}{2} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$M = \int \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} 2\pi\rho hr \, dr = \pi gh (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\Rightarrow J = \frac{1}{2}M (R_1^2 + r_2^2)$$

**Extremfall:**



$$R_2 \approx R_1 = R$$

$$J = MR^2$$

**Generell:**

$$J = \kappa \cdot M \cdot R^2$$

② Drehimpuls

Impuls:  $\vec{p} = m\vec{v}$       Drehimpuls:  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Impuls und Drehimpuls sind erhalten ohne Einwirkung äußerer Kräfte.

Demn :

a.) Person



Eine Person halte zwei Kugeln mit jeweils  $m = 2 \text{ kg}$  im Abstand  $r_a = 0,8 \text{ m}$  vom Körper weg und drehe sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 3 \frac{1}{\text{s}}$  um ihre eigene Achse. Wir betrachten die Person näherungsweise als Zylinder der Masse  $M = 50 \text{ kg}$  und Radius  $R = 0,14 \text{ m}$ . Die Kugeln werden aufgrund ihrer verhältnismäßig geringen Größe als Massepunkte behandelt. Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment des Systems bestehend aus Kugeln und Person:

$$J_a = \frac{1}{2}MR^2 + 2 \cdot mr_a^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \text{ kg} \cdot (0,14 \text{ m})^2 + 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot (0,8 \text{ m})^2 = 0,5 \text{ kgm}^2 + 2,56 \text{ kgm}^2 = 3,06 \text{ kgm}^2$$

Für den Drehimpuls folgt:

$$L_a = J_a \cdot \omega_a = 3,05 \text{ kgm}^2 \cdot 3 \frac{1}{\text{s}} \approx 9,15 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T}$$

Wir erhalten wir die Periodendauer  $T$ :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} \approx 2,10 \text{ s}$$

Nun werde der Abstand der Kugeln auf  $r_b = 0,2 \text{ m}$  verkleinert, indem die Person die Arme an den Körper heranzieht. Damit ergibt sich:

$$J_b = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr_b^2 = 0,5 \text{ kgm}^2 + 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot (0,2 \text{ m})^2 = 0,66 \text{ kgm}^2$$

$$L_b = J_b \cdot \omega_b = 0,66 \text{ kgm}^2 \cdot \omega_b$$

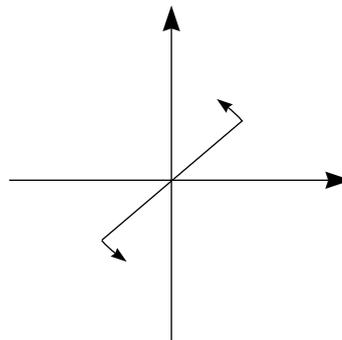
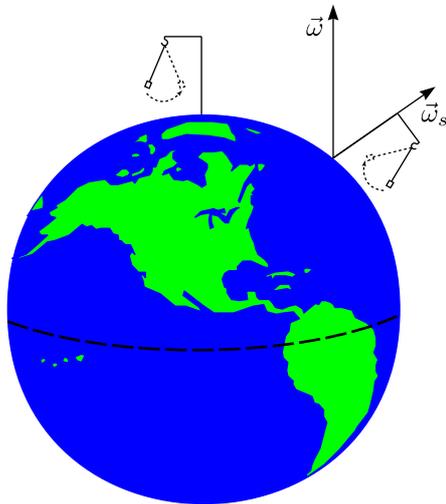
Aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses  $L$  gilt:

$$\omega_b = \omega_a \cdot \frac{J_a}{J_b} = \frac{3,06 \text{ s}}{0,66 \text{ s}} \cdot \omega_a = 4,64 \cdot \omega_a$$

$$T \approx \frac{2,10}{4,64} \text{ s} = 0,45 \text{ s}$$

Die Person dreht sich also schneller als vorher.

b.) Das Foucault-Pendel



$$\omega_s = \omega \cdot \sin \theta$$

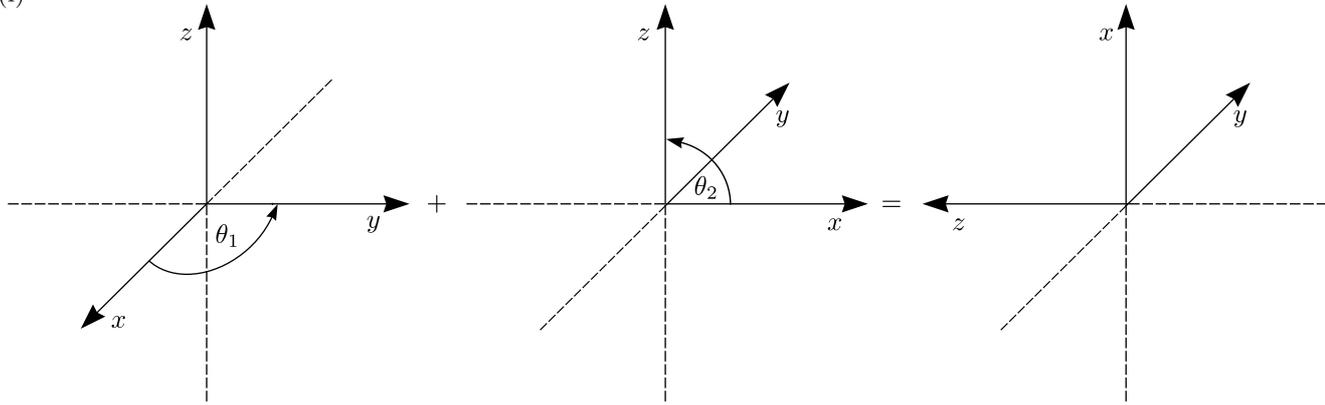
In Karlsruhe:  $\approx 28 \text{ h}$

### Zu Rotationskinematik:

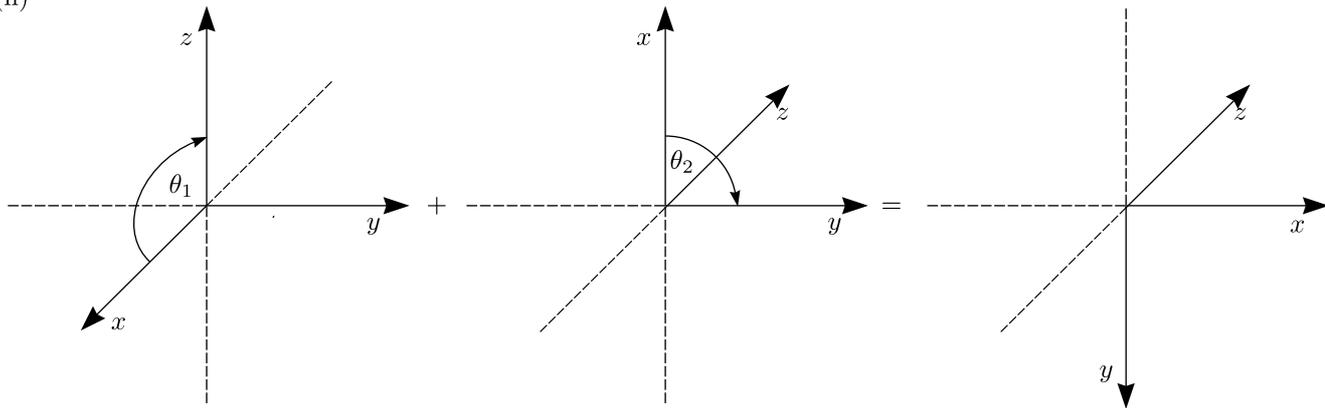
$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$  ist Vektor.

$\vec{\theta}$  nicht, da nicht immer  $\vec{\theta}_1 + \vec{\theta}_2 = \vec{\theta}_2 + \vec{\theta}_1$

(i)

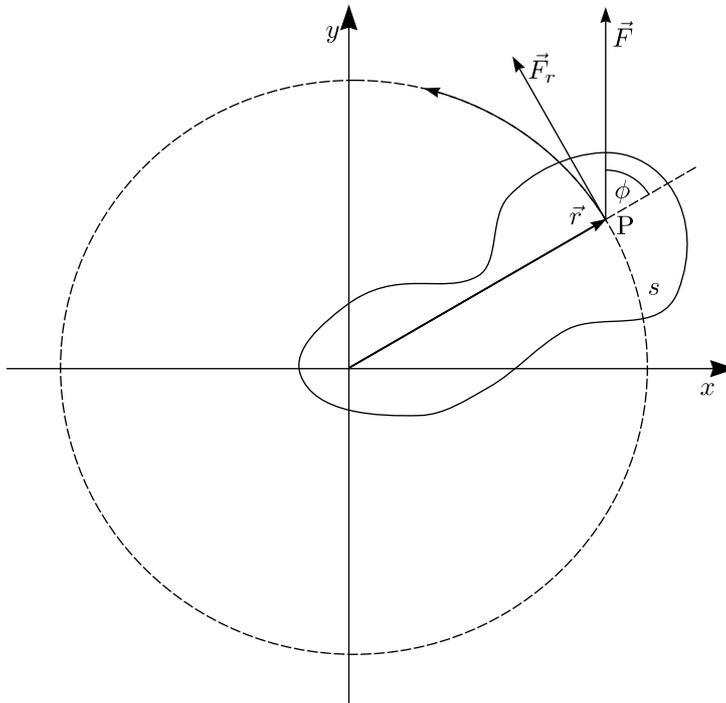


(ii)



③ Drehmoment

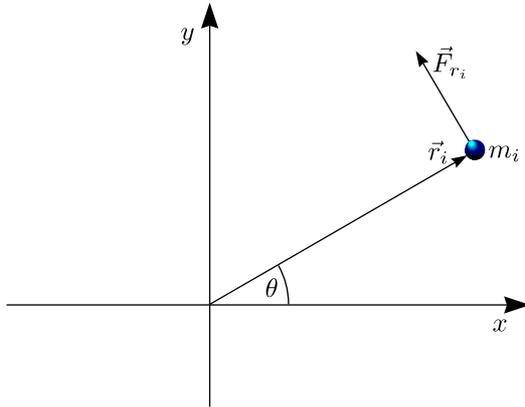
Kraft:  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Leftrightarrow$  Drehmoment:  $\vec{M} \equiv \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\alpha}$



$$F_T = |\vec{F}| \cdot \sin \phi$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \sin \phi = r \cdot F_T$$

$$M = 0, \text{ wenn } \phi = 0$$



$$\vec{F}_{T_i} = m_i \cdot \vec{a}_{T_i}$$

$$F_{T_i} = m_i \cdot \alpha \cdot r_i$$

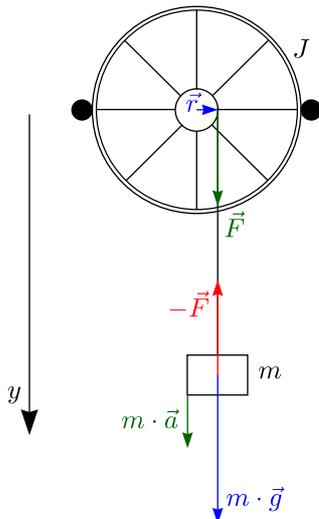
$$\alpha \hat{=} \text{Winkelbeschleunigung: } \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$M_i = r_i \cdot F_{T_i} = m_i r_i^2 \alpha$$

$$\vec{M} = \sum_i m_i r_i^2 \vec{\alpha} = J \cdot \alpha$$

### Demonstration:

a.) Beschleunigung der Drehung eines Rades



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha}$$

$$m\vec{g} - \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Daraus folgt durch die Zerlegung in Komponenten:

$$M = r \cdot F = J \cdot \alpha$$

$$mg - F = m \cdot a$$

Auch gilt  $\alpha = \frac{a}{r}$  und somit haben wir:

$$mg - \frac{J}{r^2} a = m \cdot a$$

$$(i) a = \frac{g}{1 + \frac{J}{mr^2}}$$

Check mit Extremfällen:

$$m \mapsto \infty : a = g$$

$$m \mapsto 0 : a = 0$$

$$J \mapsto \infty : a = 0$$

$$J \mapsto 0 : a = g$$

$$(ii) \alpha = \frac{\frac{g}{r}}{1 + \frac{J}{mr^2}}$$

$$\text{Für } J \gg mr^2 : \alpha \approx \frac{mgr}{J}$$

$$\text{Mit } \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\theta(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 \approx \frac{mgr}{2J}t^2$$

Demonstration:

\* 4 Umdrehungen:

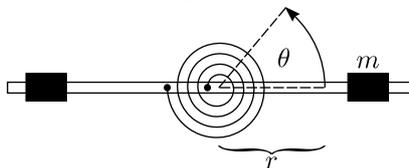
$$t_4 = 11,5 \text{ s für Masse } m$$

\* 8 Umdrehungen:

$$t_8 = 11,0 \text{ s für Masse } 2m$$

$$\left. \begin{array}{l} 4 \cdot 2\pi = m \cdot \frac{gr}{2J} t_4^2 \\ 8 \cdot 2\pi = 2m \cdot \frac{gr}{2J} t_8^2 \end{array} \right\} \Rightarrow t_4 = t_8$$

b.) Drehschwingungen



Es gilt das Hookesche Gesetz:

$$M = -D \cdot \theta = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -D \cdot \theta$$

Wir verwenden folgenden Ansatz

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$-J \cdot \theta_0 \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \phi) = -D \cdot \theta_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \text{ mit } J \approx 2mr^2$$

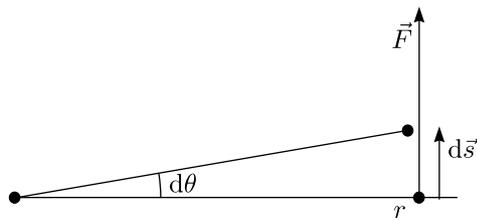
$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} \approx \frac{r_1}{r_2}$$

④ Arbeit, Energie

Lineare Arbeit:       $\Leftrightarrow$       Rotationsarbeit:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$E_p, E_k$



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot r \cdot d\theta$$

$$A = \int F \cdot r \cdot d\theta = \int \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

Für resultierende Drehmomente:

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} \neq 0$$

$$\int \vec{M} \cdot d\vec{\theta} = \int J \cdot \alpha \cdot d\vec{\theta} = \int J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot d\vec{\theta} = \int J \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega}$$

$$A = \int J \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{\omega} = \frac{1}{2} J \omega_2^2 - \frac{1}{2} J \omega_1^2 = \Delta E_{rot}$$

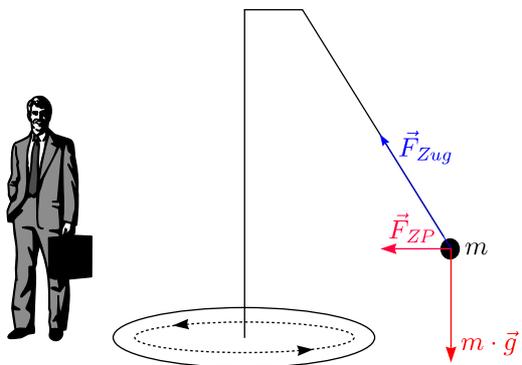
Allgemein gilt:

$$E_{rot} = E_p + E_k + E_N + E_{int} = \text{const.}$$

4.2.1 Rotierende Bezugssysteme

① Zentripetalkraft

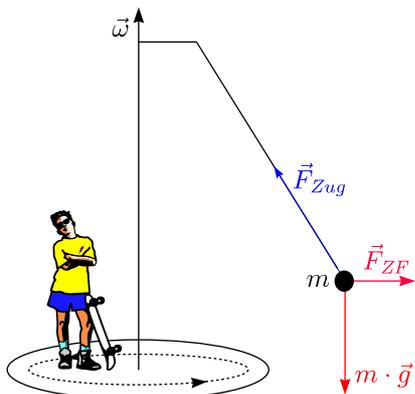
$$\vec{F}_{ZP} = \vec{F}_{Zug} + m\vec{g} = m \cdot \vec{a}_{ZP} (\vec{F}_{ZP} \hat{=} \text{Zentripetalkraft})$$



② Zentrifugalkraft

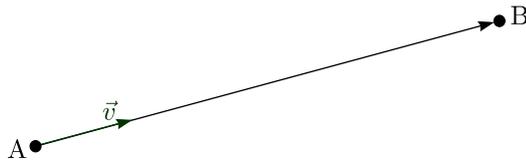
$$\vec{F}_{ZF} + \vec{F}_{Zug} + m\vec{g} = \vec{o}$$

$$\vec{F}_{ZF} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$



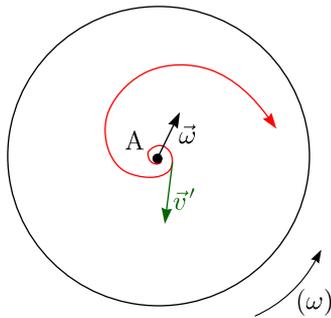
③ Corioliskraft

i.) Außen:



$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

ii.) Innen:



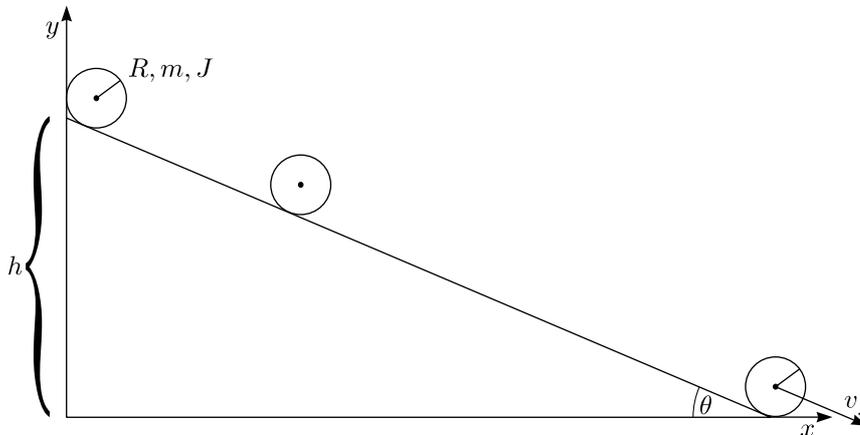
$$\vec{F}_C = 2m (\vec{v}' \times \vec{\omega})$$

Gegenüberstellung: Lineare Bewegung – Rotationsbewegung

Translationen	Drehbewegungen
$s$	$\varphi$
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{\alpha}$
$\vec{F}$	$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$
$\vec{p}$	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha}$
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$

### 4.3 Rollbewegungen

① Rollbewegung: Kombination aus Translation und Drehung



a.) Über Energieerhaltung

$$E_{tot} = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}mv^2 + m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Wie hängen  $v$  und  $\omega$  zusammen? Mit  $\omega = \frac{v}{R}$  erhält man die Geschwindigkeit am niedrigsten Punkt:

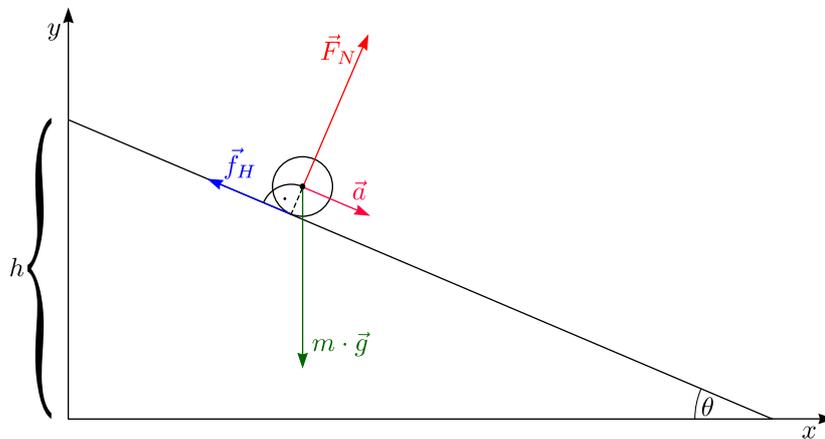
$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv_f^2 + \frac{1}{2}J\omega_f^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right)v_f^2$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{J}{mR^2}}}$$

Für runde Objekte gilt  $J = \kappa \cdot mR^2$ .  $\kappa$  lautet für folgende spezielle geometrische Objekte:

Objekt	$\kappa$
Kugel	$\frac{2}{5}$
massiver Zylinder	$\frac{1}{2}$
Ring	1
Massenpunkt	0

b.) Auf andere Weise



- \*  $\vec{f}_H$ : Haftreibung greift an Peripherie an.
- \*  $\vec{F}_N$ : Normalkraft
- \*  $m \cdot \vec{g}$ : Gewichtskraft

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_N + \vec{f}_H + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{f}_H = J \cdot \vec{\alpha}$$

In Komponenten:

\*  $x$ -Richtung:

$$-f_H + mg \sin \theta = m \cdot a$$

\*  $y$ -Richtung:

$$F_N - mg \cos \theta = 0$$

\*  $z$ -Richtung:

$$(-f_H) \cdot (-R) = J \cdot \alpha$$

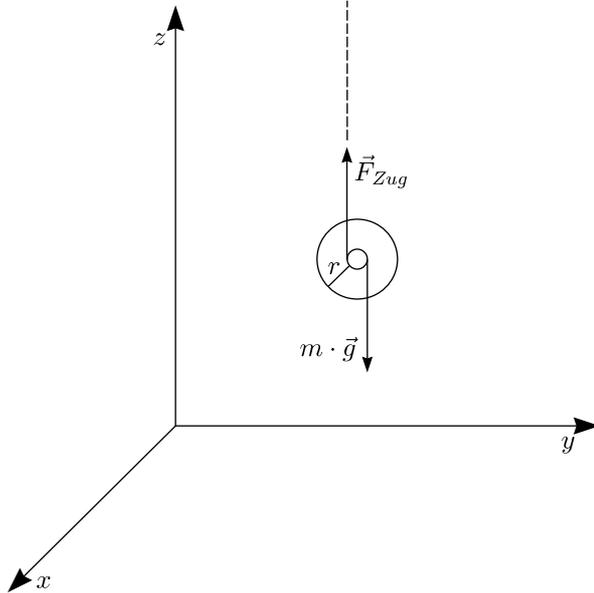
Konsistente Bewegung:  $\alpha = \frac{a}{R}$

$$\left. \begin{aligned} f_H &= mg \sin \theta - ma \\ f_H &= \frac{J \cdot \alpha}{R} = \frac{J \cdot a}{R^2} \end{aligned} \right\} g \sin \theta = a \cdot \left( 1 + \frac{J}{mR^2} \right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{g \cdot \sin \theta}{1 + \kappa}$$

$$x = \frac{a}{2} t^2 + v_0 t + x_0$$

② Jojo („Maxwellsches Rad“)



\* Energieerhaltung beim Jojo

$$E_{tot} = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} J \omega_f^2$$

Mit  $\omega = \frac{v}{R}$  erhält man:

$$v_f = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \kappa}}$$

\* Drehmomente beim Jojo

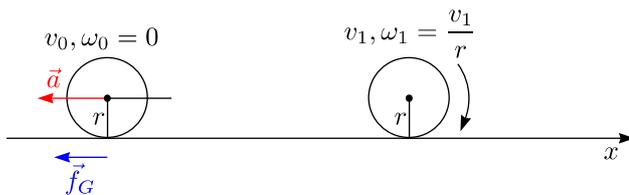
$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_{Zug} = J \cdot \vec{\alpha}$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_{Zug} = m\vec{a}$$

In Komponenten zerlegen:

$$\Rightarrow a = \frac{g}{1 + \kappa \cdot \frac{r^2}{R^2}} \quad (r \hat{=} \text{äußerer Radius, } R \hat{=} \text{innerer Radius})$$

③ Bowling



a.)  $E_{tot}$  ist nicht erhalten wegen Reibung.

$$b.) \vec{f}_g = m \cdot \vec{a}; m \cdot \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} = ma$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g$$

$$\Rightarrow r \cdot f_g = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{\omega_1 - \omega_0}{\Delta t} = J \cdot \frac{v_1}{r \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow M = m \cdot \frac{v_1 - v_0}{\Delta t} \cdot r = J \cdot \frac{v_1}{r \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{v_0}{1 + \underbrace{\frac{mr^2}{J}}_{\kappa}}; \text{Kugel: } \kappa = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 \cdot \frac{5}{7}$$

Unabhängigkeit von Reibungskraft!

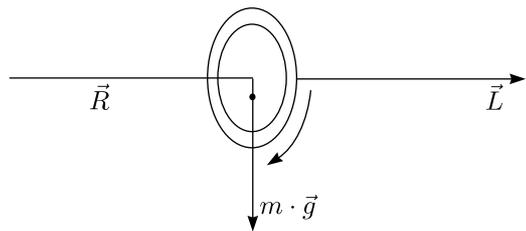
### Erhaltung des Drehimpulses:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt} \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d}{dt} \vec{p} = \underbrace{\vec{v} \times m \cdot \vec{v}}_0 + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \text{ für } \vec{M} = \vec{0}: \vec{L} \text{ erhalten!}$$

### Kreisel mit Drehmoment:



$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}_g = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

Was ist  $J$ ?  $\vec{\omega}$  ist nicht notwendig parallel zu  $\vec{L}$ !

### Beispiel: Nutation eines kräftefreien Kreisels

$J$  ist eine Matrix ( $3 \times 3$ ).

$$J \Rightarrow \mathcal{J}$$

### Zusammenfassung:

\* Keine äußeren Drehmomente

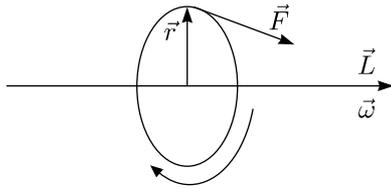
$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \text{const.}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$



\* Mit äußerem Drehmoment

a.)

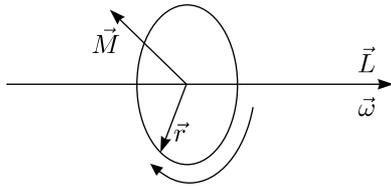


$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Es gilt:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \parallel \vec{L}$$

b.)



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J \cdot \vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

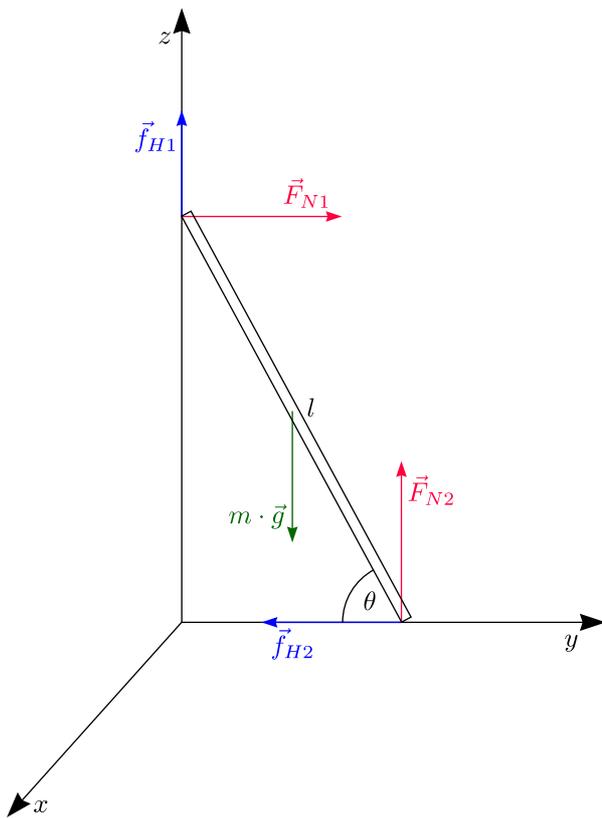
$$\frac{d\vec{L}}{dt} \perp \vec{L}$$

Die sogenannte Präzessionsfrequenz errechnet sich nach:

$$\omega_P = \frac{\left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right|}{|\vec{L}|} = \frac{M}{L} = \frac{F \cdot L}{J \cdot \omega}$$

## 4.4 Mechanische Stabilität

Ein starrer Körper ist im Gleichgewicht, wenn  $\vec{a}_{CM}$  und  $\vec{\alpha} = \vec{o}$ . Dies gilt bezüglich jeder denkbaren Achse.

Beispiel: Leiter

Bis zu welchem Winkel  $\theta_{min}$  ist die Leiter stabil?

Wir betrachten hierzu die Kräfte:

$$m\vec{g} + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{f}_{H1} + \vec{f}_{H2} = 0$$

Wir zerlegen in Komponenten:

\*  $x$ -Richtung:

$$-f_{H2} + F_{N1} = 0$$

\*  $y$ -Richtung:

$$F_{N2} - mg + f_{H1} = 0$$

Drehmomente um einen beliebigen Punkt sollten null sein.

Betrachte Berührungspunkt Leiter-Boden:

$$\vec{l} \times \vec{f}_{H1} + l \times \vec{F}_{N1} + \frac{l}{2} \times m\vec{g} = 0$$

Oder in Komponenten:

$$-l \cos \theta \cdot f_{H1} - l \sin \theta \cdot F_{N1} + \frac{l}{2} \cdot \cos \theta mg = 0$$

Weiter gilt:

$$f_{H1} = F_{N1} \cdot \mu_H$$

$$f_{H2} = F_{N2} \cdot \mu_H$$

Einsetzen ergibt, dass die Leiter stabil steht bis zum Winkel  $\theta_{min}$ :

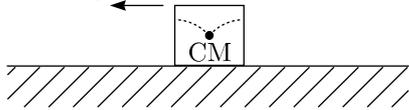
$$\Rightarrow \tan \theta_{min} = \frac{1 - \mu_H^2}{2\mu_H}$$

**Beispiel: Holz auf Holz**

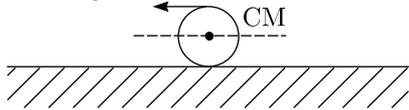
$$\mu_H = 0,24 \Rightarrow \theta_{min} = 64^\circ$$

**Definition:**

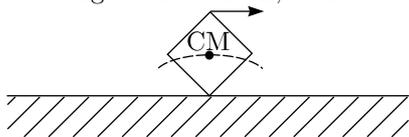
Das Gleichgewicht ist stabil, wenn bei infinitesimal kleiner Drehung der Schwerpunkt angehoben wird.



Das Gleichgewicht ist neutral, wenn bei kleiner Drehung des Objektes der Schwerpunkt auf gleicher Höhe bleibt.



Das Gleichgewicht ist labil, wenn der Schwerpunkt bei kleiner Drehung absinkt (metastabil).



# Kapitel 5

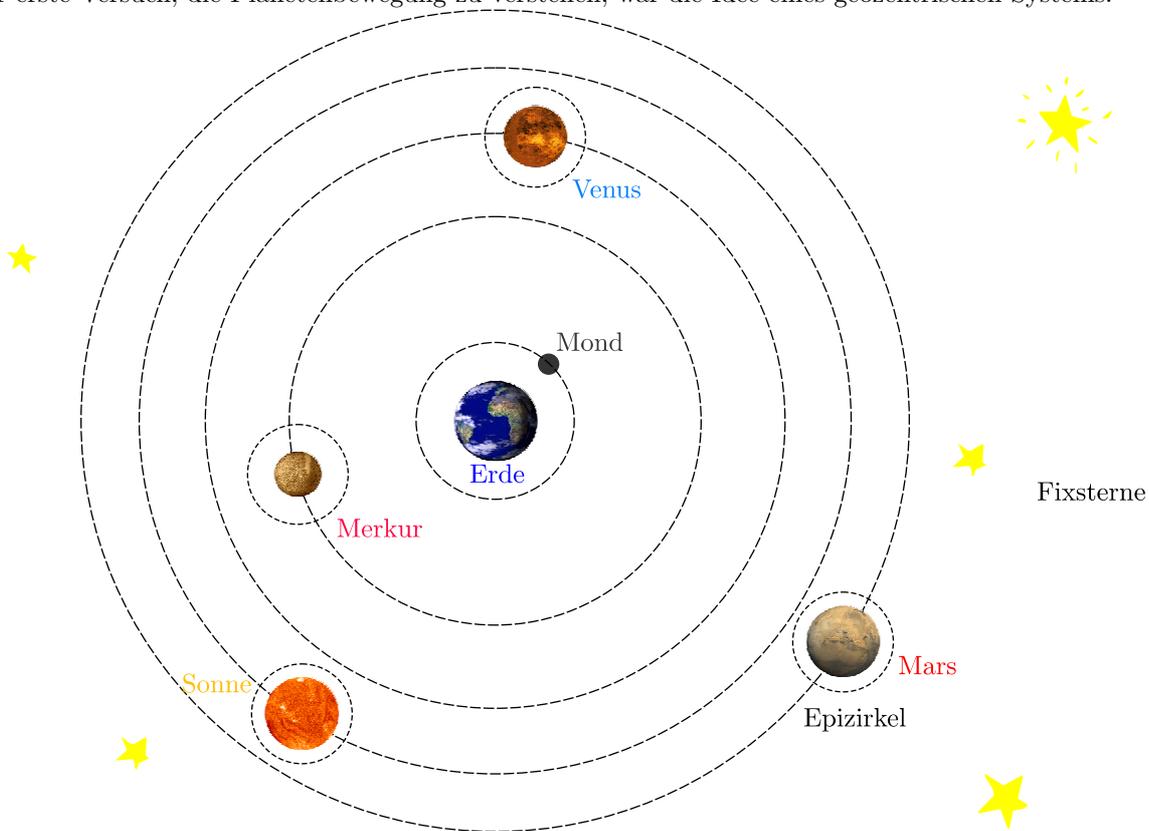
## Gravitation

### 5.1 Das Gravitationsgesetz

#### 5.1.1 Der historische Weg zum Gravitationsgesetz

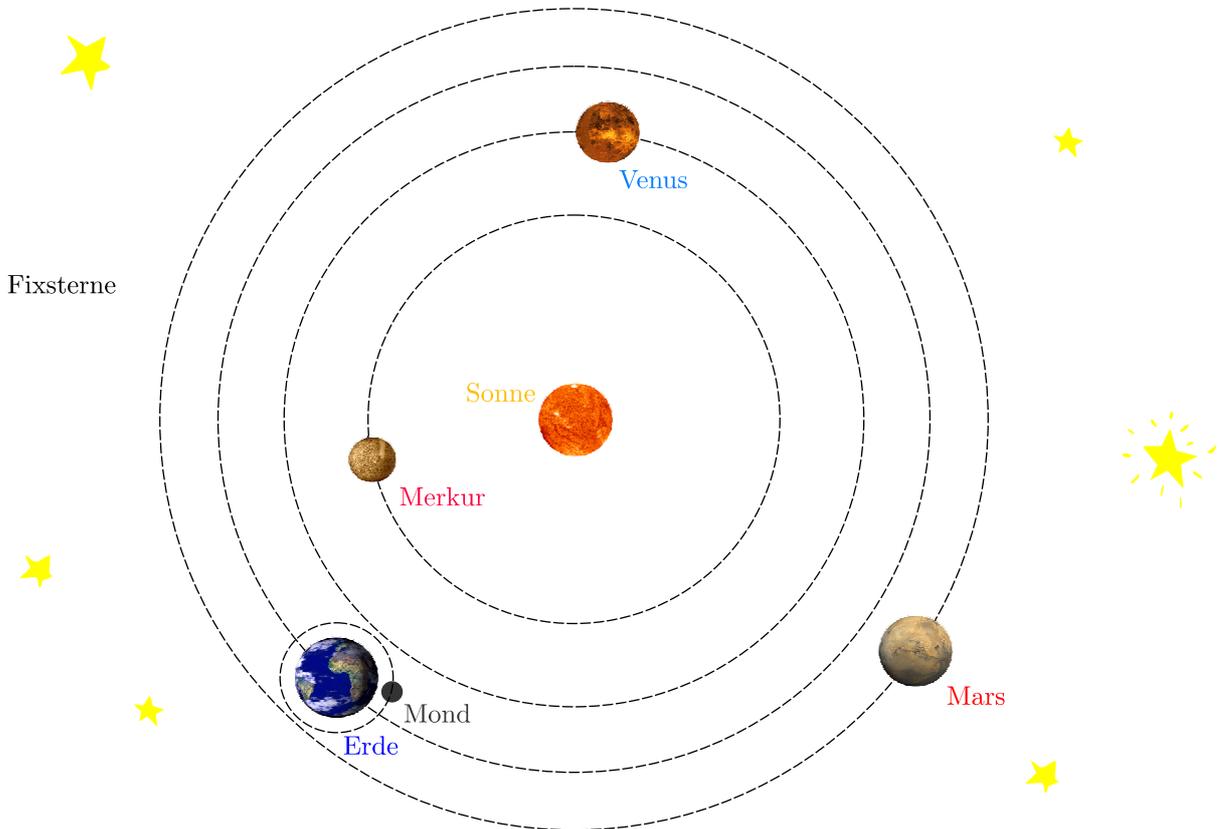
##### ≈ 0 A.D.: Ptolemäus

Der erste Versuch, die Planetenbewegung zu verstehen, war die Idee eines geozentrischen Systems.



##### 1473-1543: Copernikus

Copernikus war für die Entwicklung der Theorie des heliozentrischen Systems verantwortlich.

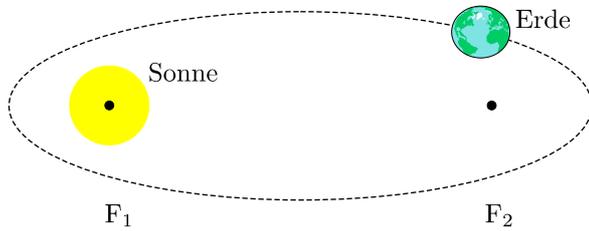


**1571-1630: Kepler (Assistent von Brahe, mit Teleskop)**

Kepler stellte empirische Gesetze zur Planetenbewegung auf.

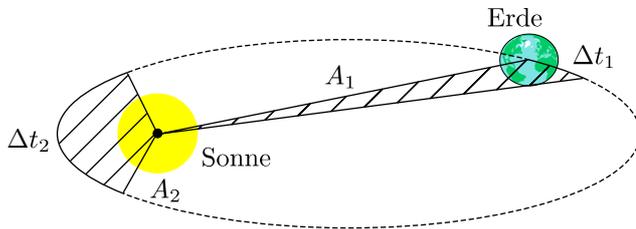
① Gesetz der Laufbahn (Orbit):

Planetenbahnen sind Ellipsen mit der Sonne in einem der beiden Brennpunkte (Focusse).



② Flächengesetz:

Linie zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleicher Zeit gleiche Fläche.



$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

③ Periodengesetz:

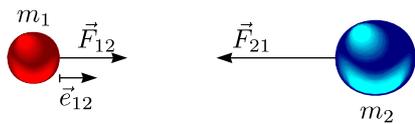
$$T^2 \sim \langle R \rangle^3$$

$T \hat{=}$  Umlaufperiode,  $\langle R \rangle \hat{=}$  mittlerer Radius

**1642-1727: Newton**

Benutzte Keplers Gesetze und formulierte das Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}$$



$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}}{\text{kg}^2} \text{ (Gravitationskonstante)}$$

**Diskussion:**

Warum taucht in der Formel der Ausdruck  $\frac{m_1 m_2}{r^2}$  auf und nicht beispielsweise  $\frac{m_1^2 m_2^3}{r^3}$ ?

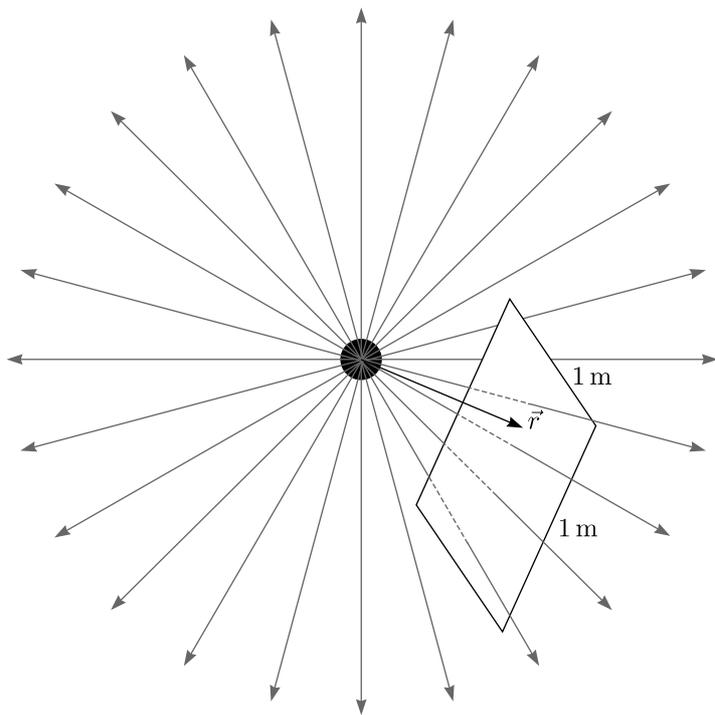
a.)  $F_{\Delta m, \Delta m}$  sei Kraft zwischen Massenelement  $\Delta m$  und  $\Delta m$

$$\text{Dann gilt: } F_{N \cdot \Delta m, \Delta m} = N \cdot F_{\Delta m, \Delta m} \text{ und } F_{N \cdot \Delta m, M \cdot \Delta m} = N \cdot M \cdot F_{\Delta m, \Delta m} \hat{=} F_{m_1, m_2} \propto m_1 \cdot m_2$$

$\Rightarrow$  Superpositionsprinzip

b.)  $F \propto \frac{1}{r^2}$

Angenommen, die Kraft entsteht durch Austausch von Kraftteilchen (Bosonen):



$$\frac{N_g}{s} \hat{=} \text{Zahl aller Bosonen}$$

Somit entsteht der folgende Fluß durch  $1 \text{ m}^2$  Fläche:

$$\frac{N_g}{s \cdot \text{m}^2} = \frac{N_g}{4\pi r^2} \propto \text{Kraft} \propto \frac{1}{r^2}$$

Gravitation, elektromagnetische Wechselwirkung sind Kräfte mit unendlicher Reichweite ohne Erzeugung oder Verlust.

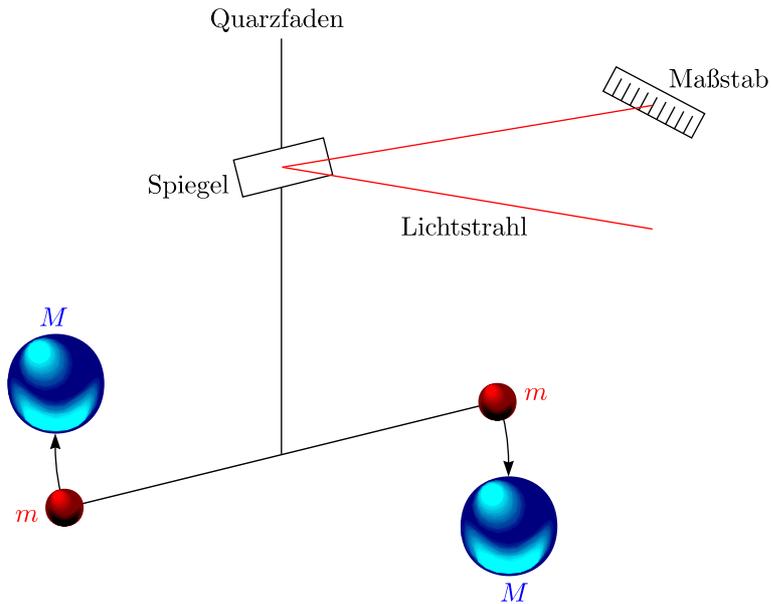
c.) Gravitation ist konstant.

$$G = \text{const.} \left( \frac{dG}{dt} = 0 \right)$$

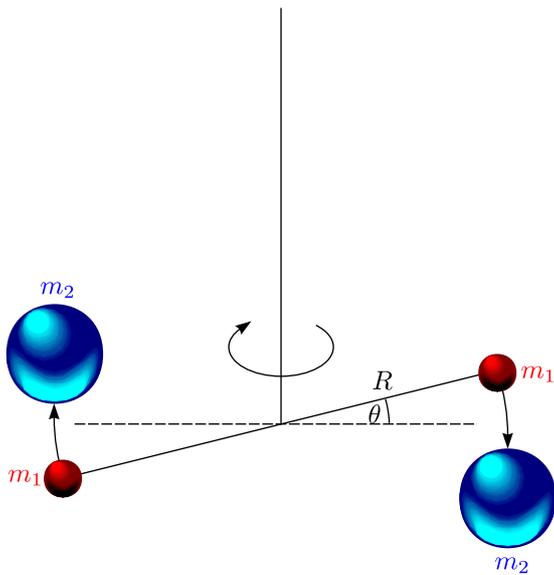
### 5.1.2 Das Newtonsche Gravitationsgesetz

#### Experimentelle Bestimmung von $G$

Nach Cavendish (1798):

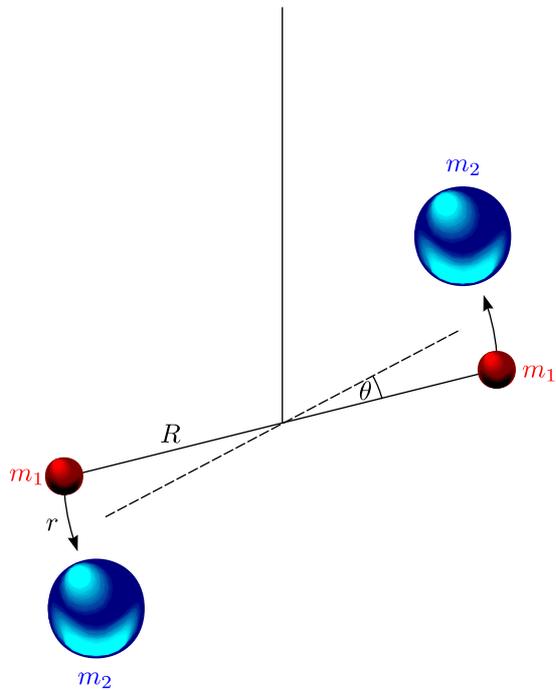


a.) Gleichgewicht: Drehmoment der Gravitationskraft = Drehmoment durch Torsion (Verdrillung) des Fadens



$$2 \cdot R \cdot F_{m_1 m_2} - D_\theta = 0$$

b.) Nach Umlagern von  $m_2$

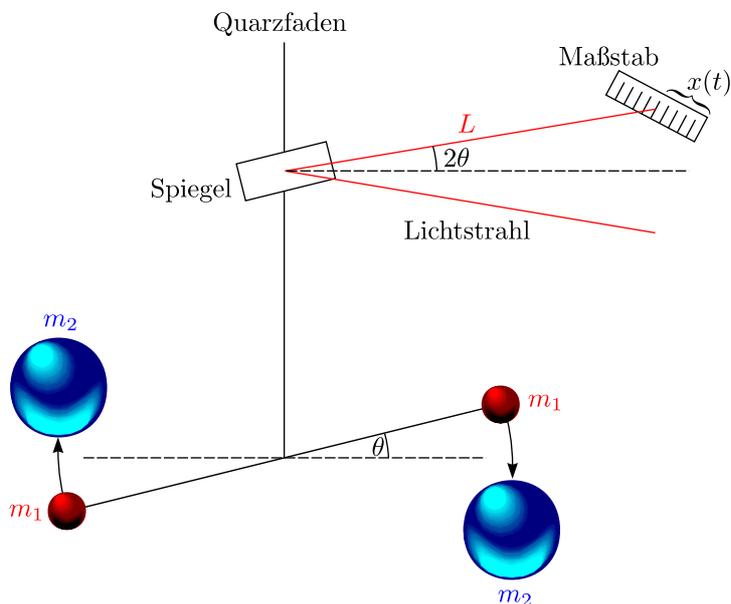


$$2 \cdot R \cdot F_{m_1 m_2} + D_\theta = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 2R^2 m_1 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$$2 \cdot R \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot G \cdot 2 = 2m_1 R^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Damit ergibt sich die Gravitationskonstante:

$$G = \frac{1}{2} \frac{r^2 \cdot R}{m_2} \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$



$$\theta(t) = \frac{x(t)}{2L} = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{x(100\text{ s})}{L \cdot (100\text{ s})^2}$$

Mit  $r = 4\text{ cm}$ ,  $R = 5\text{ cm}$ ,  $m_1 = 0,015\text{ kg}$  und  $m_2 = 1,5\text{ kg}$  erhalten wir:

$$G = \frac{1}{2} \frac{(0,04\text{ m})^2 \cdot 0,05\text{ m}}{1,5\text{ kg}} \cdot \frac{0,3\text{ m}}{14\text{ m} \cdot 10^4\text{ s}^2} = \frac{2 \cdot 10^{-10}\text{ m}^2 \cdot 0,3\text{ m}}{\text{kg s}^2} = \boxed{6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}$$

## 5.2 Das Gravitationspotential

$$A = \Delta E_p = \int_{R_E}^{R_E+h} \vec{F} d\vec{r} = \int_{R_E}^{R_E+h} \frac{Gm_E m}{r^2} dr = Gm_E m \left( \frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_E+h} \right) = \frac{Gm_E m}{R_E} \cdot \frac{h}{R_E+h} \approx \underbrace{\frac{Gm_E}{R_E^2}}_g h \quad (h \ll R_E)$$

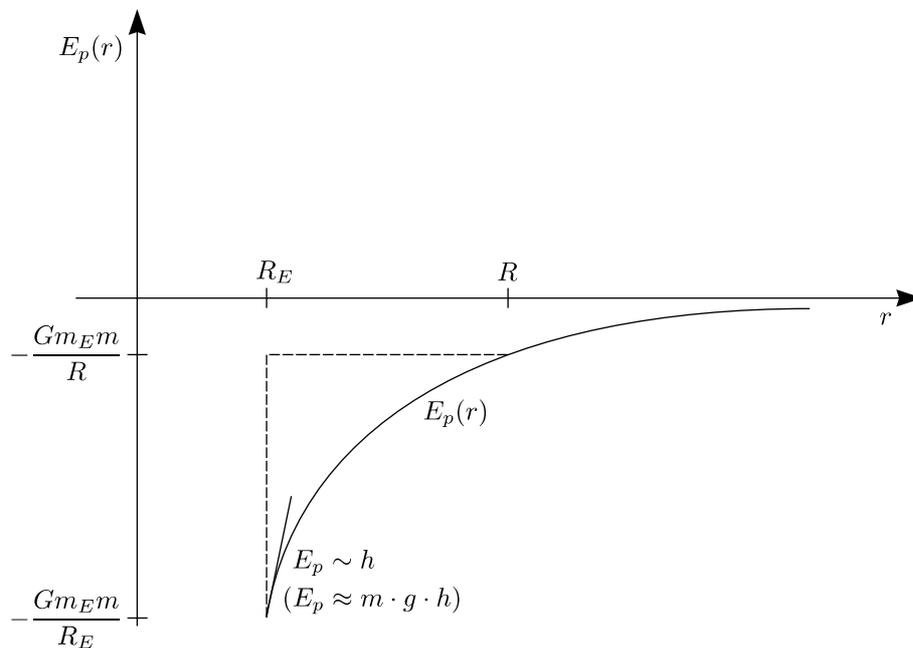
$$A_\infty = \int_{R_E}^{\infty} \vec{F} d\vec{r} = \frac{Gm_E m}{R_E} = E_p(\infty) - E_p(R_E)$$

Es ist Konvention, das Nullniveau ins Unendliche zu legen:

$$E_p(\infty) = 0$$

Damit gilt für das Gravitationspotential für  $r \geq R_E$ :

$$E_p(r) = -\frac{Gm_E m}{r}$$



### Anwendung:

a.) Fluchtgeschwindigkeit von Erde

$$E_{tot} = E_k + E_p = 0 = E_p(r = \infty) = \frac{1}{2}mv_{esc}^2 - \frac{Gm_E m}{R_E} = 0$$

Damit folgt für die Fluchtgeschwindigkeit:

$$v_{esc} = \sqrt{2 \frac{Gm_E}{R_E}} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

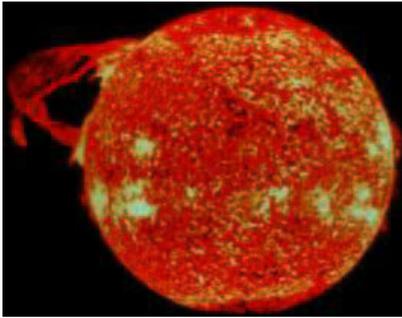
b.) Gibt es Objekte, wo  $v_{esc} \geq c$ ?

Ja, man nennt diese „Schwarze Löcher“. Mit  $v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_S}} = c$  erhält man den Schwarzschild-Radius:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

Der Schwarzschild-Radius ist der Grenzradius, den ein Objekt erreichen muss, damit an seiner Oberfläche die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist. Er stellt somit die Grenze zum Schwarzen Loch dar.

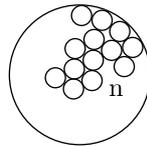
\* Beispiel: Sonne



Für die Sonne gilt  $R = 7 \cdot 10^5$  km und  $M = 2 \cdot 10^{30}$  kg.  
Damit folgt für den Schwarzschild-Radius:

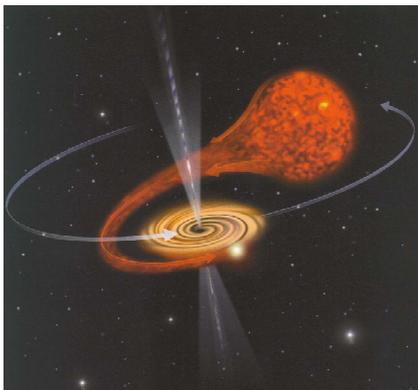
$$R_S = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \approx 3 \text{ km}$$

\* Neutronensterne



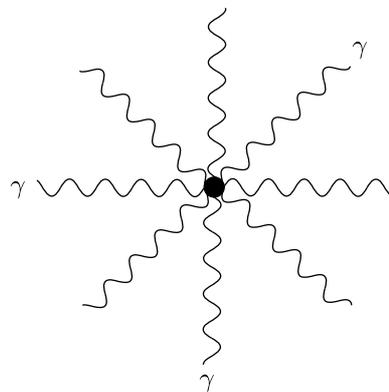
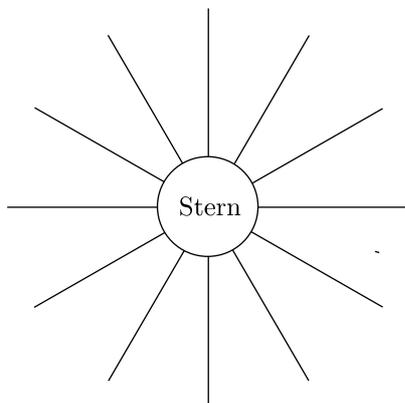
Der Radius eines Neutronensterns beträgt 10 bis 16 km.  
Mit  $M \hat{=} M_\odot$  folgt ein Schwarzschild-Radius von 3 km.

\* Schwarzes Loch



$$R = R_S \approx 10 \text{ km}, M \geq 2M_\odot$$

Beispiel für Nachweis von Schwarzen Löchern:

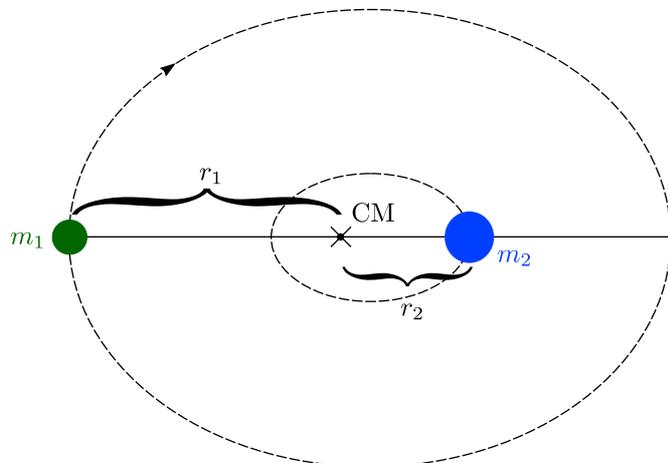


Schwarzes Loch

Gase werden ionisiert, beschleunigt durch die Gravitation. Somit entsteht  $\gamma$ -Strahlung. Auch schwarze Löcher sind oft Überbleibsel von Supernova-Explosionen.

### 5.3 Planetenbahnen, Keplersche Gesetze

#### Kreisbahn:



$$F_{m_1 m_2} = G \frac{m_1 m_2}{(r_1 + r_2)^2} = m_1 a_{z1} = m_1 \omega^2 r_1 (= m_2 a_{z2})$$

Für  $m_2 \gg m_1, r_2 \ll r_1$

$$\text{Es folgt: } F_{m_1 m_2} \approx G \frac{m_2}{r_1^2} \cdot m_1 = \omega^2 r_1 m_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} r_1 m_1$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_2} r_1^3$$

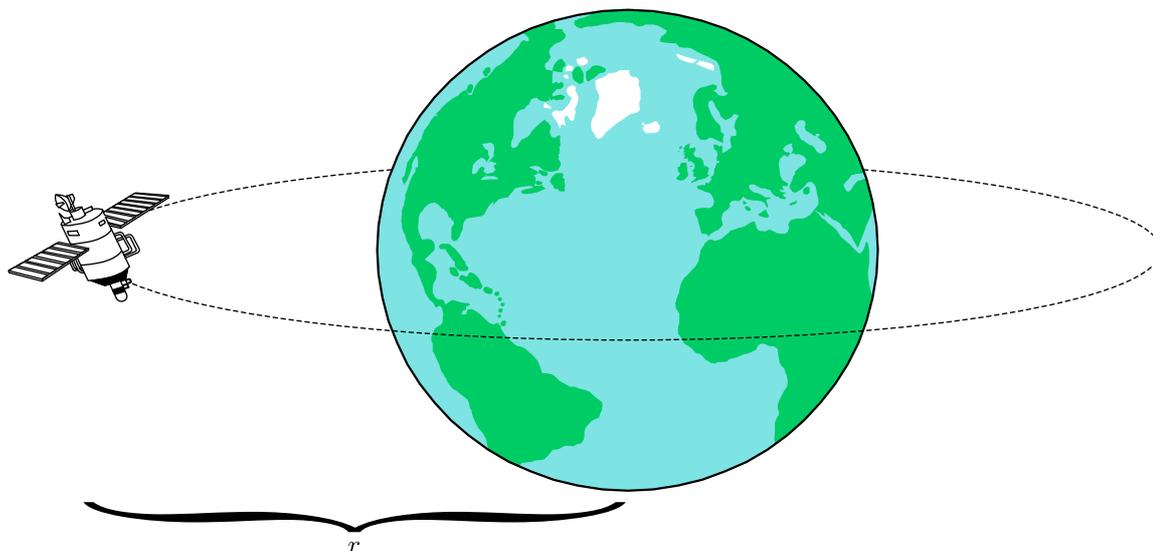
$\Rightarrow$  3. Kepler'sches Gesetz

#### Für Ellipse:

$$r_1 \mapsto \langle r_1 \rangle$$

#### Beispiele, Anwendungen:

a.) Geostationärer Orbit von Satelliten



$$T = 1 \text{ Tag}$$

$$\Rightarrow r(=r_1) = \sqrt[3]{\frac{Gm_E}{4\pi^2} (1 \text{ Tag})^2} = 42200 \text{ km}$$

$$d(\text{Satellit-Erdoberfläche}) = 35900 \text{ km}$$

b.) Masse der Erde

$$m_E = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

c.) Masse des Mondes

(Abstand zur Erde = 1738 km; Umlaufzeit = 27 d)

$$m_E = \frac{4\pi^2}{GT^2} r^3 = 7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

d.) Masse der Sonne

$$m_{\text{Sonne}} = \frac{4\pi^2}{G \cdot (1 \text{ Jahr})^2} (1 \text{ AE})^3 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

## 5.4 Herleitung der Bahnkurven

In Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi; & \dot{x} &= \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \cdot \dot{\phi} \\ y &= r \sin \phi; & \dot{y} &= \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \cdot \dot{\phi} \end{aligned}$$

Und die Beschleunigung ist:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \phi \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \cos \phi \end{aligned}$$

Aus Drehimpulserhaltung bei zentralen Kräften folgt:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \tilde{L}/m = \text{konstant} \text{ oder } r^2 \dot{\phi} = L/m \equiv k$$

Differentiation nach der Zeit ergibt:  $2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} = 0$  und damit wird der zweite Term in der Beschleunigung null.

Die gesamte Beschleunigung lässt sich schreiben als:

$$a = (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2)^{\frac{1}{2}} = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$$

Oder die Bewegungsgleichung  $F=ma$  ergibt:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = F(r)$$

Die Bahnkurve  $f(r, \phi)$  erhält man durch Elimination der Zeit. Dies geht am einfachsten durch die Substitution  $r=1/u$  (keine offensichtliche Variablenänderung, aber die Zeit lässt sich dann einfach eliminieren. Andere Möglichkeit wäre eine Integration der Bewegungsgleichungen in zwei unabhängige Richtungen, wie beim Wurfparabel).

Die Drehimpulserhaltung kann dann geschrieben werden als:  $\dot{\phi} = ku^2$ , womit die Zeitabhängigkeit von  $r$  und  $\phi$  eliminiert werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \dot{u} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \dot{\phi} = -k \frac{du}{d\phi} \\ \ddot{r} &= -k \frac{d^2u}{d\phi^2} \dot{\phi} = -k^2 u^2 \frac{d^2u}{d\phi^2} \end{aligned}$$

Schreiben wir noch für  $F(r) = -c/r^2 = -cu^2$ , dann lässt sich die Bewegungsgleichung schreiben als:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - \frac{c}{mk^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat als Lösung:

$$u = A \cos \phi + c/mk^2,$$

wie sich leicht durch Substitution verifizieren lässt. Hieraus folgt für die Bahnkurve in Polarkoordinaten:

$$r = \frac{1}{u} = \frac{1}{c/mk^2 + A \cos \phi} = \frac{mk^2/c}{1 + (mk^2 A/c) \cos \phi} = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi},$$

wobei  $\epsilon = mk^2 A/c$  die Exzentrizität ist und  $p = mk^2/c$  als Parameter bezeichnet wird.

Für  $\epsilon < 1$  ist die Bahn eine Ellipse, für  $\epsilon = 0$  ein Kreis und für  $\epsilon > 1$  eine Hyperbel, d.h. in einem "umgekehrten quadratischen" Kraftfeld ist die Bahn immer ein Kegelschnitt.  $\epsilon$  wird bestimmt durch die Gesamtenergie  $E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - c/r$  des Körpers.  $E_{tot}$  kann wie folgt berechnet werden. Für  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2$  findet man mit

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi} \dot{\phi} = \frac{\epsilon p \sin \phi}{(1 + \epsilon \cos \phi)^2} \dot{\phi} = \frac{\epsilon r^2 \sin \phi}{p} \dot{\phi}$$

$$v^2 = \frac{\epsilon^2 \sin^2 \phi}{p^2} (r^2 \dot{\phi})^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = \frac{\epsilon^2 k^2 \sin^2 \phi}{p^2} + \frac{k^2}{r^2}.$$

Hier wurde der Flächensatz  $r^2 \dot{\phi} = k$  benutzt. Für den Faktor  $\sin^2 \phi$  können wir mit der Bewegungsgleichung schreiben:  $\sin^2 \phi = 1 - \cos^2 \phi = 1 - (p - r)^2/\epsilon^2 r^2$ , so dass für  $v^2$  gilt:

$$v^2 = \frac{\epsilon^2 k^2}{p^2} - \frac{k^2(p - r)^2}{p^2 r^2} + \frac{k^2}{r^2} = \frac{k^2}{p^2} (\epsilon^2 - 1) + \frac{2k^2}{pr}$$

Wenn wir jetzt noch  $p = mk^2/c$  einsetzen, finden wir

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{m^2 k^2}{c^2} \cdot \frac{2}{m} \left( \frac{1}{2} m v^2 - \frac{c}{r} \right) = \frac{2mk^2}{c^2} (E_k + E_p) = \frac{2mk^2}{c^2} E_{tot}.$$

Daher gilt:

$\epsilon < 1$  für  $E_{tot} < 0 \rightarrow$  Bahn ist Ellipse (oder Kreis für  $\epsilon = 0$ )

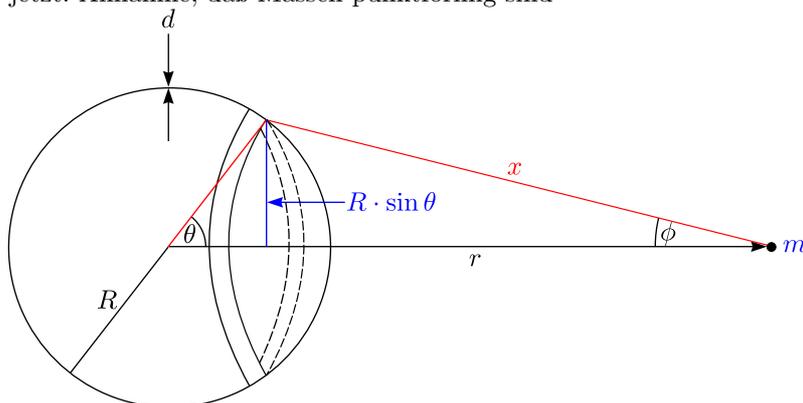
$\epsilon = 1$  für  $E_{tot} = 0 \rightarrow$  Bahn ist Parabel

$\epsilon > 1$  für  $E_{tot} > 0 \rightarrow$  Bahn ist Hyperbel

Dies entspricht der Erwartung: für negative Energien überwiegt die potentielle Energie und bleibt der Körper im Gravitationsfeld gebunden ( $E_{tot}$  ist "Bindungsenergie"). Wenn die Gesamtenergie null ist, ist die kinetische Energie gleich die potentielle Energie; dann kann der Körper das Unendliche erreichen mit  $v_\infty = 0$ .

## 5.5 Gravitation in Massenverteilungen

Bis jetzt: Annahme, daß Massen punktförmig sind



a.) Ruhemasse  $m$  außerhalb einer Kugelschale der Masse  $M$

$$dV = 2\pi R \sin \theta \cdot d \cdot R d\theta$$

$$dM = dV \cdot \rho$$

Die horizontale Komponente von  $d\vec{F}$  lautet:

$$dF_x = \frac{Gm \cdot dM}{x^2} \cdot \cos \phi = \frac{Gm \cdot \cos \phi}{x^2} \cdot \rho \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot d \cdot R d\theta$$

$$\text{i.) } \cos \phi = \frac{r - R \cdot \cos \theta}{x}$$

$$\text{ii.) } x^2 = (R \sin \theta)^2 + (r - \cos \theta \cdot R)^2 = R^2 + r^2 - 2rR \cos \theta$$

$$\Rightarrow R \cdot \cos \theta = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}$$

Und weiterhin gilt:

$$\frac{d(x^2)}{d\theta} = 2x \frac{dx}{d\theta} = 2rR \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{x \cdot dx}{r \cdot R}$$

$$\cos \phi = \frac{r - \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2r}}{x} = \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx}$$

$$dF = \frac{Gm}{x^2} \cdot \frac{r^2 - R^2 + x^2}{2rx} \cdot \rho \cdot 2\pi R^2 \cdot d \cdot \frac{xdx}{r \cdot R}$$

$$dF = \frac{\pi \cdot G \cdot d \cdot \rho \cdot m \cdot R}{r^2} \cdot \frac{r^2 - R^2 + x^2}{x^2} dx = \underbrace{\frac{\pi \cdot G \cdot d \cdot \rho \cdot m \cdot R}{r^2}}_f \left( \frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx$$

$$F = \int_{F(r-R)}^{F(r+R)} dF = \int_{r-R}^{r+R} dx \cdot f \left( \frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) = f \cdot \left[ -\frac{r^2 - R^2}{x} + x \right]_{r-R}^{r+R} = f \cdot 4R =$$

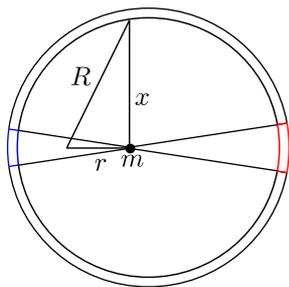
$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot d \cdot \rho \cdot m \cdot R^2}{r^2} = G \frac{mM}{r^2}$$

$$F = G \frac{mM}{r^2}$$

Da  $V_{Kugelschale} = 4\pi R^2 \cdot d$

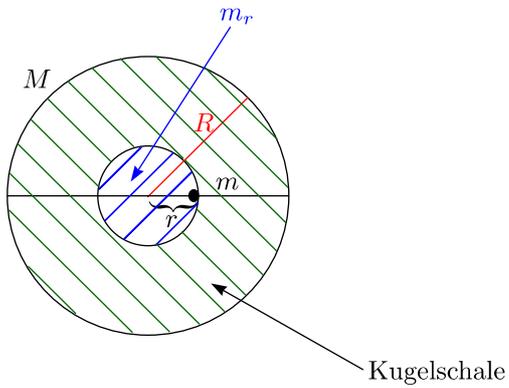
$M_{Kugelschale} = 4\pi R^2 \cdot d \cdot \rho$

b.) Masse  $m$  innerhalb Kugelschale

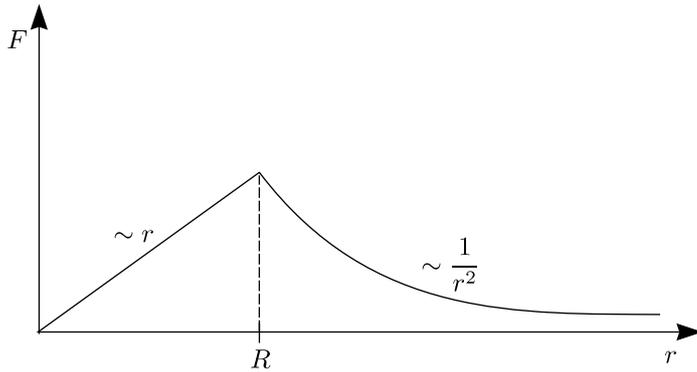


$$F = \int_{R-r}^{R+r} dF = 0, \text{ da } \int_{R-r}^{R+r} \left( \frac{r^2 - R^2}{x^2} + 1 \right) dx = 0$$

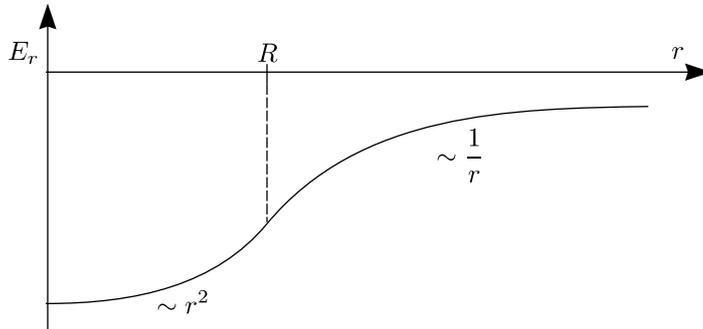
c.) Masse innerhalb Vollkugel



$$F = \frac{G \cdot m \cdot m_r}{r^2} = \frac{G \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{r^2} = G \cdot m \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \rho \cdot r$$



Potential: Mit  $E_p(r) = - \int_r^\infty F(r') dr'$



d.) Bewegung bei Massenverteilungen mit Kugelsymmetrie:

\* Außerhalb der Massenverteilung:

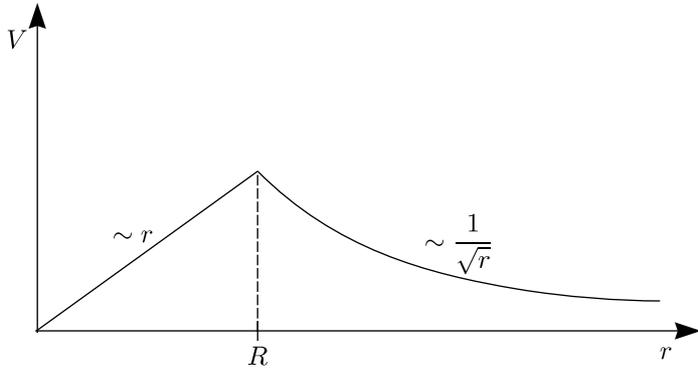
$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (F = m \cdot a)$$

Damit gilt:

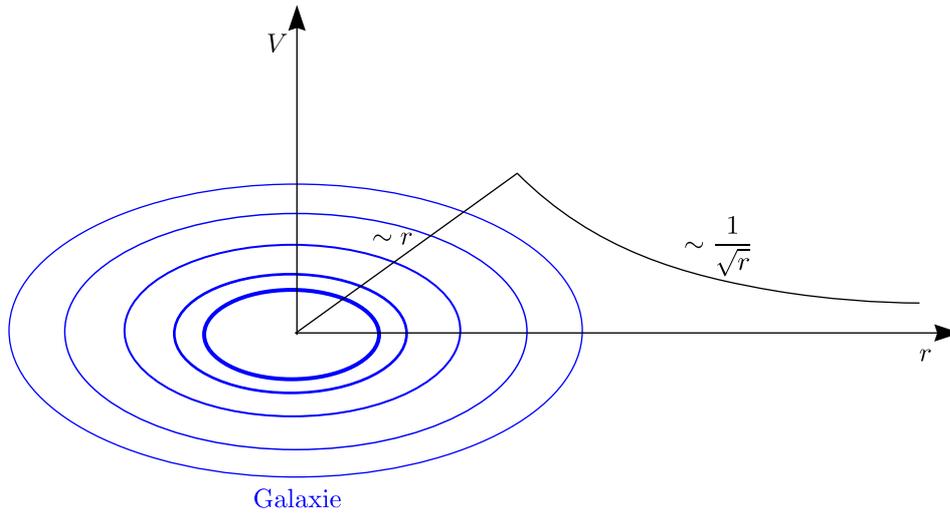
$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$$

\* Innerhalb:

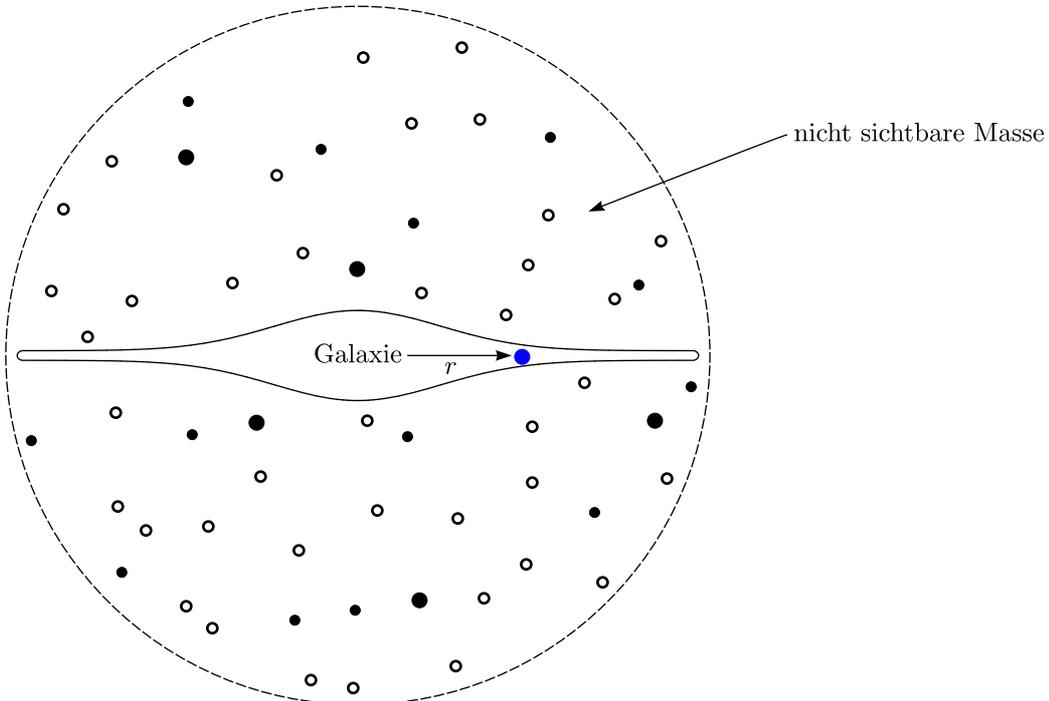
$$v = \sqrt{\frac{Gm_r}{r}} = \sqrt{\frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho}{r}} \sim r$$



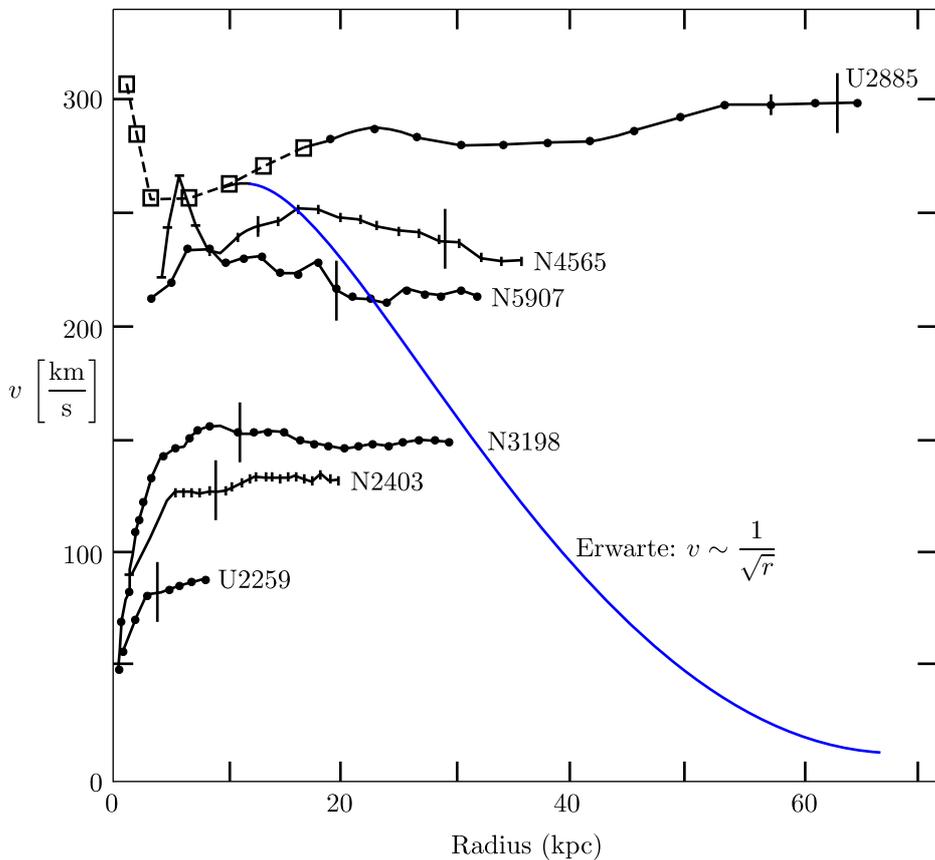
Das beobachten wir im Sonnensystem, nicht aber in Galaxien oder Galaxienhaufen.



Galaxie



Die nicht sichtbare Masse ist 10 bis 100 Mal größer als die Masse aller Sterne innerhalb der Galaxie.



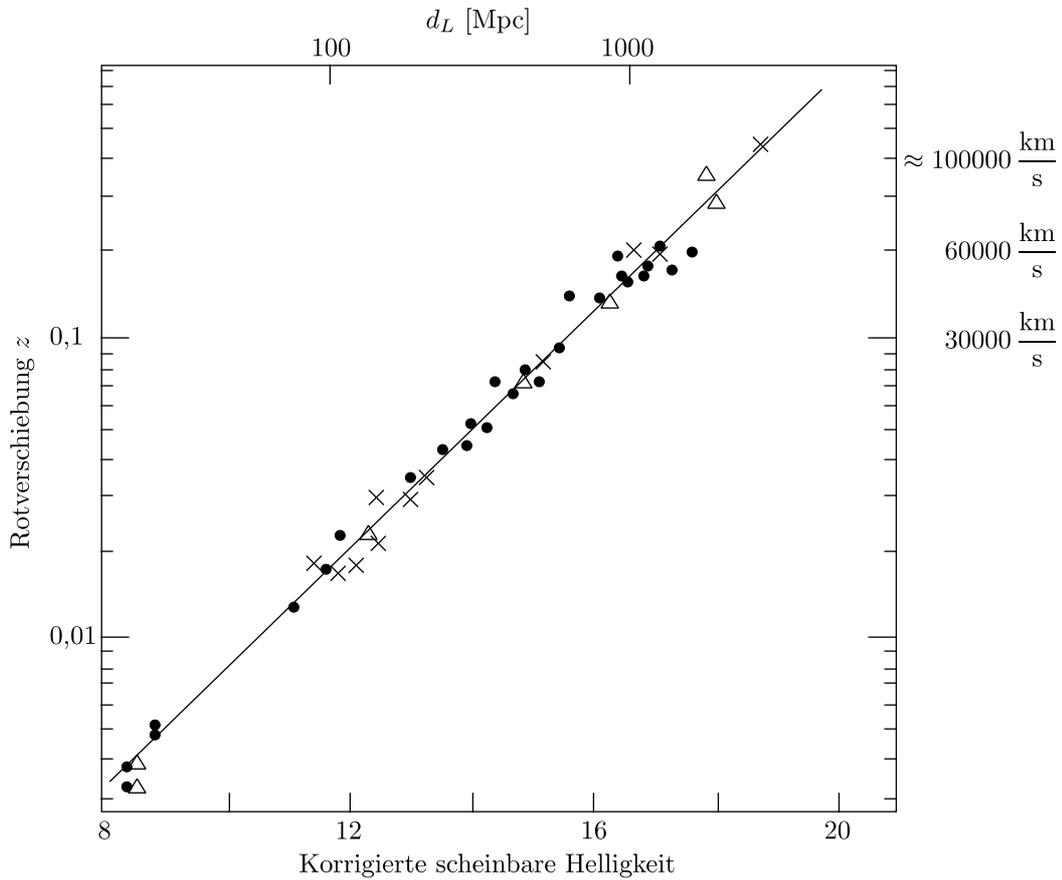
### Unser heutiges Wissen:

Das Universum ist vor 12 bis 15 Milliarden Jahren in einem Urknall entstanden („Big Bang“).

### Beobachtungen:

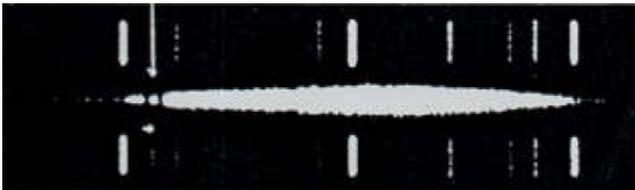
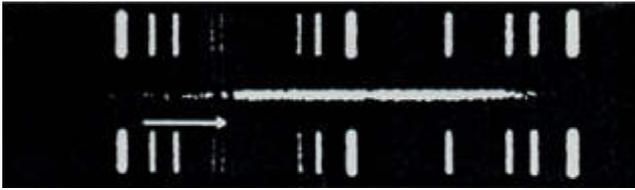
- \* Die Galaxien entfernen sich voneinander (Hubble 1930). Je größer ihre Entfernung ist, desto größer ist ihre Fluchtgeschwindigkeit ( $50 - 100 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  pro Mpc).
- \* Kosmische Hintergrundstrahlung (Penzias, Wilson 1956)  
2,7 K Temperaturstrahlung  $\Rightarrow$  Lichtblitz des Urknalls
- \* Primordiale Häufigkeit der Elemente  
75% H, 24% He, <1% Li, ...  $\Rightarrow$  Elementsynthese in den ersten drei Minuten

Wir leben in einem expandierenden Universum.



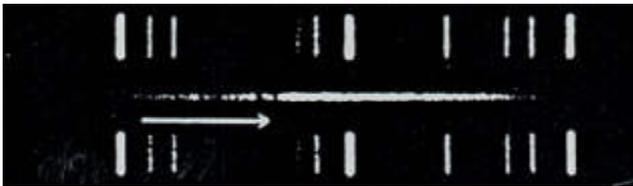
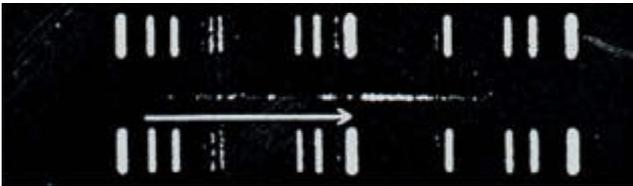
Das Hubble-Diagramm zeigt, dass die Geschwindigkeit, womit die Galaxien auseinanderfliegen (proportional zur Rotverschiebung) linear mit dem Abstand der Galaxien zusammenhängt. Der Abstand wird bestimmt durch die korrigierte scheinbare Helligkeit.

Im folgenden sehen wir einige Nebelhaufen mit ihrem Spektrum, aus dessen Rotverschiebung man die Fluchtgeschwindigkeit bestimmen kann:

Photo	Spektrum	Entfernung [Lichtjahr]	Fluchtgeschwindigkeit [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]
		43 Mill.	1200
Virgo			
		560 Mill.	14800

Fortsetzung ...

... Fortsetzung

Photo	Spektrum	Entfernung [Lichtjahr]	Fluchtgeschwindigkeit $\left[\frac{\text{km}}{\text{s}}\right]$
Ursa Major 		728 Mill.	21500
Corona Borealis 		1,29 Mrd.	40000
Bootes 		1,96 Mrd.	60000

Hydra

Im folgenden sehen wir sechs verschiedene Spiralsysteme. Beim Typ S0 ist die Spiralstruktur kaum noch ausgeprägt. Typ Sa zeigt sie deutlicher. Beim Übergangstyp Sab wie bei Sb sind die Spiralen gut sichtbar. Beim Typ Sc tritt der Kern deutlich gegenüber den Spiralarmen zurück. (Hale Observatories)



NGC 1201 Typ: S0



NGC 2841 Typ: Sb



NGC 2811 Typ: Sa



NGC 3031 M81 Typ: Sb

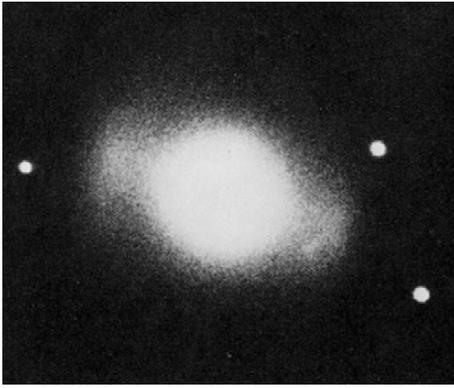


NGC 488 Typ: Sab



NGC 628 M74 Typ: Sc

Im folgenden sind es sechs Sternensysteme, die alle dem Typus der Balkenspirale zugerechnet werden. Beim Typ SB0 sind die beiden Balkenarme nur angedeutet. Die weitere Bildfolge ist so geordnet, daß der Balken immer deutlicher ausgeprägt, der Kern dagegen immer schwächer wird. (Hale Observatories)



NGC 2859 Typ: SB0



NGC 2523 Typ: SBb(r)



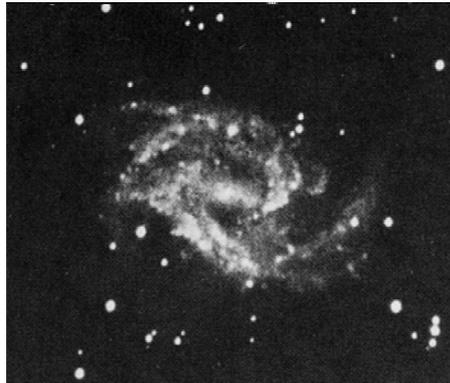
NGC 175 Typ: SBab(s)



NGC 1073 Typ: SBc(sr)



NGC 1300 Typ: SBb(s)



NGC 2525 Typ: SBc(s)

# Kapitel 6

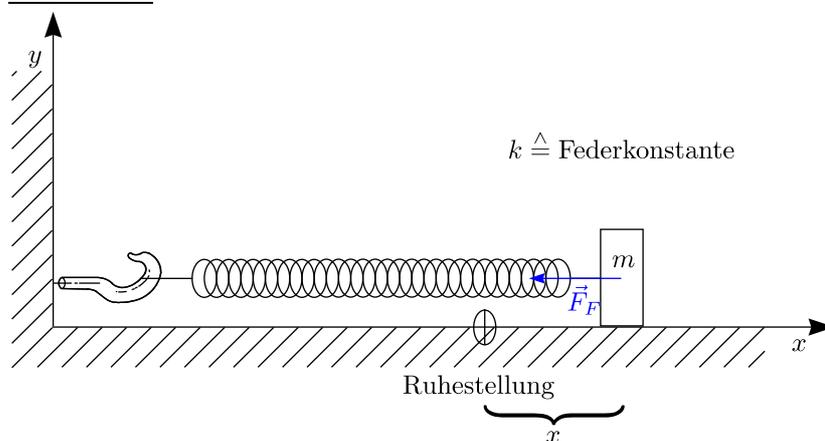
## Schwingungen und Wellen

### 6.1 Wellenausbreitung in der Mechanik

#### 6.1.1 Schwingungen (Wiederholung)

##### 1. Federschwingungen

##### a.) Ungedämpft



$$F = \underbrace{-k \cdot x = m \frac{d^2 x}{dt^2}}_{\text{Differentialgleichungen}}$$

Wir verwenden folgenden Ansatz:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Durch Einsetzen folgt:

$$-k \cdot A \cos(\omega t + \phi) = -m \cdot A \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Dies gilt zu allen Zeiten  $t$ .

$$-m \omega^2 = -k$$

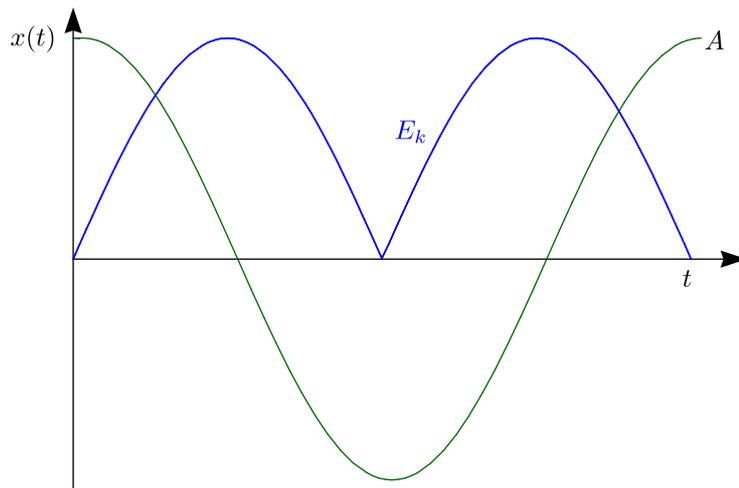
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow x(t) = A \cdot \left( \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$$

Die Randbedingungen lauten:

$$t = 0 : x(t = 0) = A$$

$\Rightarrow \phi = 0$

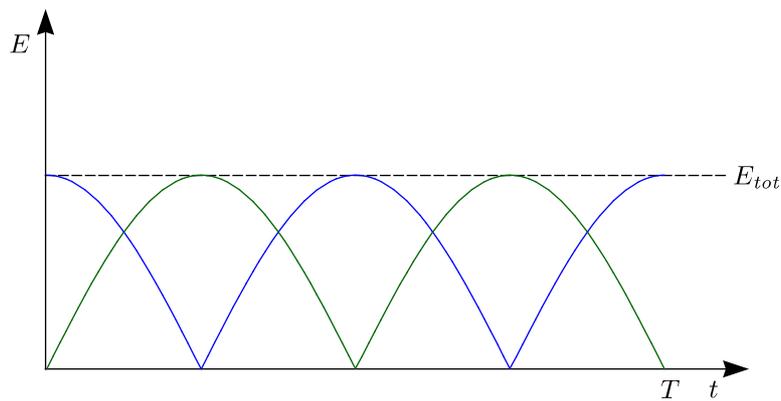


Energiebilanz:

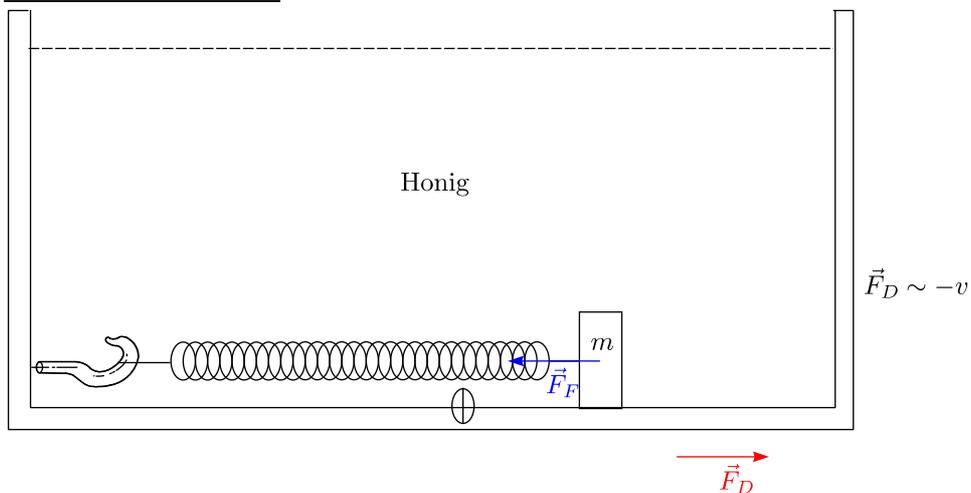
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2}m \frac{k}{m} A^2 \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$E_p = \int_0^x kx' dx' = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$E_{tot} = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$



b.) Gedämpfte Schwingung



$$-kx - b \cdot \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Wir haben folgenden Ansatz:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\lambda t} \cos \omega t$$

Die Phase  $\phi$  wird weggelassen. Eingesetzt in Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & -kx_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + b\lambda \cdot x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + b\omega x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t = \\ & = m \cdot \lambda^2 x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t + \lambda \cdot \omega \cdot m \cdot x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t \\ & + \lambda \cdot \omega \cdot m \cdot x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t - \omega^2 \cdot m \cdot x_0 \cdot e^{-\lambda t} \cos \omega t \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t (b\omega - 2\lambda\omega m) = x_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t (m\lambda^2 - m\omega^2 + k - b\lambda)$$

Dies gilt für alle  $t$ ! Damit haben wir:

$$b \cdot \omega = 2\lambda \cdot \omega \cdot m \Rightarrow \lambda = \frac{b}{2m}$$

$$m\lambda^2 - m\omega^2 + k - b\lambda = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Die Lösung lautet:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} t \right)$$

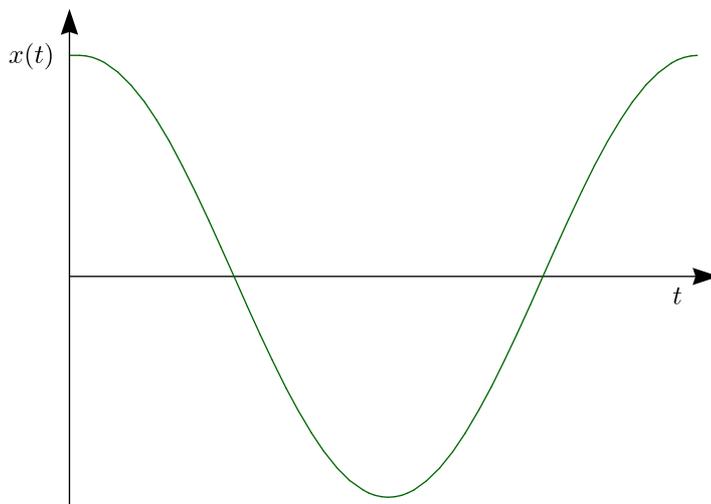
$x(t)$  hängt stark ab von:

$$\frac{\langle |kx| \rangle}{\langle |b\dot{x}| \rangle} = \frac{\text{Mittlere Rückstellkraft}}{\text{Mittlere Reibungskraft}}$$

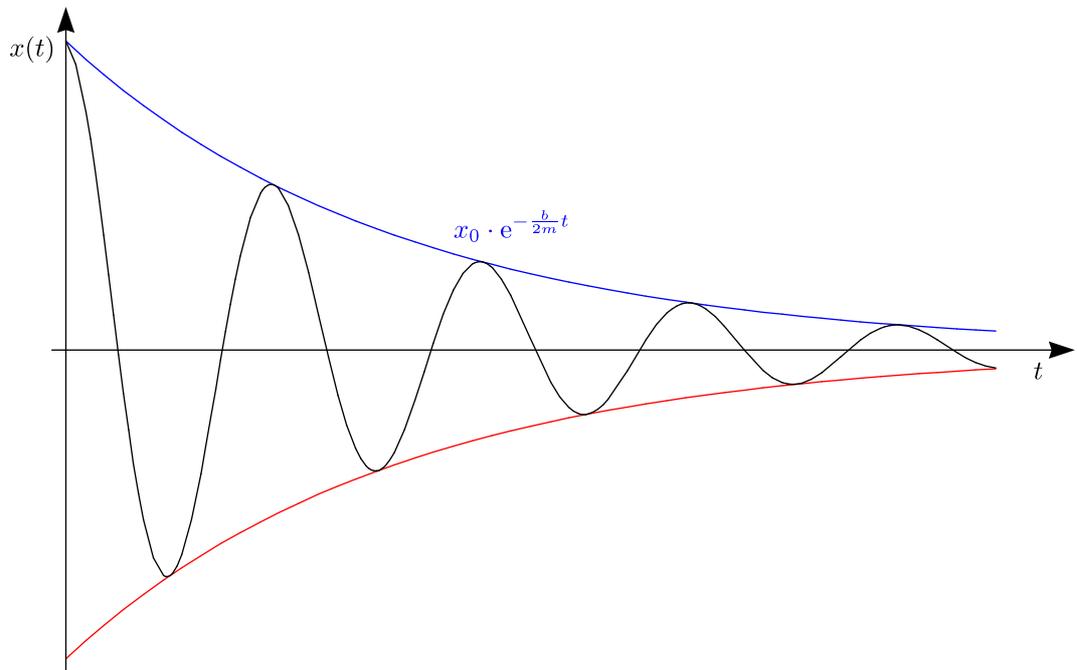
**Diskussion:**

- \* Keine Dämpfung:  $b = 0$   
Hierbei erhalten wir eine einfache Kosinusfunktion:

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

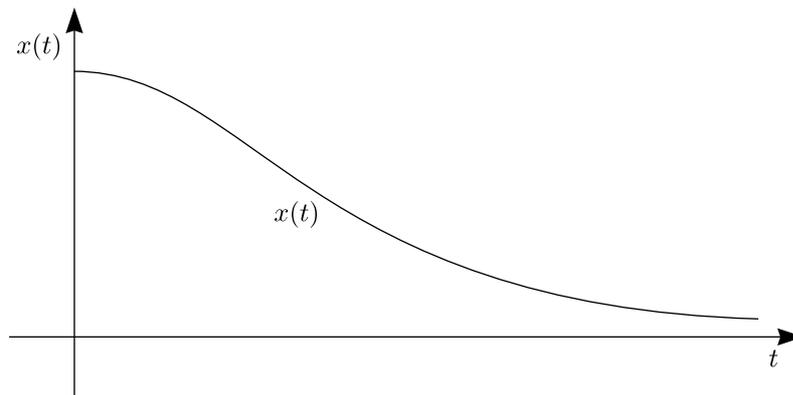


- \* Dämpfung „schwach“:  $b < \sqrt{4mk}$   
Die Schwingung wird durch eine exponentiell gedämpfte Kosinusfunktion beschrieben:

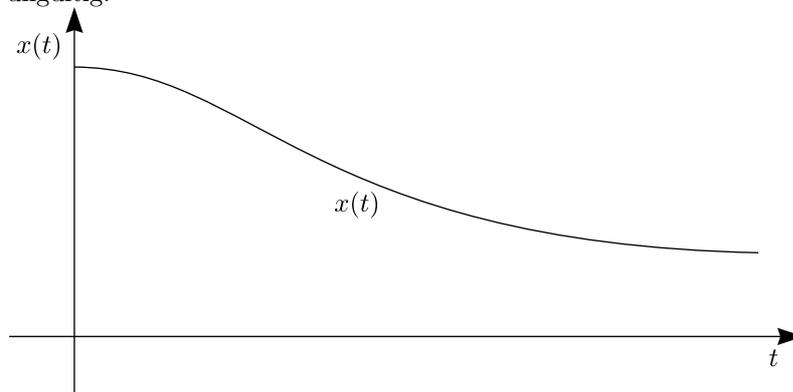


- \* Grenzfall:  $b = \sqrt{4mk}$   
 Mit  $\omega = 0$  und  $\cos \omega t = 1$  ergibt sich eine Exponentialfunktion:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m}t}$$



- \* Überdämpfung:  $b > \sqrt{4mk}$   
 Die Kreisfrequenz  $\omega$  ist imaginär! Der Kosinusansatz zur Lösung der Differentialgleichung ist ungültig!



„Lebensdauer“:  $\tau = \frac{m}{b}$

**Gedämpfte Federschwingung:**

Die Physik steckt in der Kraftgleichung:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

⇒ Die Lösung dieser Differentialgleichung gibt die Bewegungsgleichung:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos \sqrt{\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} - \frac{b^2}{4m^2}} t$$

**Physikalische Größen:**

\* Lebensdauer:

$$\tau = \frac{2m}{b}$$

Dies entspricht der Abklingzeit, bei der Amplitude auf  $\frac{1}{e}x_0$  abgefallen ist.

\* Qualitätsfaktor:

$$Q = \omega \cdot \tau$$

Es handelt sich um die Anzahl der Oszillationen während der Abklingzeit.

**Beispiele:**

\* Stimmgabel:  $Q \approx 10^4$

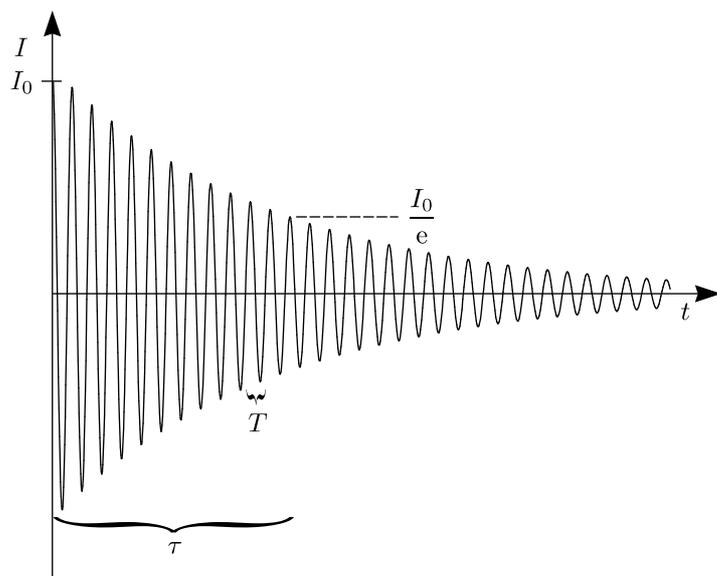
\* Federpendel:  $Q \approx 10 - 20$

Für die gesamte Energie gilt:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_E}} \text{ mit } \tau_E = \frac{m}{b}$$

Die Energie ist somit keine Erhaltungsgröße! Sie wird umgewandelt durch Reibung in Wärme, Wirbel.

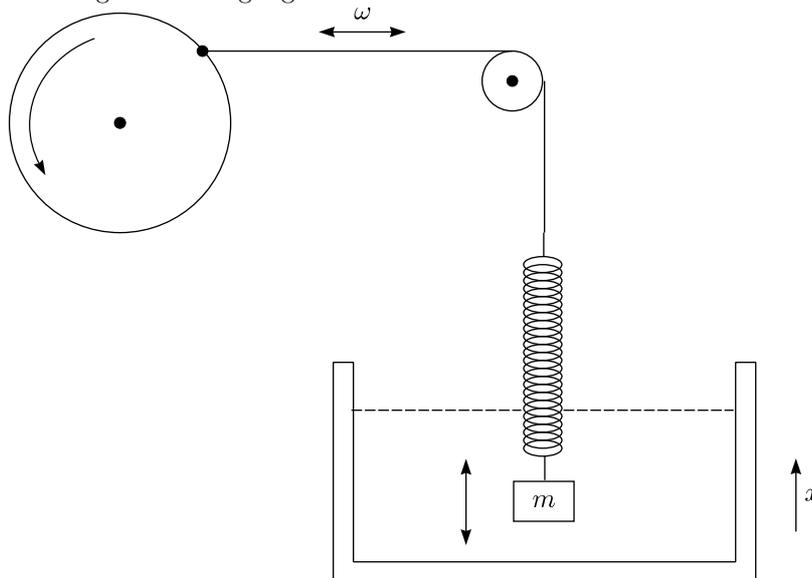
**Beispiel:**



Es sei  $\tau = 5 \text{ s}$  und  $T = 5 \text{ ms}$ . Damit folgt:

$$Q = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau = \frac{2\pi}{5 \cdot 10^{-3} \text{ s}} \cdot 5 \text{ s} = \boxed{6280}$$

c.) Erzwungene Schwingungen:



Wir betrachten ein periodisch angeregtes oszillierendes System mit Dämpfung. Die zugehörige Kraftgleichung lautet:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Umgeformt ergibt sich:

$$\underbrace{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x}_{\text{Homogene Differentialgleichung}} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \text{ mit } \gamma = \frac{b}{2m} \left( = \frac{1}{\tau} \right) \text{ und } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Wir verwenden folgenden Lösungsansatz:

$$x(t) = \underbrace{x_1 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1)}_{\text{Lösung der homogenen Differentialgleichung}} + \underbrace{x_2 \cos(\omega t + \phi_2)}_{\text{spezielle Lösung nach } t \gg \tau}$$

Wir beschränken uns auf eine spezielle Lösung nach  $t \gg \tau$ . Der Ansatz lautet:

$$x(t) = x_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2)$$

Damit folgt das Ergebnis:

$$* x_2 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Die Amplitude ist somit frequenzabhängig!

$$* \tan \phi_2 = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Phasenverschiebung: Schwingung der Masse hinkt der Erregerschwingung hinterher.

### Herleitung der obigen Formeln am einfachsten mit komplexen Zahlen:

Nehme als Lösungsansatz:

$$x(t) = x_2 e^{i\omega t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

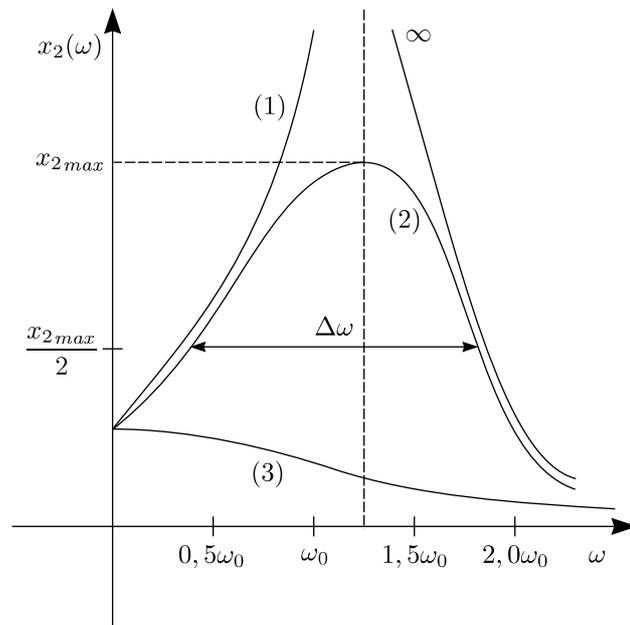
$$-x_2 \omega^2 e^{i\omega t} + 2\gamma i \omega x_2 e^{i\omega t} + \omega_0^2 x_2 e^{i\omega t} = F_0/m e^{i\omega t},$$

woraus folgt:

$$x_2 = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega} = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} - i \frac{2\gamma\omega(F_0/m)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

Der Modulus (Größe) von  $x_2 = a + ib$  wird gegeben durch  $\sqrt{a^2 + b^2}$ , weil die Phase bestimmt wird durch  $\tan \phi_2 = b/a$ . Einsetzen von  $a = \frac{(F_0/m)(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$  und  $b = -\frac{2\gamma\omega F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$  ergibt die gewünschten Resultate.

Diskussion der Amplitude  $x_2$



- 1.) Für  $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0$  haben wir keine Dämpfung.
- 2.) Resonanzkurve  $\frac{\gamma}{\omega_0} = 0, 1$  (schwache Dämpfung)
- 3.)  $\frac{\gamma}{\omega_0} = 1$  (starke Dämpfung)

Die Halbwertsbreite beträgt:

$$\Delta\omega \approx 2\gamma \cdot \sqrt{3}$$

Full Width Half Maximum (FWHM):  $\frac{b}{m}\sqrt{3}$

Für  $\gamma \mapsto 0$  (d.h.  $b \mapsto 0$ ) gilt:

$$x_2 \mapsto \infty, \Delta\omega \mapsto 0$$

2. Demonstration Pohlsches Rad. Eine Scheibe mit Trägheitsmoment  $J$  wird durch eine Spiralfeder mit Winkelrichtgröße  $D_r$ , dessen Ende durch eine externe periodische Kraft  $F_0 \cos \omega t$  angetrieben wird, in gezwungenen Drehschwingungen mit Auslenkwinkel  $\theta$  versetzt. Die Dämpfung  $-b\dot{\theta}$  lässt sich mittels einer Wirbelstrombremse einstellen.

Es gilt:

$$M = -D_r \cdot \theta - b\dot{\theta} + F_0 e^{i\omega t} = J \cdot \ddot{\theta}$$

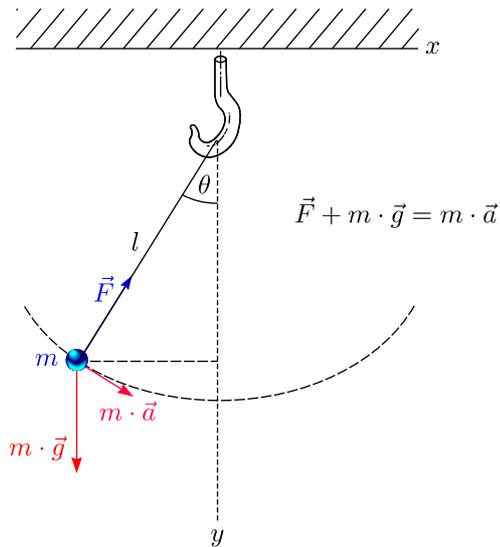
oder

$$\ddot{\theta} = -\frac{D_r}{J}\theta - \frac{b}{J}\dot{\theta} + \frac{F_0}{J}e^{i\omega t}$$

Setzt man  $\omega_0^2 = D_r/J$ ,  $2\gamma = b/J$  und  $F_0/m = F_0/J$ , dann hat man die gleiche Lösung wie oben!

3. Pendelschwingungen

- a.) Mathematisches Pendel



$$-mg \sin \theta = m \cdot a = m \cdot l \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

Diese Differentialgleichung ist nicht algebraisch lösbar!

Näherung:

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \approx \theta \text{ für } \theta \ll \frac{\pi}{2}$$

Damit erhalten wir folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

Folgender Ansatz ist sinnvoll:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega t$$

Damit erhalten wir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \triangleq T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\perp \vec{F})$$

Betrachten wir außerdem folgenden Spezialfall. Für  $\frac{T}{2} = 1 \text{ s}$  gilt:

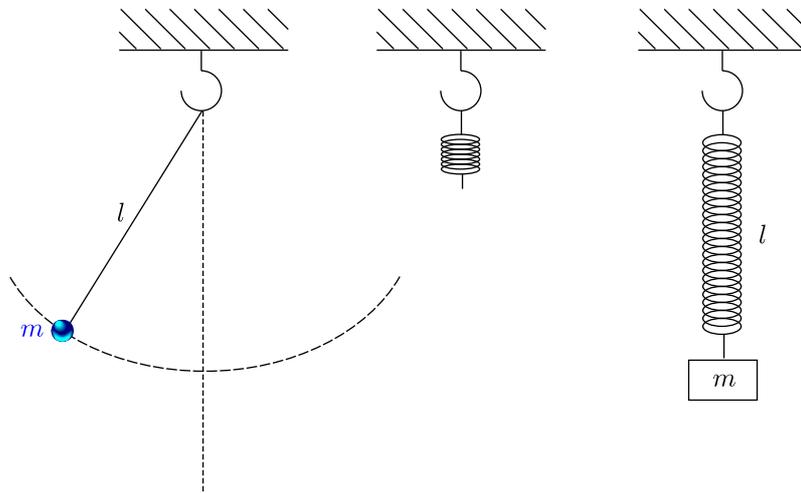
$$l = \frac{4 \text{ s}^2}{4\pi^2} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 1 \text{ m}$$

Dies ist das sogenannte „Sekundenpendel“.

Vergleich zwischen Pendel- und Federschwingung:

**Behauptung:**

Pendel, dessen Länge gleich Ausdehnung einer Feder durch ein Gewicht ist, hat die gleiche Frequenz wie die Feder.

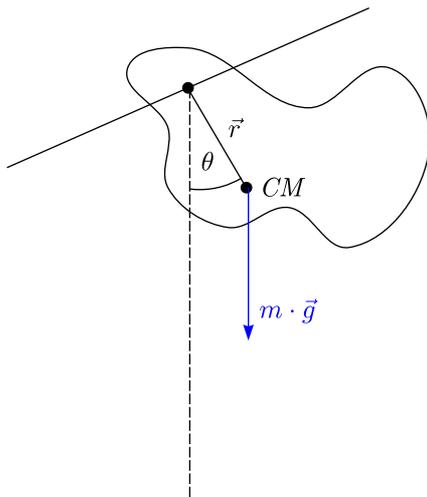

**Beweis:**

Die Federdehnung ist gegeben durch:

$$m \cdot g = k \cdot l \Rightarrow \frac{l}{g} = \frac{m}{k}$$

$$\Rightarrow \omega_F = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}} = \omega_P$$

b.) Physikalisches Pendel



Es ergibt sich folgendes Drehmoment:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g} = J \cdot \vec{\alpha}$$

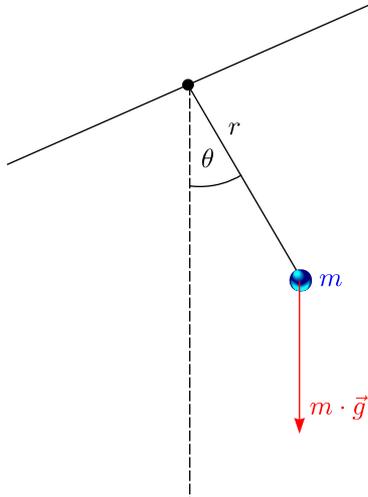
$$-r \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta = J \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} \Leftrightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{m \cdot g \cdot r}{J} \theta = 0$$

Auch hier benutzen wir die Näherung  $\sin \theta \approx \theta$ . Somit gilt für die Lösung:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{J}} t$$

**Beispiele:**

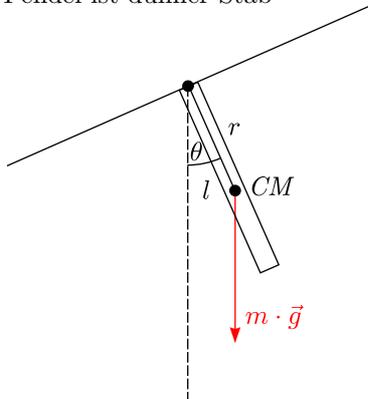
\* Masse konzentriert im Massenmittelpunkt:



$$\Rightarrow J = mr^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{J}} = \sqrt{\frac{g}{r}} \quad (\hat{=} \text{ mathematisches Pendel})$$

\* Pendel ist dünner Stab



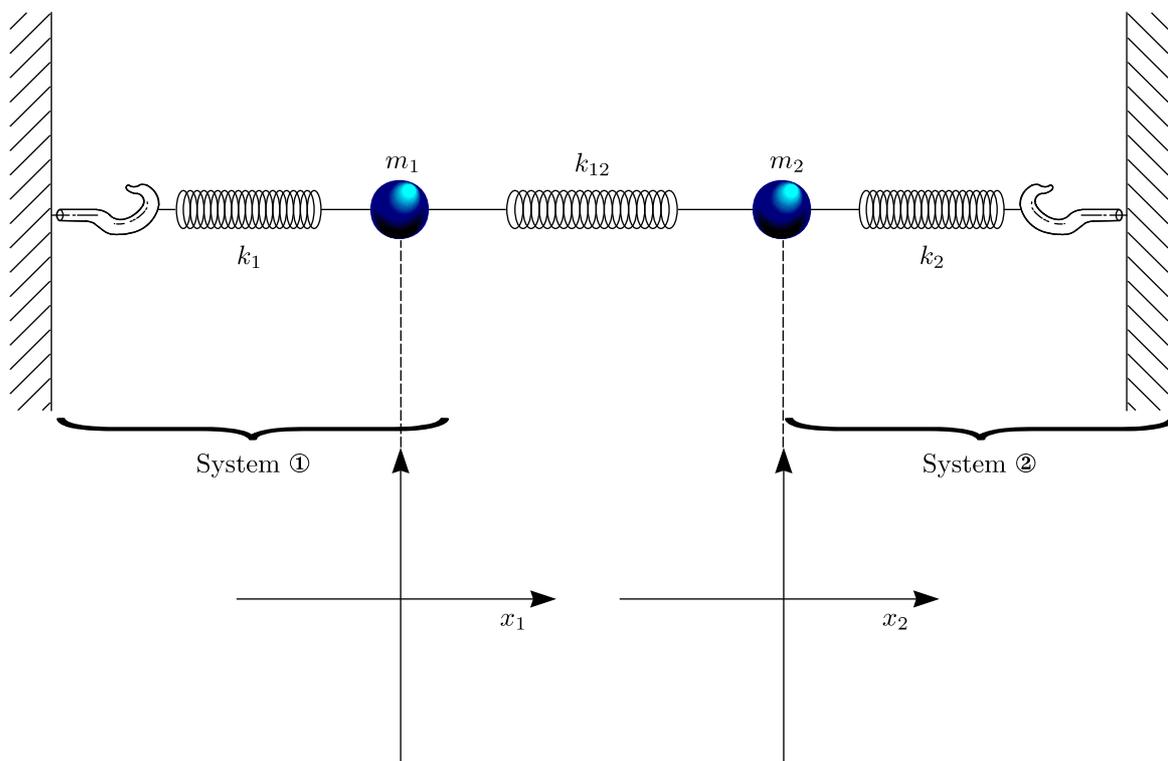
$$r = \frac{l}{2}$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2 = \frac{4}{3}mr^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot r}{J}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{g}{l}}$$

#### 4. Gekoppelte Schwingungen

a.) Einfachster Fall: Gekoppeltes Federpendel



$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_{12} (x_1 - x_2)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_{12} (x_2 - x_1)$$

Es handelt sich um ein System aus gekoppelten Differentialgleichungen. Wir betrachten hierzu folgenden Spezialfall:

$$m_1 = m_2 \equiv m$$

$$k_1 = k_2 \equiv k$$

Damit folgt:

$$m \ddot{x}_1 = -k x_1 - k_{12} (x_1 - x_2)$$

$$m \ddot{x}_2 = -k x_2 - k_{12} (x_2 - x_1)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion dieser beiden Differentialgleichungen ergibt sich nun folgendes System:

$$m \underbrace{(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)}_{2\ddot{x}_M} = -k(x_1 + x_2)$$

$$m \underbrace{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}_{2\ddot{x}_D} = -k(x_1 - x_2) - 2k_{12}(x_1 - x_2)$$

\* Mittlere Auslenkung:

$$X_M = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$$

\* Differenz:

$$X_D = \frac{1}{2} (x_1 - x_2)$$

Damit erhalten wir also zwei Differentialgleichungen, die voneinander unabhängig sind:

$$m\ddot{X}_M = -kX_M$$

$$m\ddot{X}_D = -kX_D - 2k_{12}X_D$$

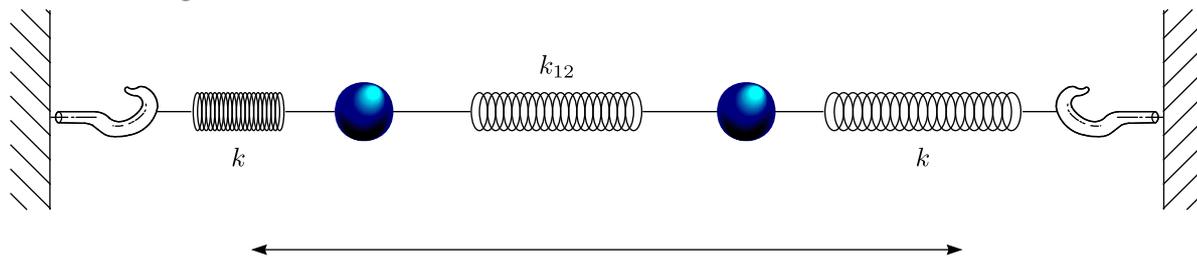
Hierbei folgt nun die Lösung:

$$X_M = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$X_D = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}$$

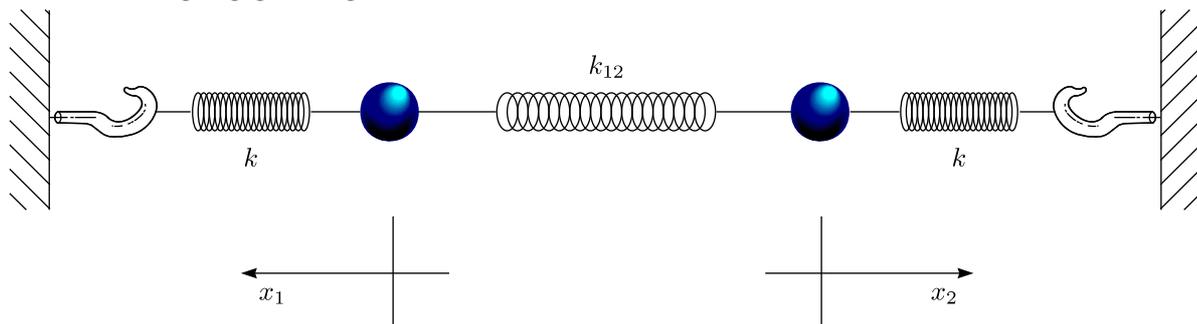
**Beispiele:**

a.) Massen schwingen in Phase:



$$X_M = x_1(t) = x_2(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) (= A_2 \cos(\omega_1 t + \phi_2)) \quad \text{mit} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

b.) Massen schwingen gegenläufig:

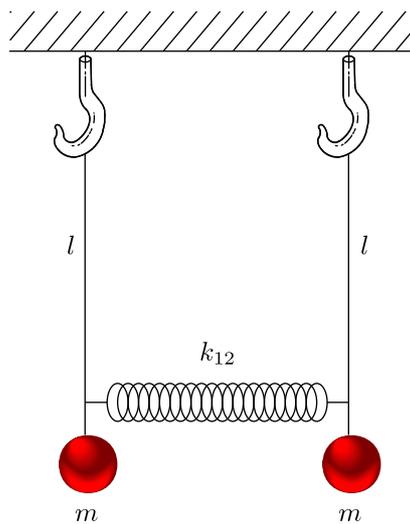


$$X_M = 0$$

Damit haben wir:

$$x_1(t) = -x_2(t) = X_D(t) = A_1 \cos(\omega_2 t + \phi_1) = -A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \quad \text{mit} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}}$$

**Demonstration:**



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k_{12}}{m}}$$

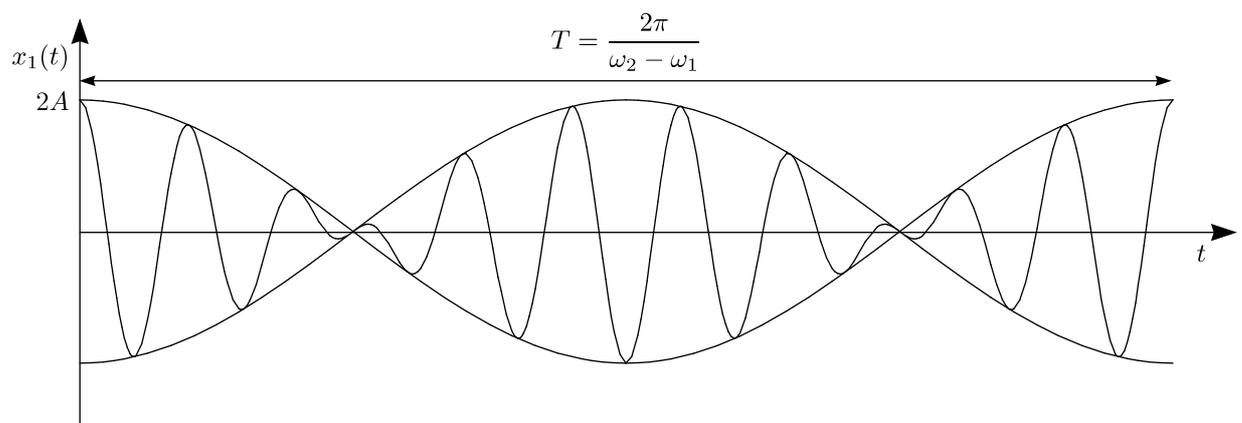
c.) Massen sind außer Phase ( $A_1 = A_2 \equiv A$ )

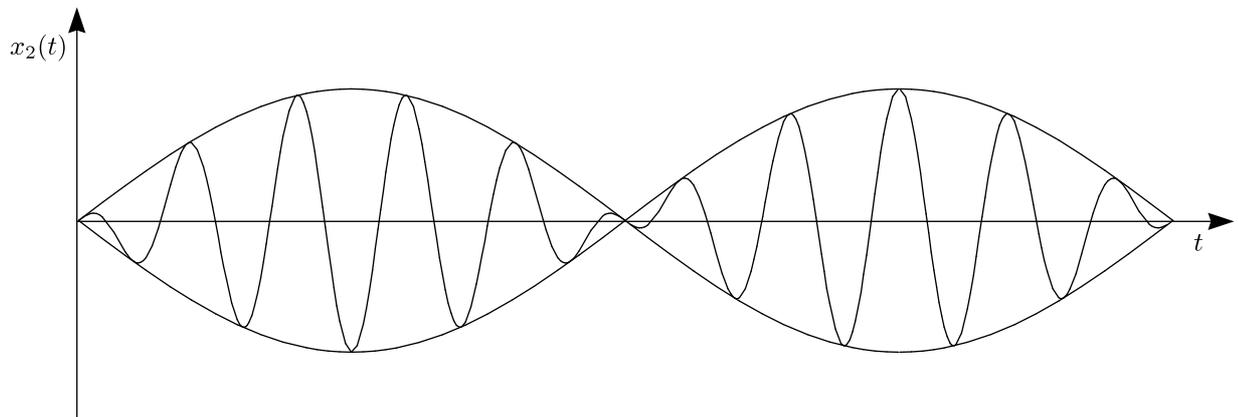
$$\begin{aligned} x_1(t) &= X_M + X_D = A [\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)] = \\ &= \boxed{2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= X_M - X_D = A [\cos(\omega_1 t + \phi_1) - \cos(\omega_2 t + \phi_2)] = \\ &= \boxed{-2A \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)} \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Periode einer Schwebung:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}}$$





### Lissajous-Figuren:

Diese entstehen bei Überlagerung harmonischer Schwingungen mit ganzzahligem Frequenzverhältnis, die senkrecht zueinander stehen.

$$x = x_0 \sin(\omega t)$$

$$y = y_0 \sin(\omega t + \varphi) = y_0 \sin(\omega t) \cos \varphi + y_0 \cos(\omega t) \sin \varphi$$

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{x_0} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2}$$

Durch Einsetzen in obige Gleichung folgt:

$$y = y_0 \cdot \frac{x}{x_0} \cdot \cos \varphi + y_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \cdot \sin \varphi$$

Durch Umformen ergibt sich:

$$\frac{y}{y_0} - \frac{x}{x_0} \cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^2} \sin \varphi$$

Quadriert man diese Gleichung, so erhält man die allgemeine Ellipsengleichung:

$$\boxed{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 - \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \varphi = \sin^2 \varphi}$$

Für  $\varphi = 0$  erhält man eine Gerade:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x$$

Für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  resultiert eine Ellipse:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = 1$$

Allgemein ergeben sich für ganzzahlige Frequenzverhältnisse geschlossene Raumkurven, die von der Phasenlage unabhängig sind.

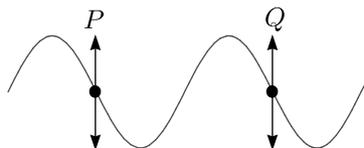
### 6.1.2 Wellen

#### Allgemeines:

Wellen sind Erscheinungen der Natur, welche gekoppelte oszillierende Systeme darstellen.

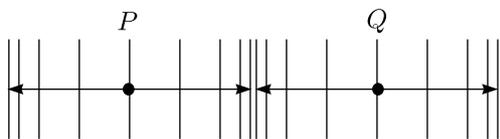
\* Transversale Wellen

Vertikalschwingungen aller Punkte längs der Welle, Beispiel: Wasserwellen



\* Longitudinale Wellen

Horizontalschwingungen aller Punkte, Beispiel: Schallwellen

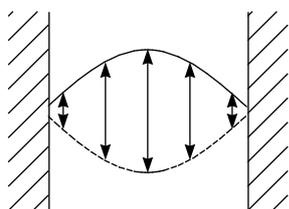


\* Eindimensionale Wellen (Feder, Saite, ...)

\* Zweidimensionale Wellen (Wasserwellen, vibrierende Platte, ...)

\* Dreidimensionale Wellen (elektromagnetische Wellen, Schall, ...)

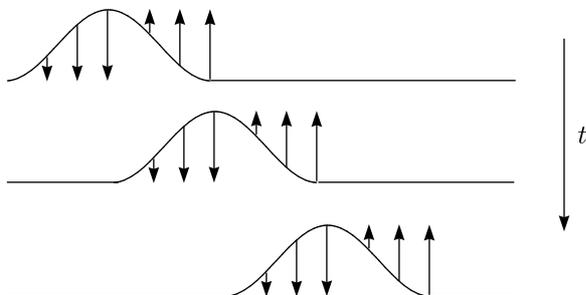
\* Stehende Wellen



Beispiel: Saite

Alle Punkte bewegen sich in Phase.

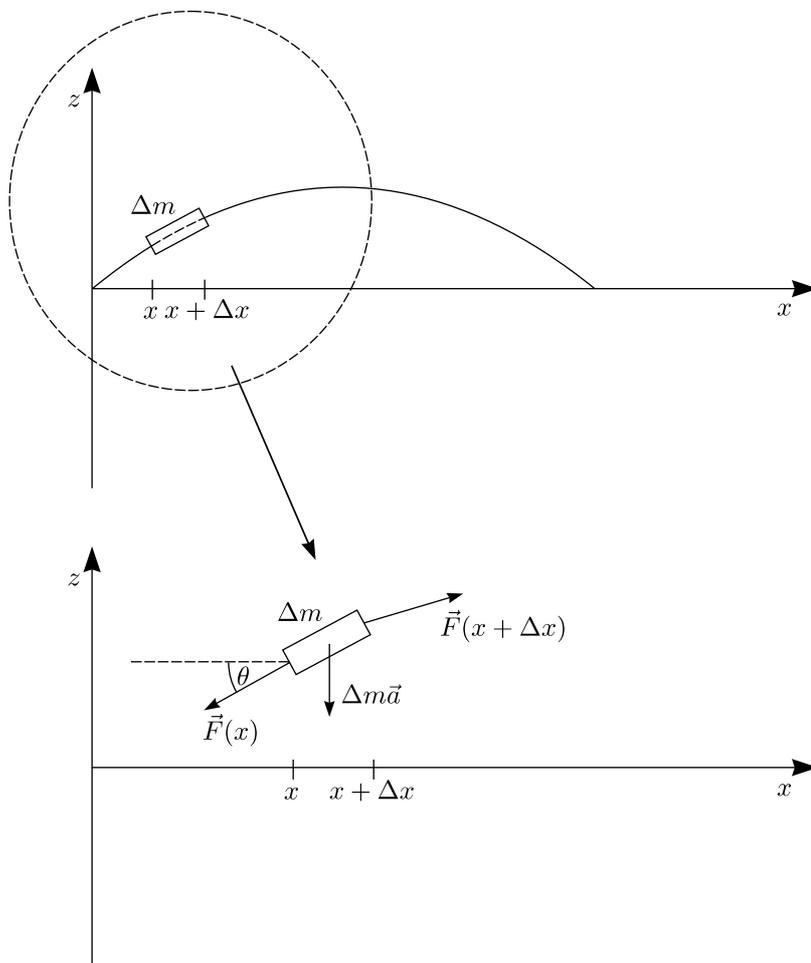
\* Laufende Welle



Die Auslenkung verschiebt sich.

1.) Die Wellengleichung:

Wir wollen die Wellengleichung mit Hilfe der Saitenschwingung herleiten:



$$F_z(x) = f \cdot \sin \theta \approx F \cdot \tan \theta = F \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$F_z(x + \Delta x) = F \cdot \sin(\theta + \Delta\theta) \approx F \cdot \left( \frac{dz}{dx} + \Delta \frac{dz}{dx} \right)$$

$$f_z(x + \Delta x) - F_z(x) = F \cdot \Delta \frac{dz}{dx} = \Delta m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\Delta x \mapsto 0 : F \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{dm}{dx} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad \partial \triangleq \text{partielle Ableitung}$$

$$\text{Mit } \frac{dm}{dx} = \mu \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}} \right] \text{ (lineare Massendichte)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung.

### Lösung:

Hier wird folgender Ansatz verwendet:

$$z(x, t) = z_0 \sin(kx + \delta) \cos(\omega t + \phi)$$

Damit ist:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = k \cdot z_0 \cos(kx + \delta) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -k^2 \cdot z_0 \sin(kx + \delta) \cdot \cos(\omega t + \phi) = -k^2 z(x, t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\omega z_0 \sin(kx + \delta) \sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z_0 \sin(kx + \delta) \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 z(x, t)$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung erhält man:

$$-k^2 z(x, t) = -\frac{\mu}{F} \omega^2 z(x, t)$$

Somit folgt:

$$\omega = k \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

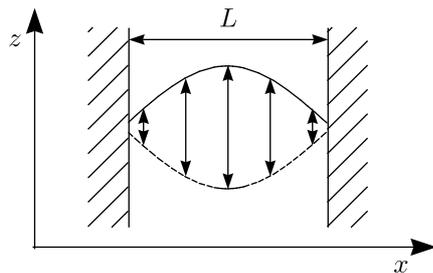
- \* Hier bekommen wir einen Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge.
- \* Je größer die Saitenspannung ist, desto größer ist  $\omega$ .
- \* Je größer die Saitenmasse (Massendichte) , desto kleiner ist  $\omega$ .

**Allgemeine Wellengleichung:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

2.) Stehende Wellen:

Jeder Punkt oszilliert um die  $x$ -Achse mit gleicher Frequenz.



$$z(x, t) = \underbrace{f(x)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{g(t)}_{\text{Zeitabhängigkeit}}$$

**Sonderfall: Harmonischer Oszillator**

$$f(x) = z_0 \sin(k \cdot x + \delta)$$

$$f(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

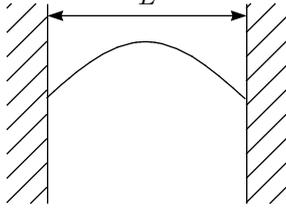
$$\omega \hat{=} \text{Frequenz der Oszillation: } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$k \hat{=} \text{Wellenzahl: } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

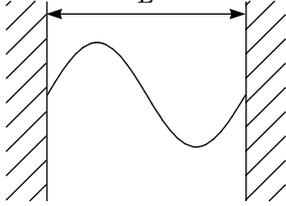
$$\lambda \hat{=} \text{Wellenlänge.}$$

**Schwingungsmoden:**

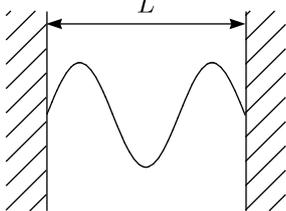
\*  $n = 1 : \lambda = 2 \cdot L$



\*  $n = 2 : \lambda = L$



\*  $n = 3 : \lambda = \frac{2}{3}L$



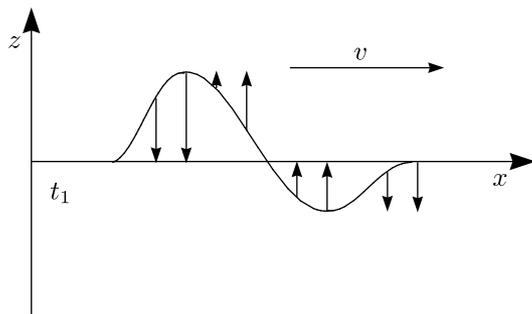
$$\lambda_n = \frac{2}{n} \cdot L$$

**Höhere Moden:**

$$\lambda_n = \frac{2}{n}L, \text{ daher: } \omega_n = \frac{n \cdot \pi}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

3.) Laufende Wellen:

Wellenform bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  und transportiert Energie, auch wenn die oszillierenden Körper am selben Ort bleiben.



$$z(x, t) = f(x - v \cdot t)$$

Jede laufende Welle wird durch  $f(x - vt)$  beschrieben.

**Behauptung:**

Jede Funktion  $f(\overbrace{k(x - vt)}^u)$  genügt der Wellengleichung.

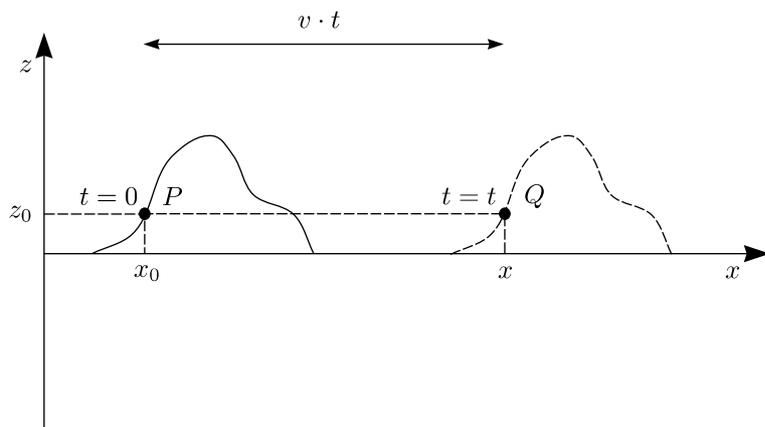
**Beweis:**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = +k^2 \frac{d^2 f}{du^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 v^2 \frac{d^2 f}{du^2} = v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$u = kx - kv t$  und Kettenregel:

$$\frac{\partial f(u(x))}{\partial x} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

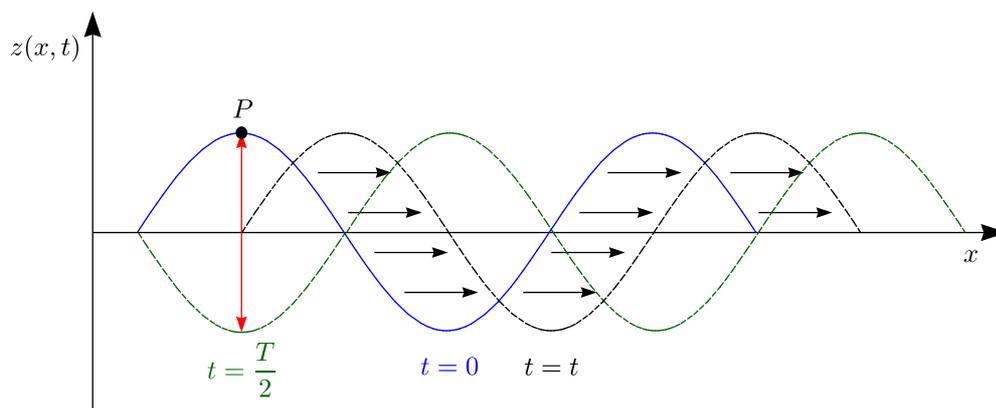


$$z(x, t) = z(x_0, 0) = z_0 = f(x_0) = f(x - vt)$$

**Spezieller Fall: Harmonische laufende Welle:**

**Ansatz:**

$$z(x, t) = z_0 \sin k(x - vt) = z_0 \sin(kx - k \cdot vt) = z_0 \sin(kx - \omega t), \text{ da } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = k \cdot v$$



$P$  oszilliert mit der Frequenz  $\omega$ . Damit ist folgender Ansatz sinnvoll:

$$z(x, t) = z_0 \sin(kx - \omega t)$$

Durch Einsetzen in die Wellengleichung kann man den Ansatz verifizieren.

**Zusammenfassung zu Wellen:**

Laufende Wellen: Form, die sich mit Geschwindigkeit  $v$  fortbewegt

Eindimensional:

$$A(x, t) = A_0 f(kx - \omega t) = A_0 f(k(x - v \cdot t)), v \hat{=} \text{Phasengeschwindigkeit.}$$

Zweidimensional, Dreidimensional:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \cdot f(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

Stehende Wellen: Form, bei der Knoten und Bäuche an gleicher Stelle bleiben

Eindimensional:

$$A(x, t) = A_0 f(x)g(t)$$

Zweidimensional, Dreidimensional:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 f(\vec{r})g(t)$$

$\vec{A}(\vec{r}, t)$  genügt der Wellengleichung:

\* Eindimensional:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

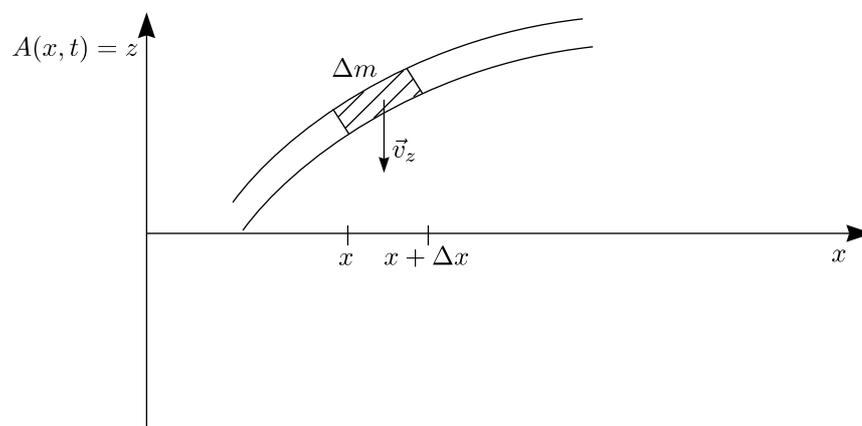
\* Zweidimensional, Dreidimensional:

$$\Delta \vec{A} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \text{ mit } \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$\Delta$  bezeichnet man als Laplace-Operator.

4.) Energie und Intensität von Wellen:

Herleitung mit Hilfe der Saite:

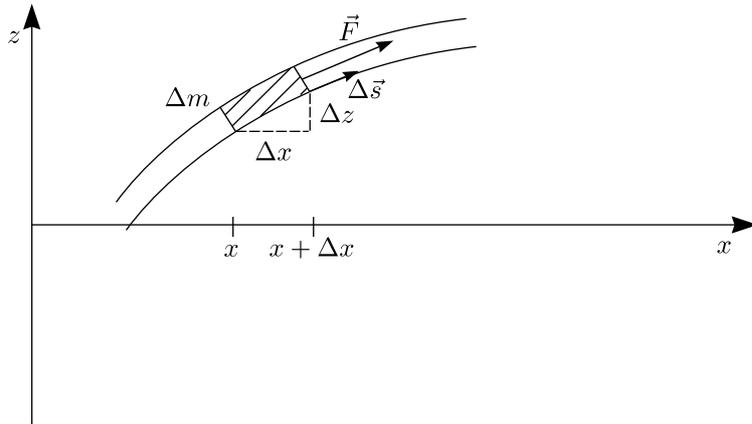


Für die kinetische Energie erhält man:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta m v_z^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \Delta x \cdot \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2$$

$$\frac{dE_k}{dx} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2$$

Für die potentielle Energie folgt:



Mit  $(1 + \alpha)^n \approx 1 + n \cdot \alpha$  für  $\alpha \ll 1$  resultiert:

$$dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{s} \approx F \underbrace{\left(\sqrt{dx^2 + dz^2} - dx\right)}_{|d\vec{s}|} = F \cdot dx \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} - 1\right) \approx F \cdot dx \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

Damit folgt:

$$\frac{dE_p}{dx} = \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

**Gesamtenergie des Massenelementes am Ort  $x$ :**

$$\frac{dE}{dx} = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

**Beispiel: Laufende harmonische Welle:**

$$z(x, t) = z_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 z_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + \frac{1}{2}F \cdot k^2 \cdot z_0^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t)$$

Da  $\mu\omega^2 = F \cdot k^2$ , gilt:

$$\boxed{\frac{dE}{dx} = \mu \cdot \omega^2 \cdot z_0^2 \cdot \cos^2(kx - \omega t)}$$

⇒ Energie wird transportiert!

$$E \propto (\text{Amplitude})^2$$

$$E \propto \omega^2$$

**Leistung, Intensität:**

$$\langle P \rangle = \frac{\text{mittlere Energiedichte} \cdot \text{Länge des Wellenzuges}}{\text{Zeiteinheit}}$$

$$\langle P \rangle = \left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle \cdot \frac{dx}{dt}$$

Für die Saite haben wir:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \cdot z_0^2 \cdot v$$

$$I = \frac{\langle P \rangle}{\text{Fläche}}$$

### 6.1.3 Anwendung: Akustik, Schallwellen

Schall ist eine longitudinale Druckwelle in einem Medium:

- \* Gas
- \* Flüssigkeit
- \* Festkörper

#### Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$v (\equiv c) = \sqrt{\frac{\text{Rückstellkraft (Kraftfaktor)}}{\text{Trägheitsfaktor}}}$$

Bei einer Saite gilt:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

In verschiedenen Medien berechnet sich die Schallgeschwindigkeit jeweils anders:

- \* Metallstab:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}$$

$E$  ist das Elastizitätsmodul.

- \* Flüssigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{K}{\varrho}}$$

Bei  $K$  handelt es sich um das Kompressionsmodul.

- \* Gas:

$$v = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \kappa}$$

$p_0 \hat{=}$  mittlerer Druck

$\rho_0 \hat{=}$  mittlere Dichte

$\kappa \approx 1,4$  für reelle Gase,  $\kappa = 1$  für ideale Gase

Betrachten wir folgende Beispiele:

$$v_{\text{Fe}} = 6 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{H}_2\text{O}} = 1485 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\text{H}_2} = 1260 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

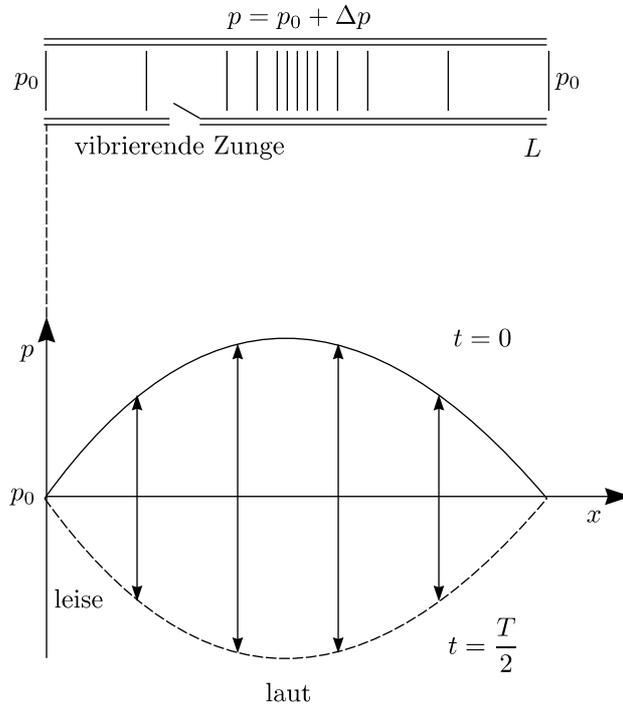
$$v_{\text{Luft}} \left\{ \begin{array}{l} p_0 \approx 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\ \rho_0 \approx 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \end{array} \right\} v = 330 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ bei } 0^\circ\text{C}, v = 344 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ bei } 20^\circ\text{C}$$

**Erläuterung:**

- \* Je höher der Druck  $p_0$ , desto höher ist die Stoßrate der Luftmoleküle und desto größer  $v$ .
- \* Je größer die Dichte  $\rho_0$  ist, desto größer ist die Trägheit des Mediums und desto kleiner  $v$ .

1.) Stehende Schallwellen:

a.) Pfeife, an beiden Enden offen:



\* Für Grundwelle:

$$\lambda_1 = 2L$$

\* Erste Oberwelle:

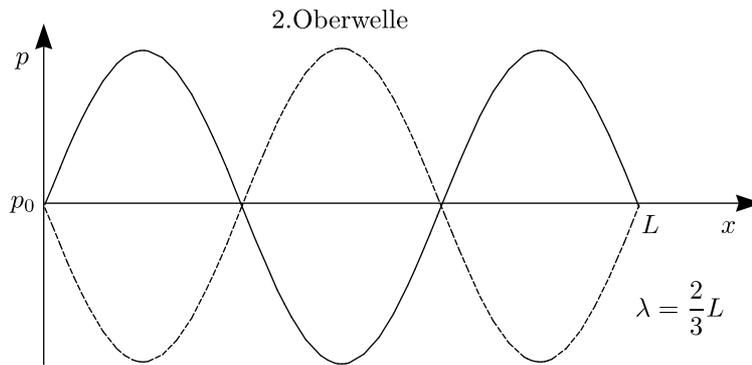
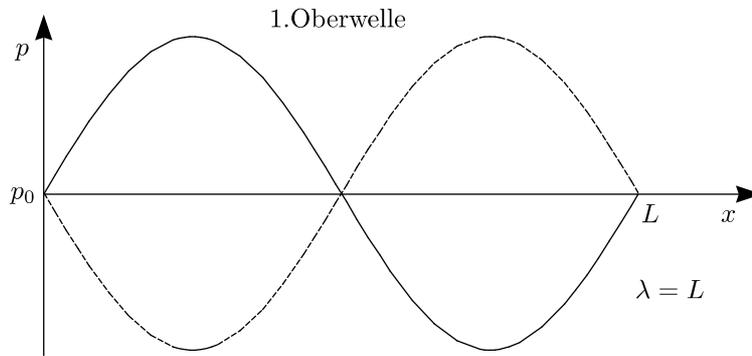
$$\lambda_2 = L$$

⋮

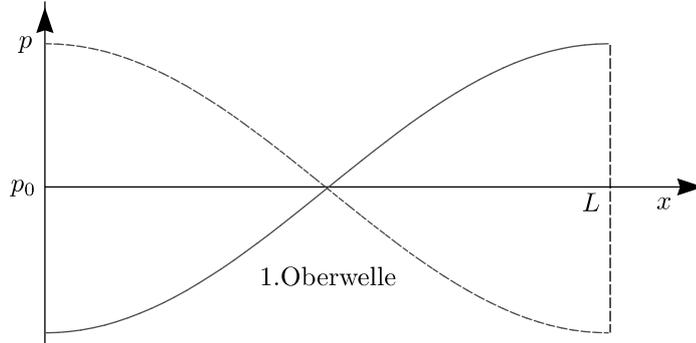
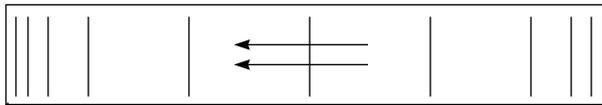
\*  $(n - 1)$ -te Oberwelle:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2L} \cdot v$$



b.) Pfeife, an beiden Enden geschlossen

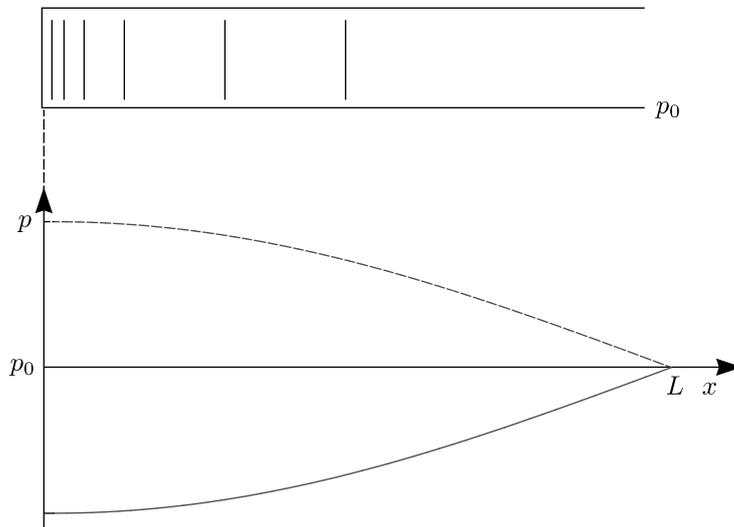


$$\lambda_1 = 2L$$

$\vdots$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \nu_n = \frac{n}{2L}v$$

c.) Eine Ende offen, eins geschlossen



$$\lambda_1 = 4L$$

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}L$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

$$\nu_n = \frac{2n-1}{4L}v$$

**Beispiel:**

Betrachten wir eine Orgelpfeife der Länge 4,4 m:

$$\nu_1 = \frac{344 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4,4 \text{ m}} = 22 \text{ Hz}$$

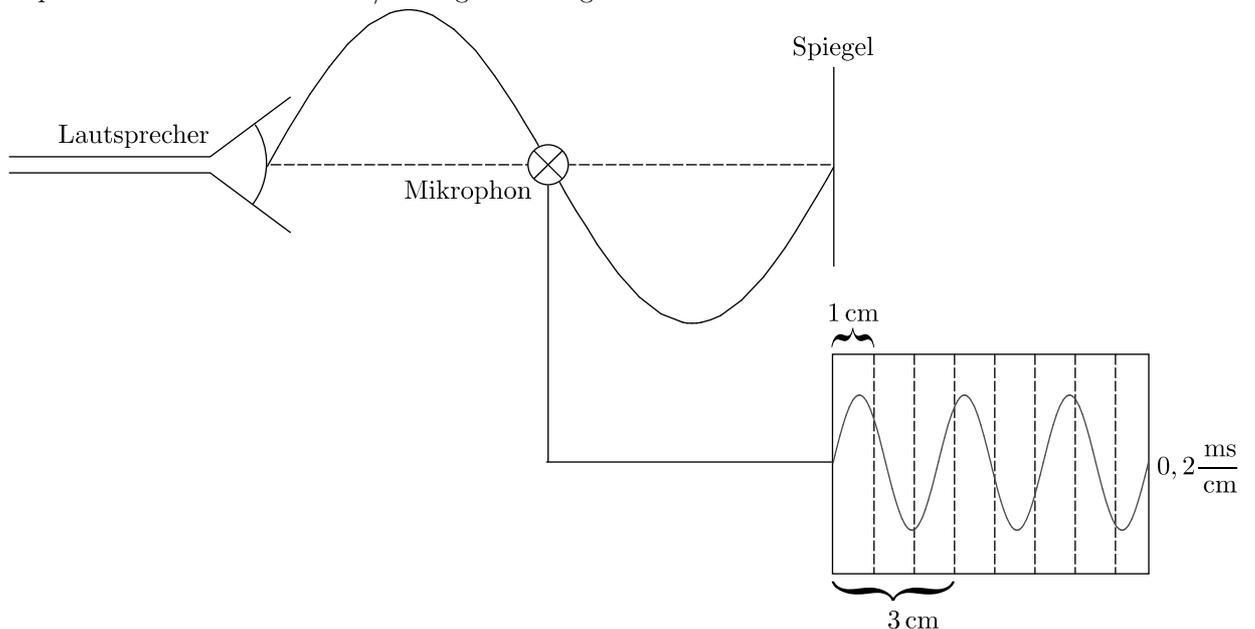
**Demonstrationen:**

a.) Vergleiche Flöte Ende offen/geschlossen:

$$\nu_o = \frac{v}{2L}; \nu_g = \frac{v}{4L} = \frac{1}{2}\nu_o$$

⇒ 1 Oktave

b.) Experiment 1: Stehende Wellen/Schallgeschwindigkeit

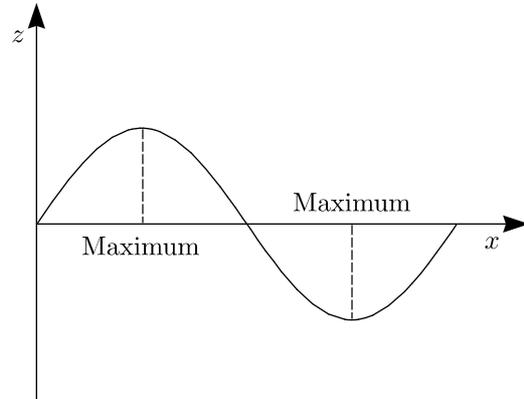


\* Frequenz:

$$\nu = \frac{1}{0,6 \text{ ms}} = 1,8 \text{ kHz}$$

\* Wellenlänge:

Es existieren 2 Lautstärkemaxima zwischen  $\Delta x = 9 - 10 \text{ cm}$ .



Damit gilt:

$$\lambda = 2\Delta x = 18 \text{ cm}$$

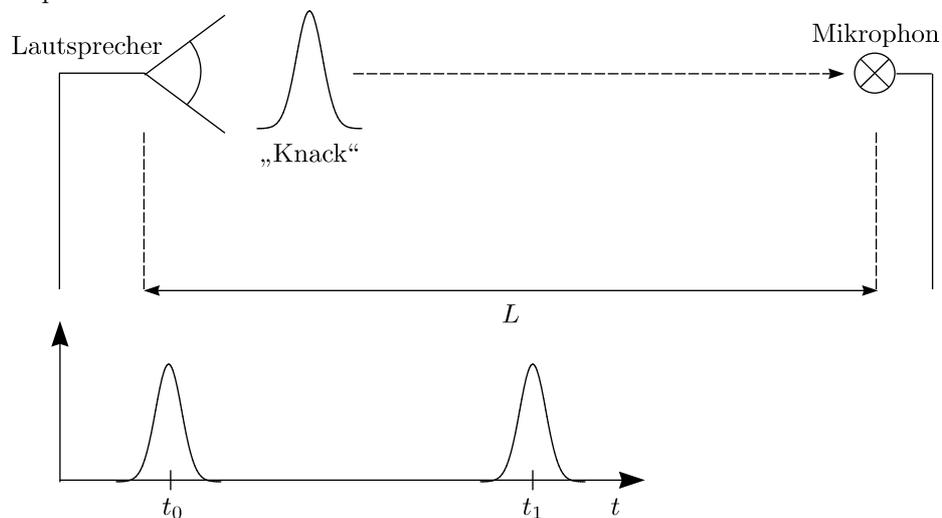
Wir erhalten schließlich:

$$v = \lambda \cdot \nu = 0,18 \text{ m} \cdot 1800 \text{ Hz} = 324 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Mit  $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx 10\%$  und  $\frac{\Delta v}{v} \approx 10\%$  folgt:

$$v = 324 \pm 32 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

c.) Experiment 2:



$$v = \frac{L}{t_1 - t_0} = \frac{9,9 \text{ m}}{0,029 \text{ s}} = 341 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

d.) Schallfrequenz in unterschiedlichen Medien:

In einem Gas: gilt:

$$v = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0} \cdot \kappa}$$

Mit  $\nu = \frac{v}{\lambda}$ , kleinerem  $\rho_0$  und konstantem  $\lambda$  folgt, daß  $\nu$  größer wird.

2.) Hören:

Das Ohr ist ein empfindliches Schallorgan mit logarithmischem Ansprechverhalten.

**Definitionen:**

- \* Ton:  
Rein harmonische Schwingung; Tonhöhe durch  $\nu$  und Tonstärke durch  $P^2$  bestimmt
- \* Klang:  
Überlagerung von harmonischen Schwingungen
- \* Geräusch:  
Unperiodischer Schallimpuls
- \* Knall:  
Kurzer Schallimpuls

Außerdem sind folgende Begriffe für das Hörverhalten wichtig:

- \* Hörschwelle:  
Dabei handelt es sich um die minimal hörbare Schallintensität:

$$I_{min}(\nu = 1 \text{ kHz}) = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

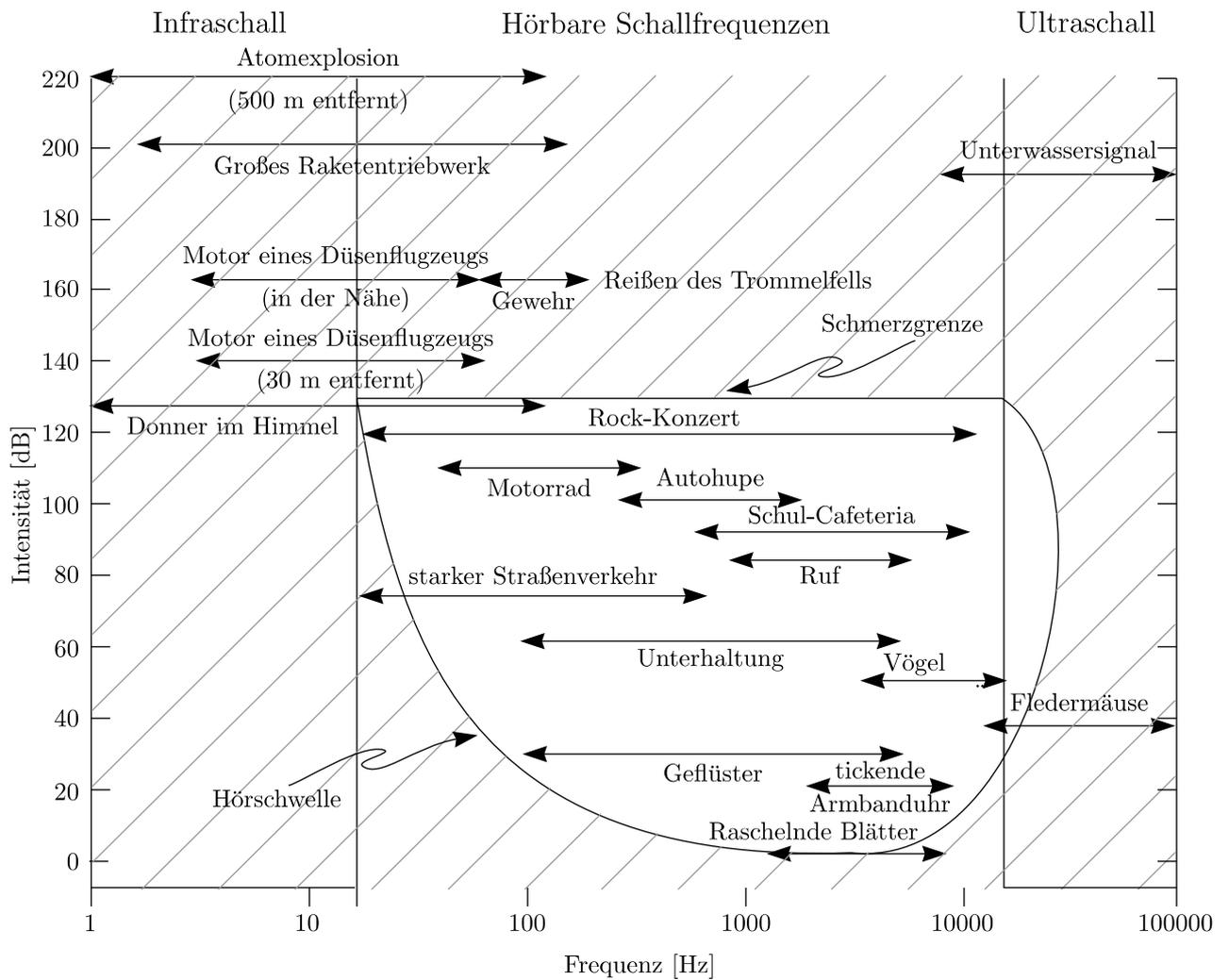
Im Ohr:  $\lesssim 10^{-15} \text{ W}$

- \* Lautstärke:

$$1 \underbrace{\text{dB}}_{\text{Dezibel}} \equiv 10 \cdot \log_{10} \frac{I(\nu)}{I_{min}} \text{ [Phon]}$$

**Beispiele:**

Geräusch	Intensität
leises Flüstern	10 Phon
lautes Reden	50 Phon
Preßlufthammer	100-130 Phon
Diskotheke	100-130 Phon
startendes Düsenflugzeug	120-160 Phon

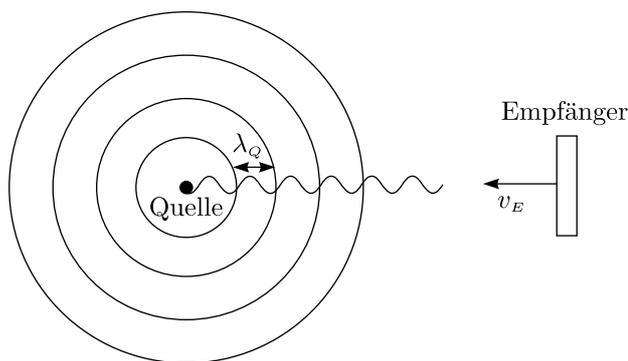


### 6.1.4 Wellen von bewegten Quellen/Empfängern (Doppler-Effekt)

#### Experiment: Dopplereffekt

registrierte Frequenz  $f_E \neq$  emittierte Frequenz  $f_Q$

a.) Die Quelle ruht und der Empfänger bewegt sich.

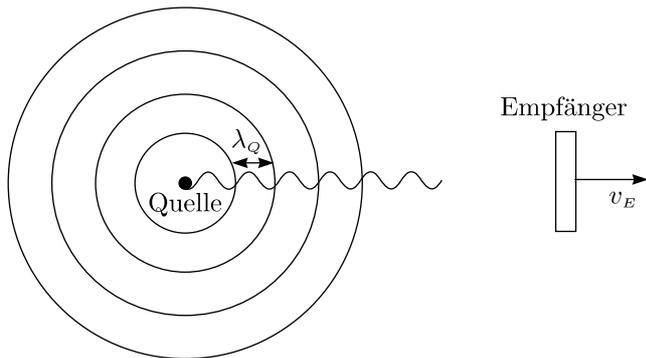


$$T_E = \frac{\lambda_Q}{c + v_E}$$

$$f_E = \frac{1}{T_E} = \frac{c + v_E}{\lambda_Q} \text{ wird größer}$$

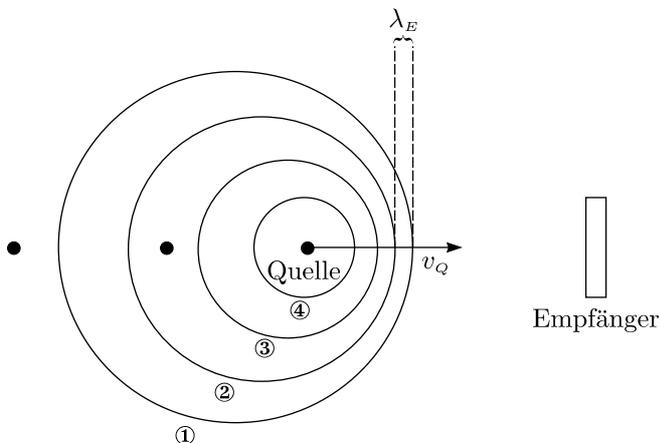
$$f_E = \frac{c \cdot \left(1 + \frac{v_E}{c}\right)}{\lambda_Q}$$

$$f_E = f_Q \left( 1 + \frac{v_E}{c} \right)$$



$$f_E = f_Q \left( 1 - \frac{v_E}{c} \right)$$

b.) Quelle bewegt sich und Empfänger ruht.



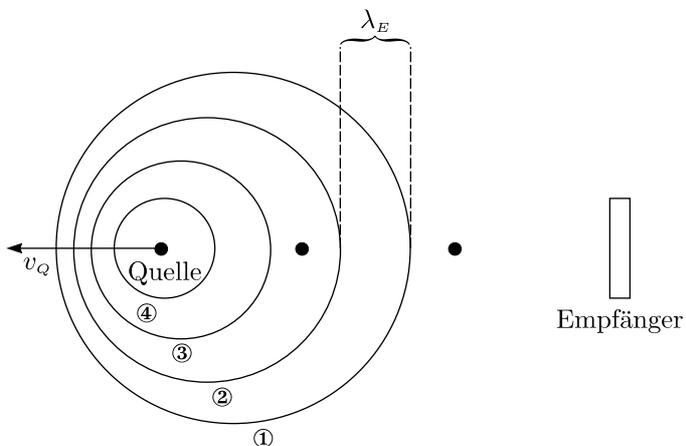
$$c = \lambda_Q \cdot f_Q$$

$$T_Q = \frac{\lambda_Q}{c}$$

$$\lambda_E = \lambda_Q - v_Q T_Q$$

$$f_E = \frac{c}{\lambda_E} = \frac{c}{\lambda_Q - v_Q T_Q} = \frac{\lambda_Q \cdot f_Q}{\lambda_Q - v_Q \frac{\lambda_Q}{c}}$$

$$f_E = f_Q \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c}}$$



$$f_E = f_Q \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}}$$

c.) Quelle und Empfänger bewegen sich.

1. Quelle und Empfänger bewegen sich aufeinander zu.

$$f_E = f_Q \cdot \frac{c + v_E}{c - v_Q}$$

2. Quelle und Empfänger bewegen sich voneinander weg.

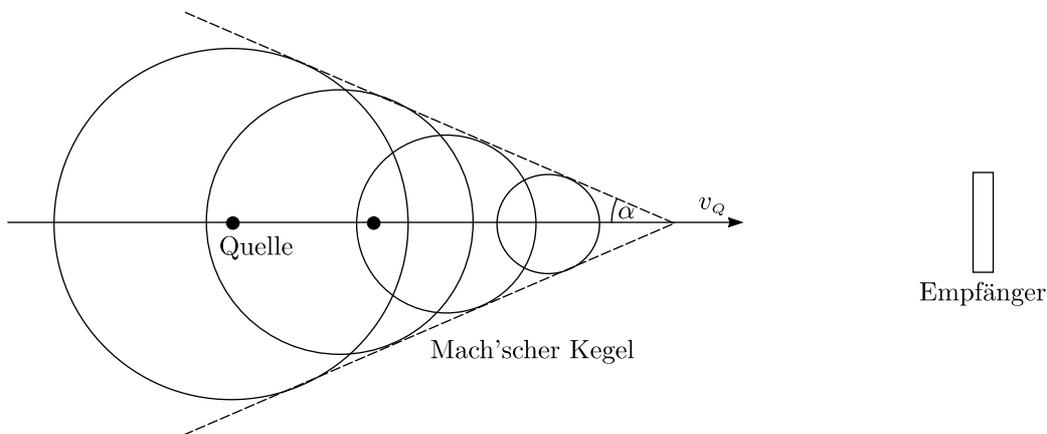
$$f_E = f_Q \cdot \frac{c - v_E}{c + v_Q}$$

3. Quelle und Empfänger bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in die gleiche Richtung.

$$f_E = f_Q \cdot \frac{c + v_E}{c + v_Q}$$

**Nebenbemerkung:**

$$v_Q > c$$



$$\frac{c \cdot t}{v_Q \cdot t} = \frac{c}{v_Q} = \sin \alpha = [\text{Ma}] \quad [\text{Mach}]$$

**Für elektromagnetische Wellen:**

$$f_E = f_Q \cdot \sqrt{\frac{c - v}{c + v}}$$

$v \hat{=}$  relative Geschwindigkeit

**6.1.5 Überlagerung von Wellen**

- 1.) Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz:

Ungestörte Superposition  $\Rightarrow$  additive Überlagerung/Interferenz

**Beispiel: 2 eindimensionale Wellen**

$$z_1(x, t) = z_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$z_2(x, t) = x_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

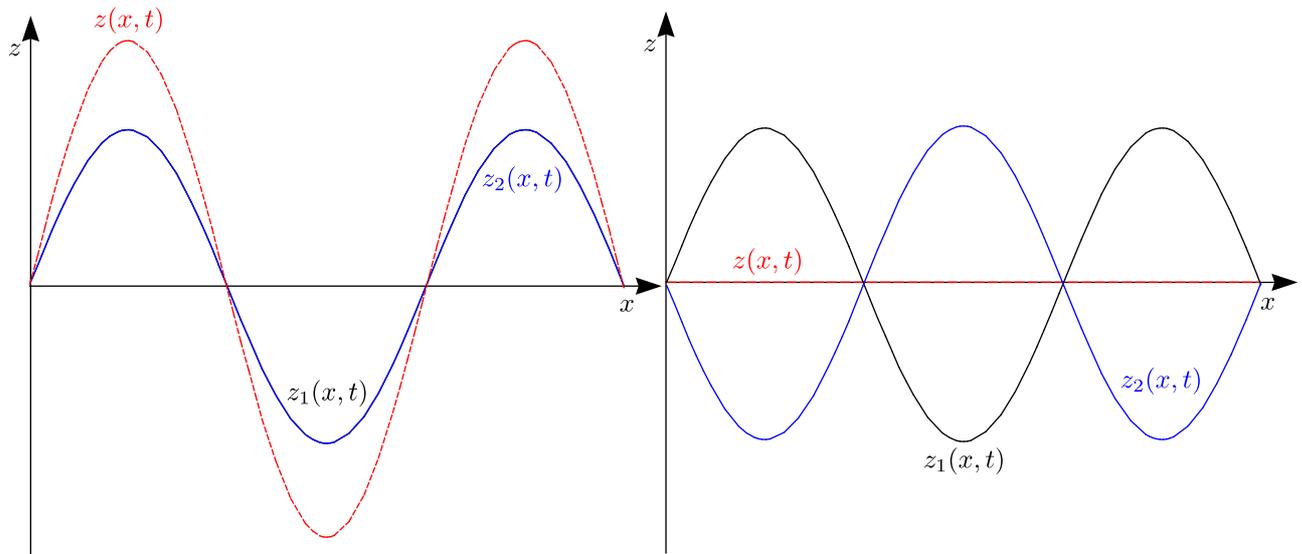
$$\Rightarrow z(x, t) = z_1(x, t) + z_2(x, t) = x_0 (\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t - kx + \varphi))$$

Es gilt das Additionstheorem:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} z(x, t) &= 2z_0 \cdot \cos \left( \frac{\omega t - kx + \omega t - kx + \varphi}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega t - kx - \omega t + kx - \varphi}{2} \right) = \\ &= \underbrace{2z_0 \cos \left( -\frac{\varphi}{2} \right)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{\cos \left( \omega t - kx + \frac{\varphi}{2} \right)}_{\text{laufende Welle}} \end{aligned}$$

## 2 Spezialfälle:



$\varphi = 0$ , Amplitude =  $2z_0$

### Konstruktive Interferenz

$\varphi = k \cdot 2\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Delta = m \cdot \lambda \quad m \in \mathbb{Z}$

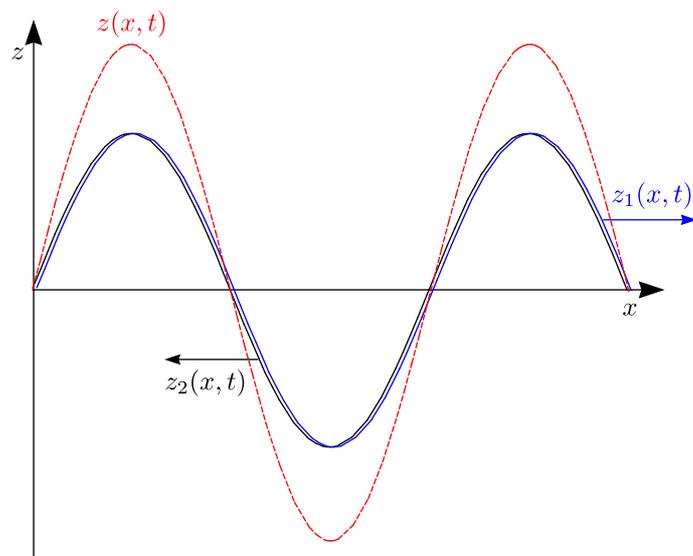
$\varphi = \pi$ , Amplitude = 0

### Destruktive Interferenz

$\varphi = (2k + 1) \cdot \pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Delta = (2m + 1) \cdot \lambda \quad m \in \mathbb{Z}$

**Beispiel: stehende Wellen**



$$z_1(x, t) = z_0 \cos(\omega t - kx)$$

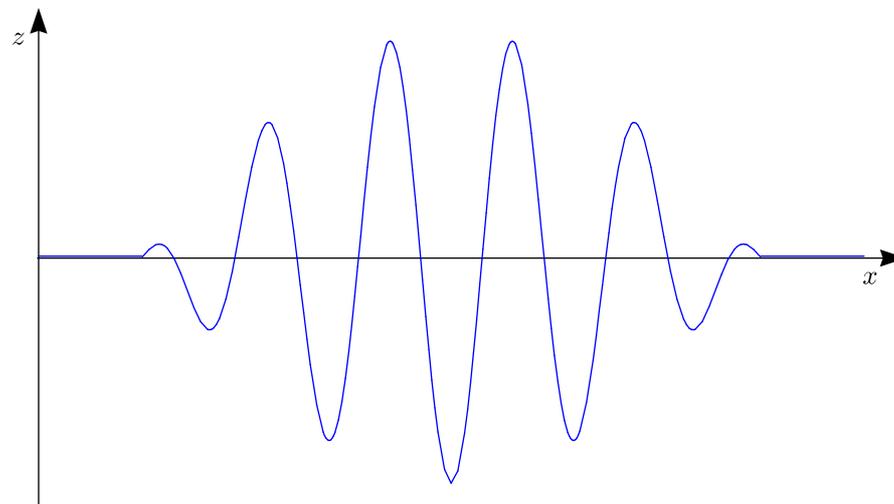
$$z_2(x, t) = x_0 \cos(\omega t + kx)$$

$$z(x, t) = 2z_0 \cos(\omega t) \cos(-kx)$$

Hierbei handelt es sich also um eine stehende Welle.

2.) Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenz:

Reale physikalische Welt kennt Wellenzüge.



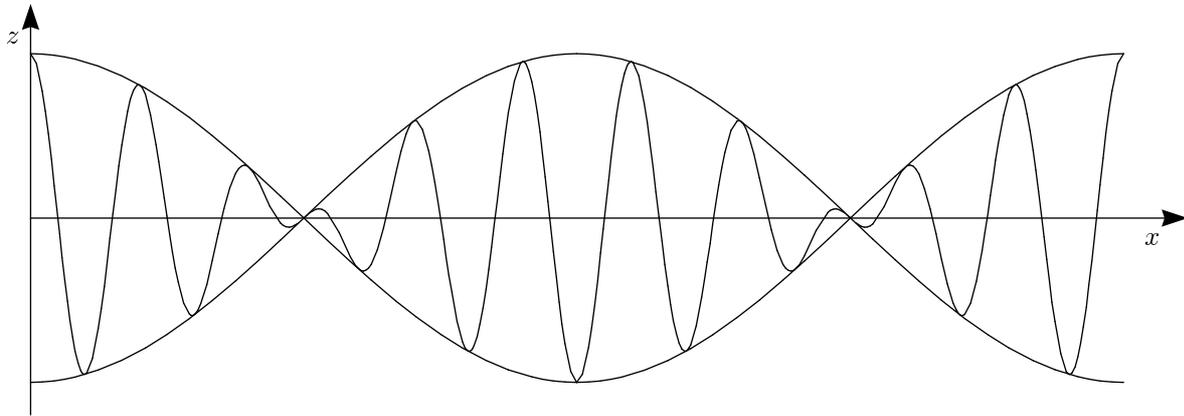
Simulieren wir durch den Schwebzustand von zwei eindimensionalen Wellen:

$$z_1(x, t) = z_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$z_2(x, t) = z_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

$$\begin{aligned} z(x, t) &= z_1(x, t) + z_2(x, t) = 2z_0 \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 x) + (\omega_2 t - k_2 x)}{2} \cos \frac{(\omega_1 t - k_1 x) - (\omega_2 t - k_2 x)}{2} = \\ &= 2z_0 \cos \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x \right) \cdot \cos \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x \right) \end{aligned}$$

$$z(x, t) = \underbrace{2z_0 \cos(\omega t - kx)}_{\text{laufende Welle (hohe Frequenz)}} \cdot \underbrace{\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)}_{\text{Modulation (niedrige Frequenz)}}$$



Experiment: Stimmgabel

**Superpositionsprinzip:**

Wenn  $z_1(x, t)$  und  $z_2(x, t)$  Wellenfunktionen sind, dann auch die Summe bzw. die Differenz  $z_1(x, t) \pm z_2(x, t)$ , oder das Produkt mit einem konstanten Koeffizienten  $a \cdot z_1(x, t)$ .

**Grund:**

Wie Wellengleichung ist linear in  $z(x, t)$ .

**Beispiel: 2 laufende eindimensionale harmonische Wellen:**

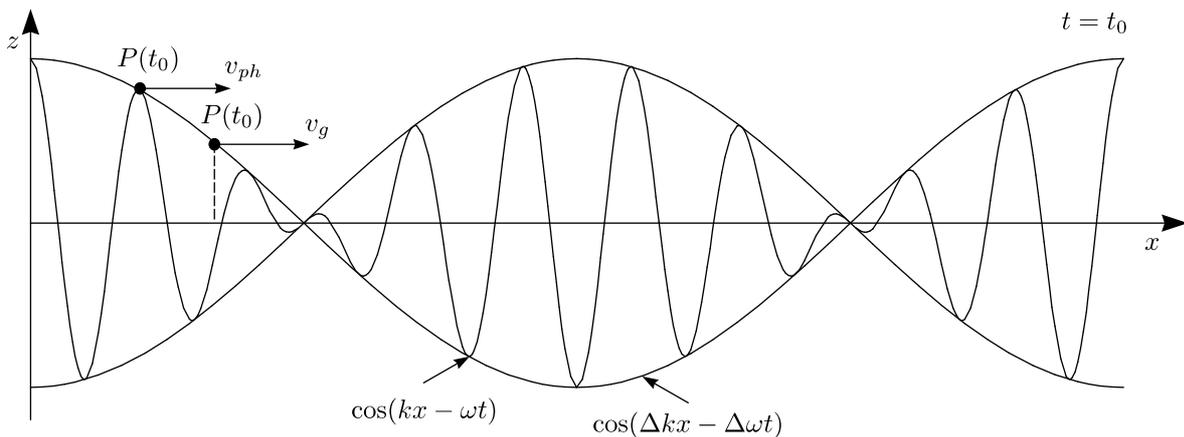
$$z_1(x, t) = z_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

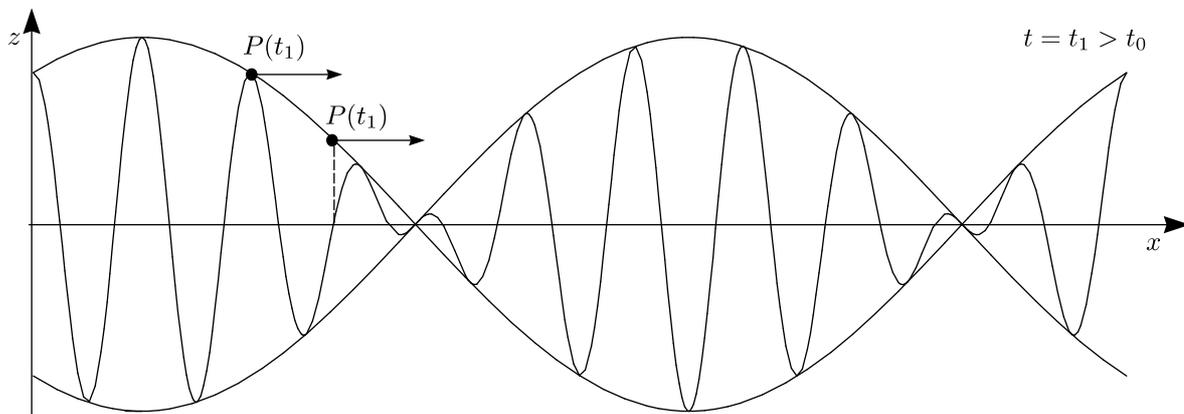
$$z_2(x, t) = z_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Wir addieren die beiden Wellen:

$$z_1 + z_2 \equiv z(x, t) = 2z_0 \cos(kx - \omega t) \cdot \cos(\Delta kx - \Delta \omega t), \text{ wobei gilt:}$$

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \Delta \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$





\* Im Punkt P:

$$kx - \omega t = \text{const.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \left\{ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \right\} \equiv v_{Ph} \text{ (Phasengeschwindigkeit)}$$

\* Im Punkt P:

$$\Delta kx - \Delta \omega t = \text{const.}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \left\{ = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \right\} \equiv v_{Gr} \text{ (Gruppengeschwindigkeit)}$$

Falls sich die Welle in einem Medium ausbreitet, kann die Frequenz abhängig von der Wellenzahl (d.h. Wellenlänge) sein.

$$\omega = \omega(k) \{ = \omega(\lambda) \}$$

Dies ist sogenannte Dispersionsrelation.

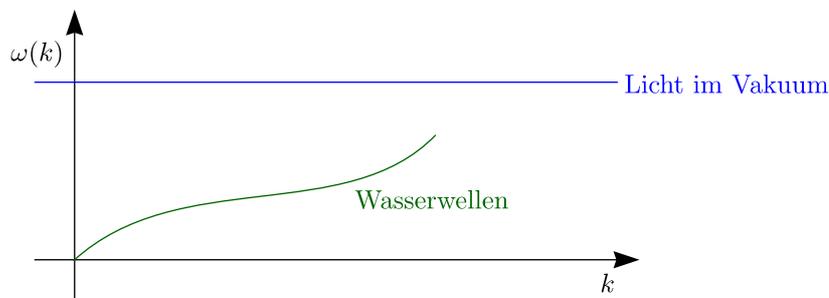
Mit  $\omega = v_{Ph} \cdot k$  folgt:

$$v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (v_{Ph} \cdot k) = v_{Ph} + k \cdot \frac{dv_{Ph}}{dk}$$

Mit  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  ergibt sich  $\frac{dk}{d\lambda} = -\frac{2\pi}{\lambda^2}$  und daraus folgt wiederum:

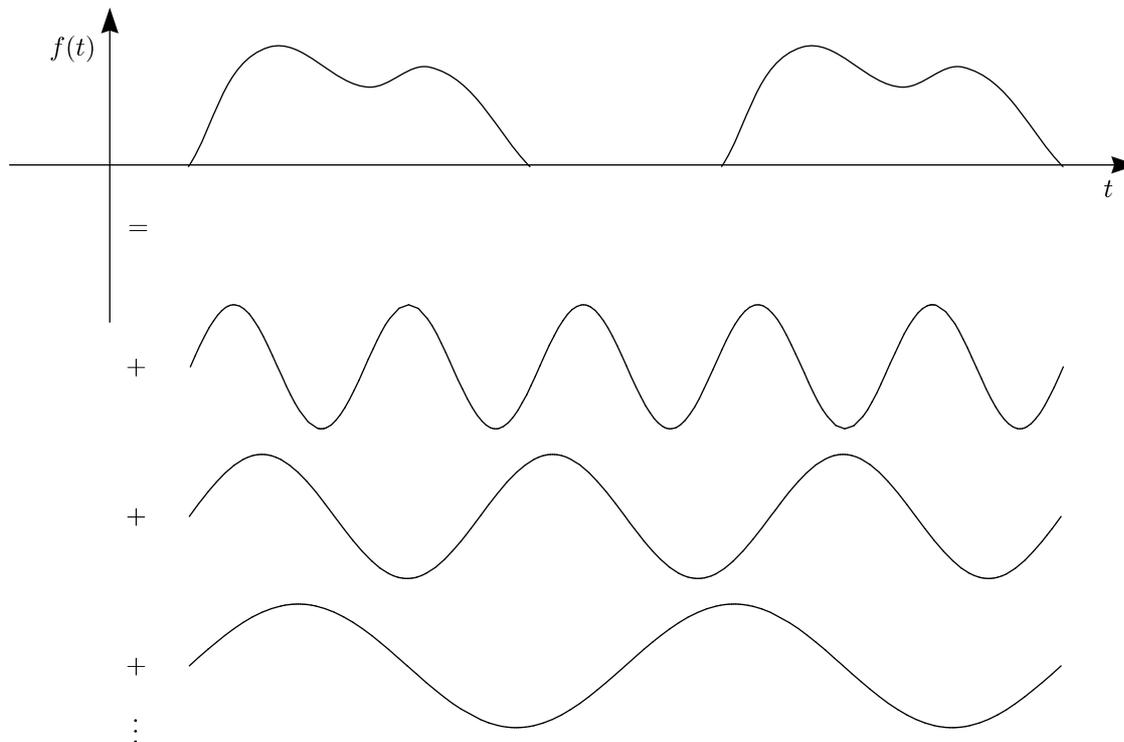
$$v_{Gr} = v_{Ph} + \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dv_{Ph}}{d\lambda} \left( -\frac{\lambda^2}{2\pi} \right) = v_{Ph} - \lambda \frac{dv_{Ph}}{d\lambda} \leq v_{Ph}$$

Beispiel:



3.) Pulsformen:

Jede periodisch wiederkehrende Funktion kann durch Superposition von harmonischen Wellen beschrieben werden:



Durch Entwicklung in eine Fourierreihe folgt:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

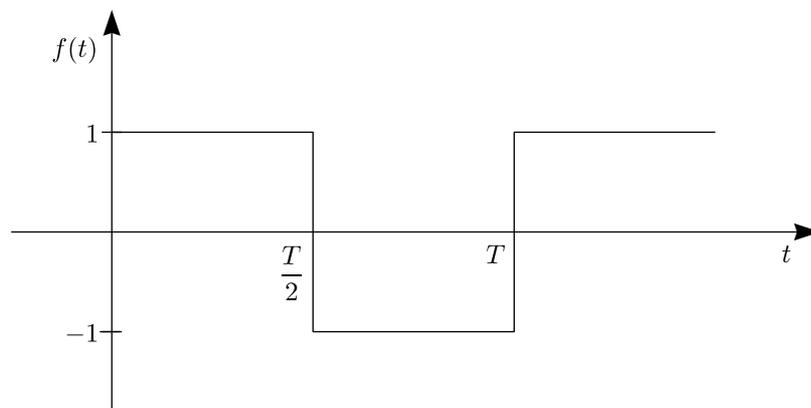
Komponenten der Fourierreihe:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$$

(Fouriertransformation)

Beispiel: Rechteckfunktion



$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } t = 0 \dots \frac{T}{2} \\ -1 & \text{für } t = \frac{T}{2} \dots T \end{cases}$$

i.) 1.Fourierkoeffizient

Mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  folgt:

$$a_n = \frac{2}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \cos(n\omega t) dt \right) = \frac{2}{T} \frac{1}{n\omega} \left( [\sin n\omega t]_0^{\frac{T}{2}} - [\sin n\omega t]_{\frac{T}{2}}^T \right) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} (\sin n\pi - \sin 0 - \sin n \cdot 2\pi + \sin n\pi) = 0 \text{ für alle } n$$

ii.) 2.Fourierkoeffizient

$$b_n = \frac{2}{T} \left( \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega t) dt - \int_{\frac{T}{2}}^T \sin(n\omega t) dt \right) = \frac{1}{n\pi} (-\cos n\pi + \cos 0 + \cos n \cdot 2\pi - \cos n\pi) =$$

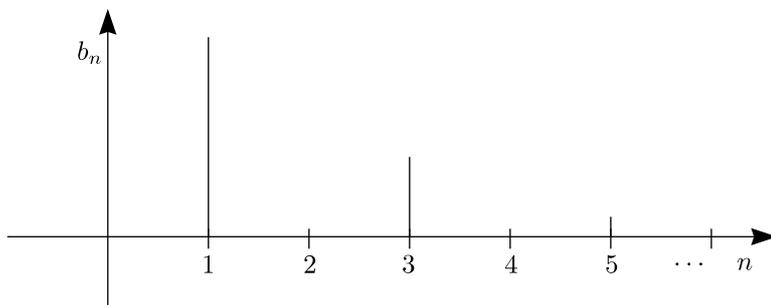
$$= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

$$\cos n\pi = \begin{cases} +1 & \text{für } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Damit folgt:

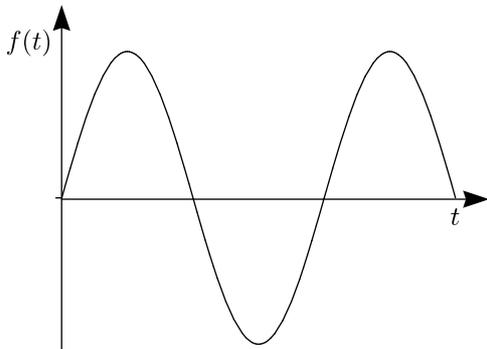
$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{4}{n \cdot \pi} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \text{ (= Rechtecksfunktion)}$$

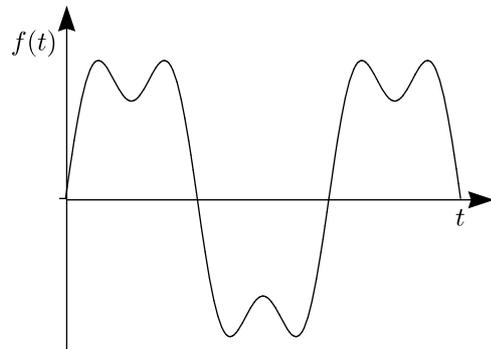


Die Funktion lautet also:

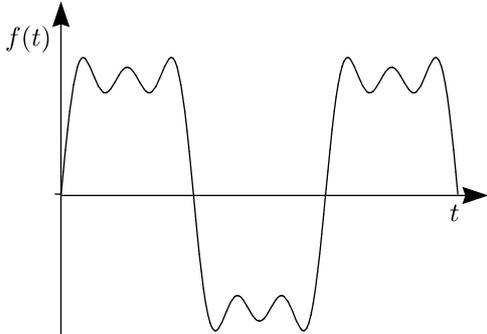
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)t)$$



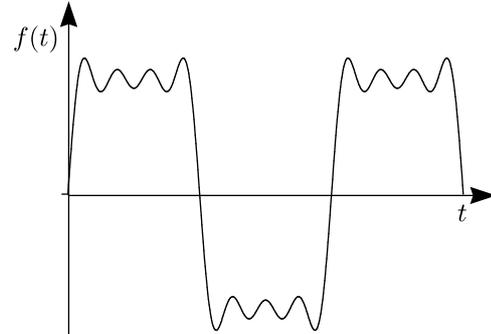
$k = 0$



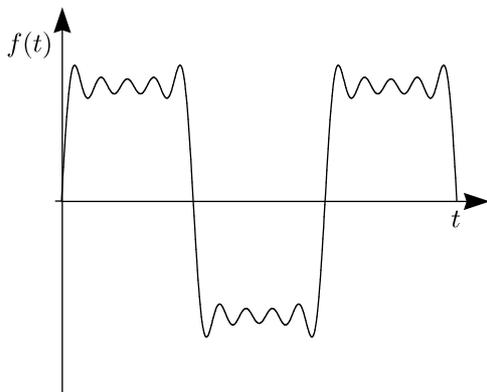
$k = 1$



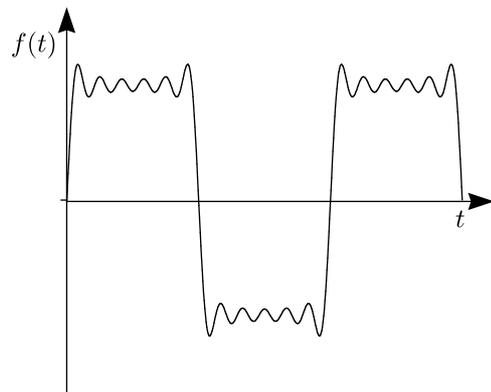
$k = 2$



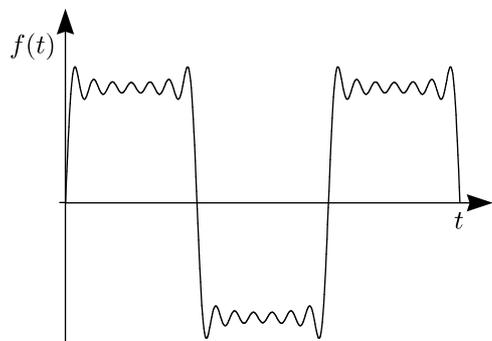
$k = 3$



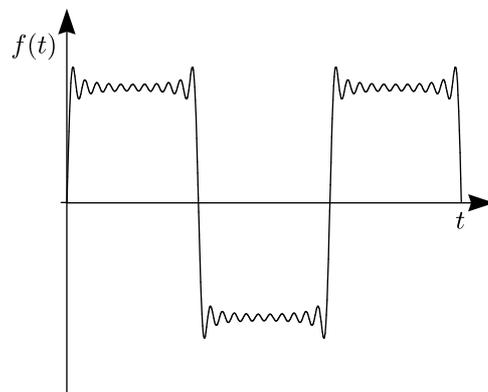
$k = 4$



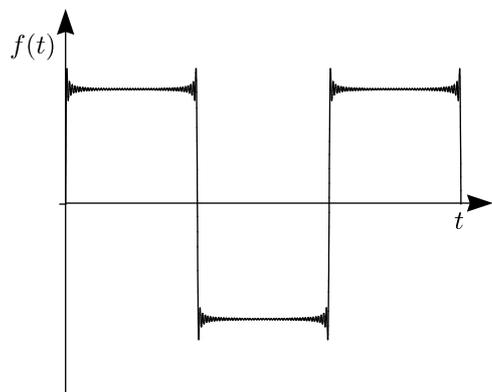
$k = 5$



$k = 6$



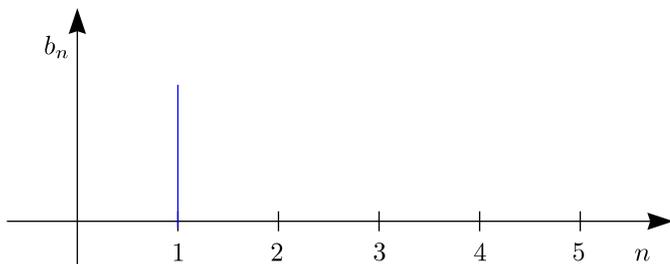
$k =$



$k = 48$

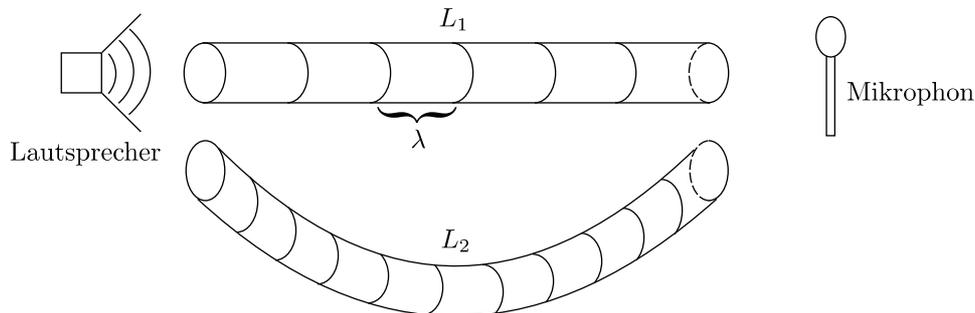
**Beispiel:**

Betrachten wir die Funktion  $f(t) = \sin(\omega t)$ . Damit erhalten wir folgendes Spektrum:



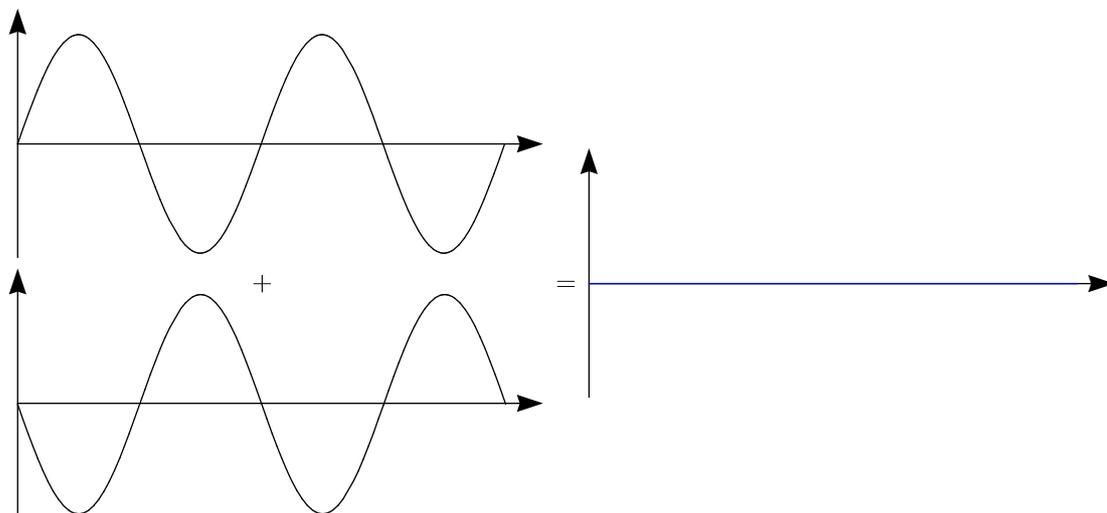
4.) Interferenz von Wellen in 2 und 3 Dimensionen:

a.) Illustration

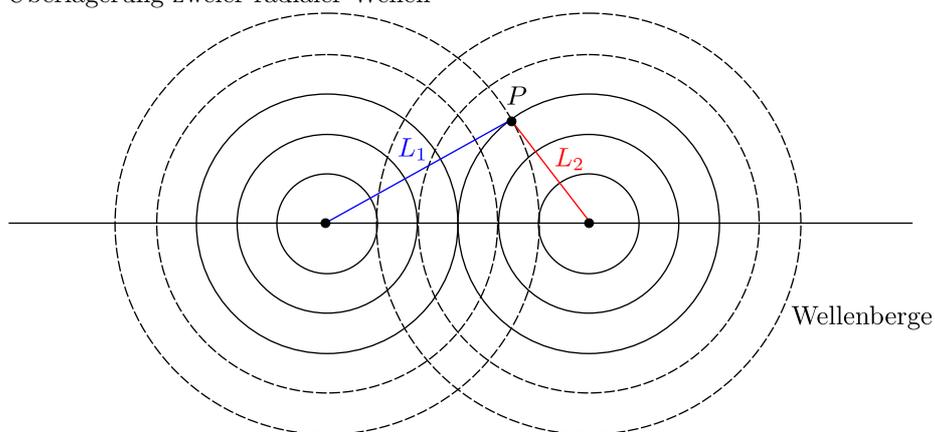


\*  $L_1 = L_2$  beziehungsweise  $L_2 = L_1 + n\lambda$ : Amplituden der Teilwellen addieren sich am Ende  $\hat{=}$  konstruktive Interferenz

\*  $L_2 = L_1 + (n - \frac{1}{2})\lambda$ : Amplituden der Teilwellen löschen sich aus  $\hat{=}$  destruktive Interferenz



b.) Überlagerung zweier radialer Wellen



Am Punkt  $P$ :

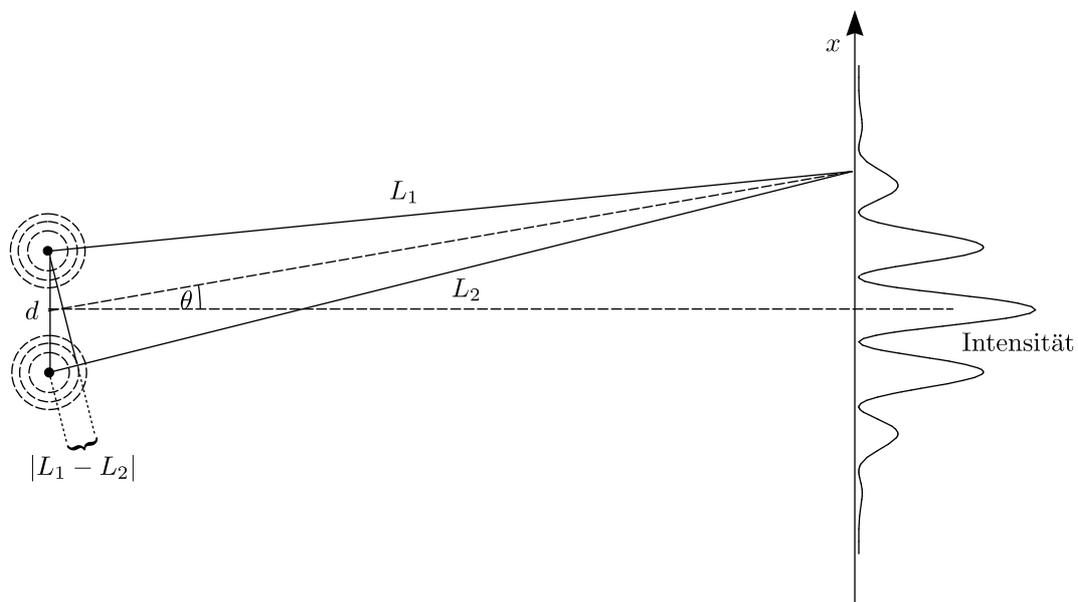
$$L_1 = 6\lambda$$

$$L_2 = 4\lambda$$

$\Rightarrow$  Konstruktive Interferenz

Generell:

An jedem Ort, wo  $\Delta L = |L_1 - L_2| = n \cdot \lambda$ , findet konstruktive Interferenz statt.

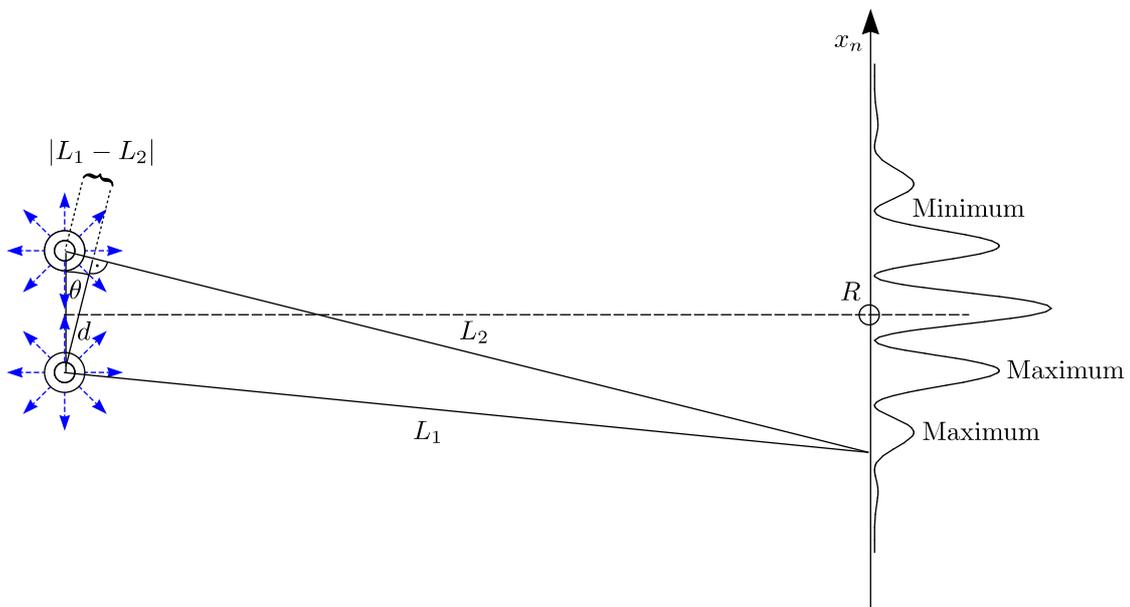
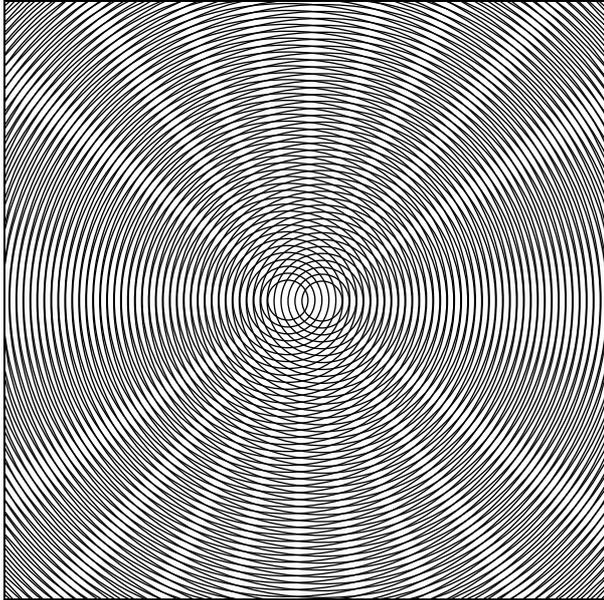


Es findet eine konstruktive Interferenz statt, wenn  $|L_1 - L_2| = n \cdot \lambda = d \cdot \sin \theta_n$ .

$$\sin \theta_n = \frac{n\lambda}{d} \Rightarrow \text{Maxima}$$

$$\sin \theta_n = \frac{(2n - 1)\frac{\lambda}{2}}{d} \Rightarrow \text{Minima}$$

Im Zweidimensionalen (Wasserwellen) sieht ein Interferenzmuster folgendermaßen aus:



\* Konstruktive Interferenz:

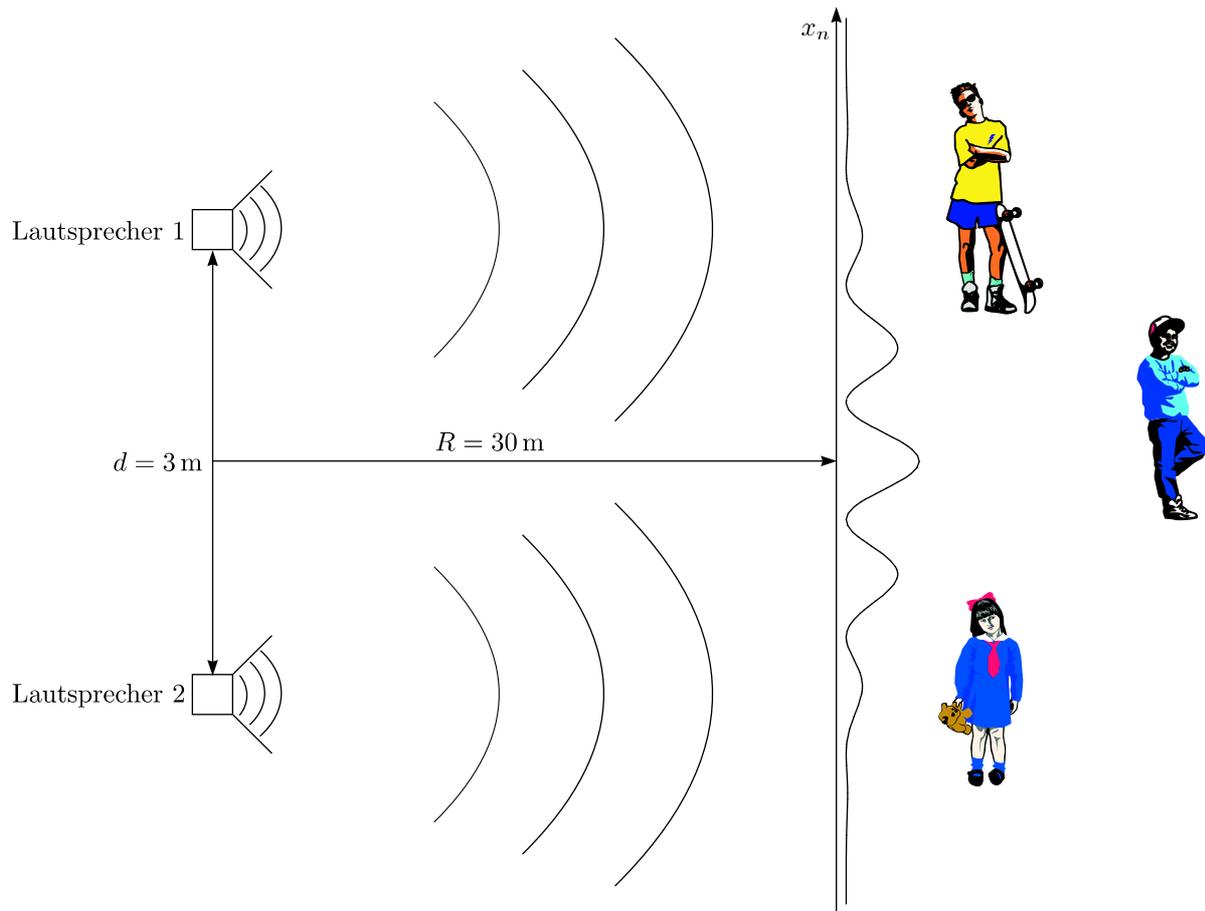
Sie tritt bei folgenden Winkeln auf:

$$\sin \theta_n = \frac{n \cdot \lambda}{d} = |L_2 - L_1|$$

Maxima befinden sich auf einem Schirm bei  $x_n = \pm R \cdot \sin \theta_n = \pm R \cdot \frac{n\lambda}{d}$  für  $n = 0, 1, \dots$

\* Destruktive Interferenz:

Minima treten auf dem Schirm bei  $x_n = \pm R \frac{(n - \frac{1}{2}) \lambda}{d}$  auf.

Beispiel (Rock-Konzert):

Sie hören ein Maximum bei:

$$x_m = \pm \frac{n \cdot 30 \text{ m} \cdot c}{3 \text{ m} \cdot \nu}$$

Betrachten wir folgendes Zahlenbeispiel:

$$\nu = 2 \text{ kHz} : x_m = 0 \text{ m}, \pm 1,72 \text{ m}, \dots$$

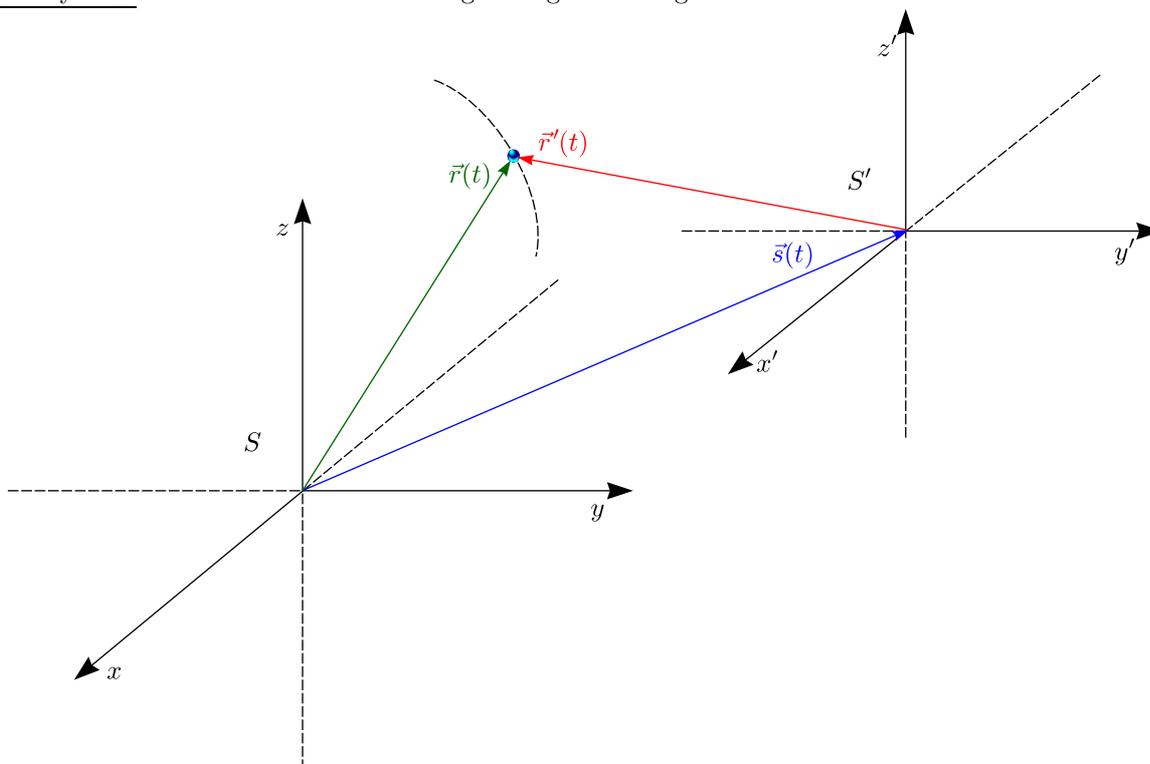


# Kapitel 7

## Relativistische Mechanik

### 7.1 Bewegte Bezugssysteme, Transformationen

Inertialsystem: Beobachter ruht oder bewegt sich gleichförmig

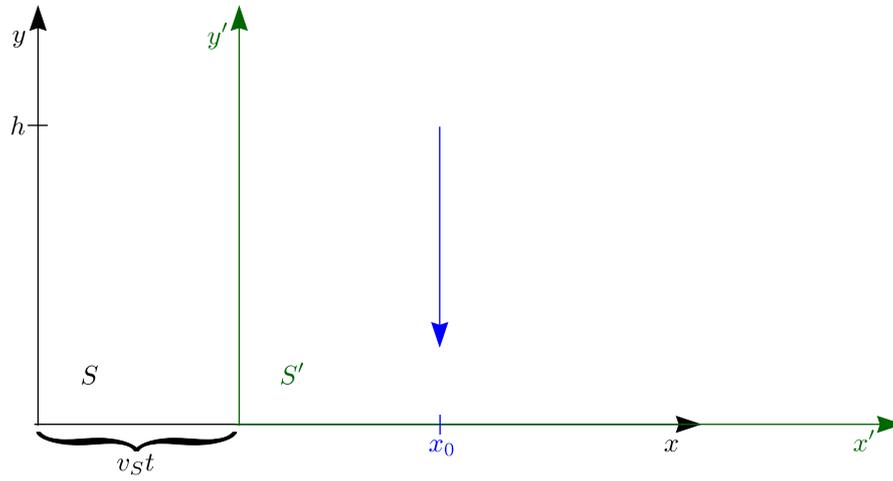


$$\vec{s}(t) = \vec{s}_0 + \vec{v}_S(t)$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{s}(t) = \vec{r}(t) - \vec{s}_0 - \vec{v}_S t$$

⇒ Galilei-Transformation

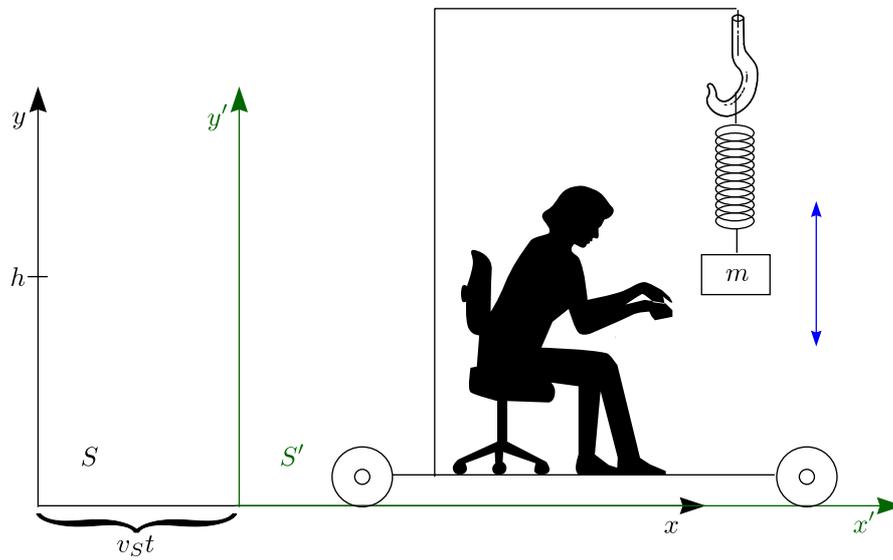
a.) Beispiel:



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x_0 - v_{St}t \\ h - \frac{g}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

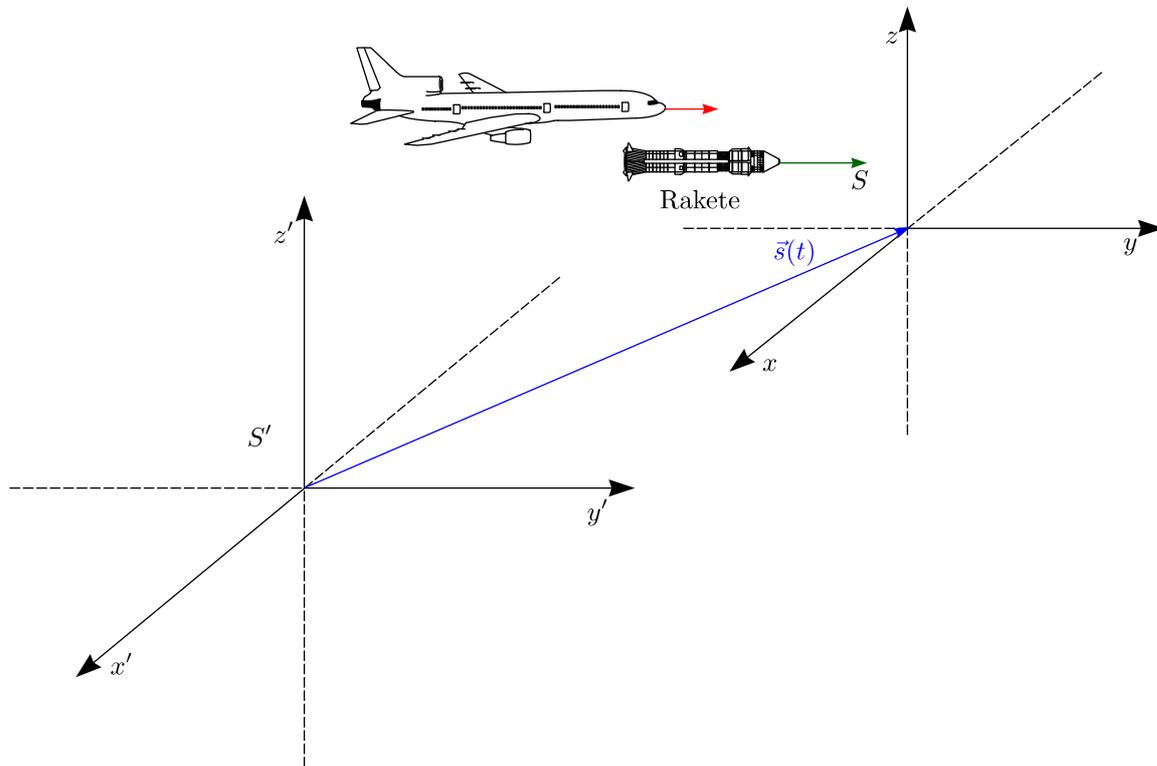
b.) Demo: Studentin mit Federpendel



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} x_0 - vt \\ y_0 \cos \omega t \end{pmatrix}$$

c.) Beispiel: Addition von Geschwindigkeiten



$$\vec{r}'_r(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_r t \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_r(t) = \vec{r}'_r(t) + \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_r t + v_S t + s_{x_0} \\ y_0 + s_{y_0} \end{pmatrix}$$

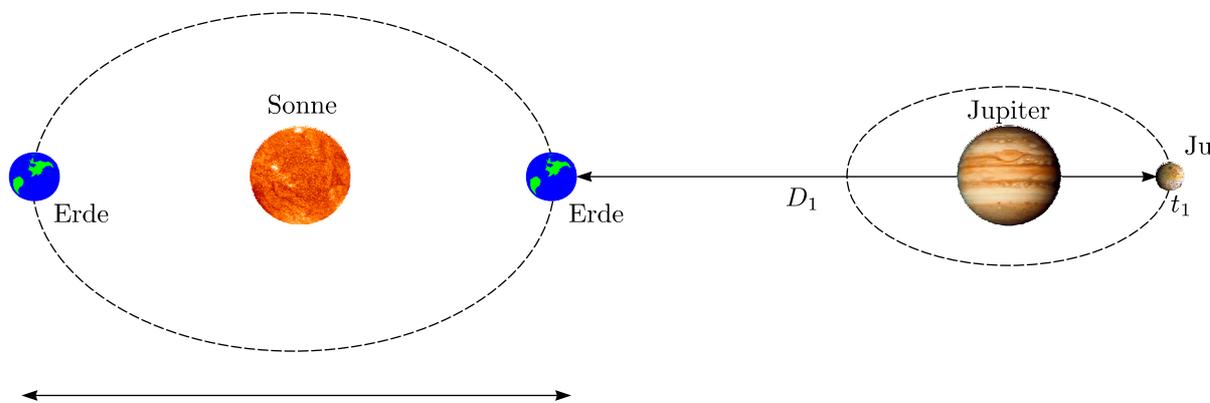
Von  $S'$  aus betrachtet besitzt die Rakete die Geschwindigkeit  $v_r = v'_r + v_S$ . Es stellt sich nun die Frage, welche Geschwindigkeit Laserlicht von Flugzeug aus geschossen hat. Wir erwarten  $v_c = v_S + c > c$ . Dies steht jedoch im Widerspruch zu den Beobachtungen.

## 7.2 Relativistische Kinematik

### 7.2.1 Spezielles Relativitätsprinzip

- ① Alle Inertialsysteme gleichwertig, Naturgesetze haben gleiche Gültigkeit
- ② In jedem Inertialsystem hat die Vakuumlichtgeschwindigkeit den gleichen Wert  $c$ .

### 7.2.2 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit



a.) Olaf Römer 1675:

$$L = 3 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Messung der Umlaufzeit des Mondes Io des Jupiters zum Zeitpunkt des kleinsten Abstandes Jupiter-Erde ergibt  $T=42.5\text{h}$ . Damit kann man ausrechnen wann der nächste Mondfinsternis, d.h. Verdeckung des Io-Mondes hinter dem Jupiter, stattfindet wird bei maximalem Abstand Jupiter-Erde, d.h. ein halbes Jahr

später. (Jupiter bewegt sich kaum in 6 Monaten.) Man beobachtet dass die Mondfinsternis 16,5 Minuten später stattfindet als vorhergesagt, d.h.

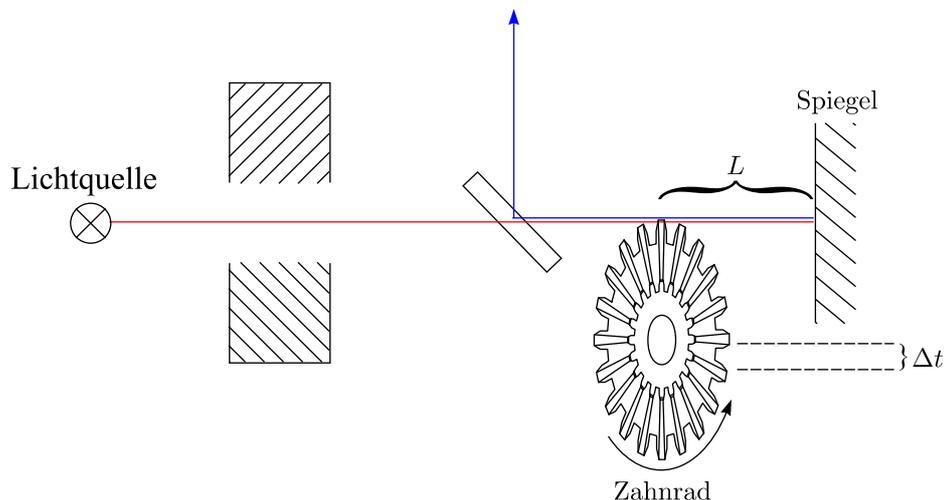
$$t_2 = t_1 + 16,5 \text{ min}$$

Damit folgt für die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = \frac{D_2 + l - D_1}{t_2 - t_1} = \frac{L}{\Delta t} \approx \frac{3 \cdot 10^8 \text{ km}}{10^3 \text{ s}} = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Römer hatte  $c = 200\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  berechnet!

b.) Fizeau (1849):



Licht wird vom Zahnrad absorbiert, wenn  $\Delta t = \frac{2L}{c}$ . Damit errechnet sich  $c$  folgendermaßen:

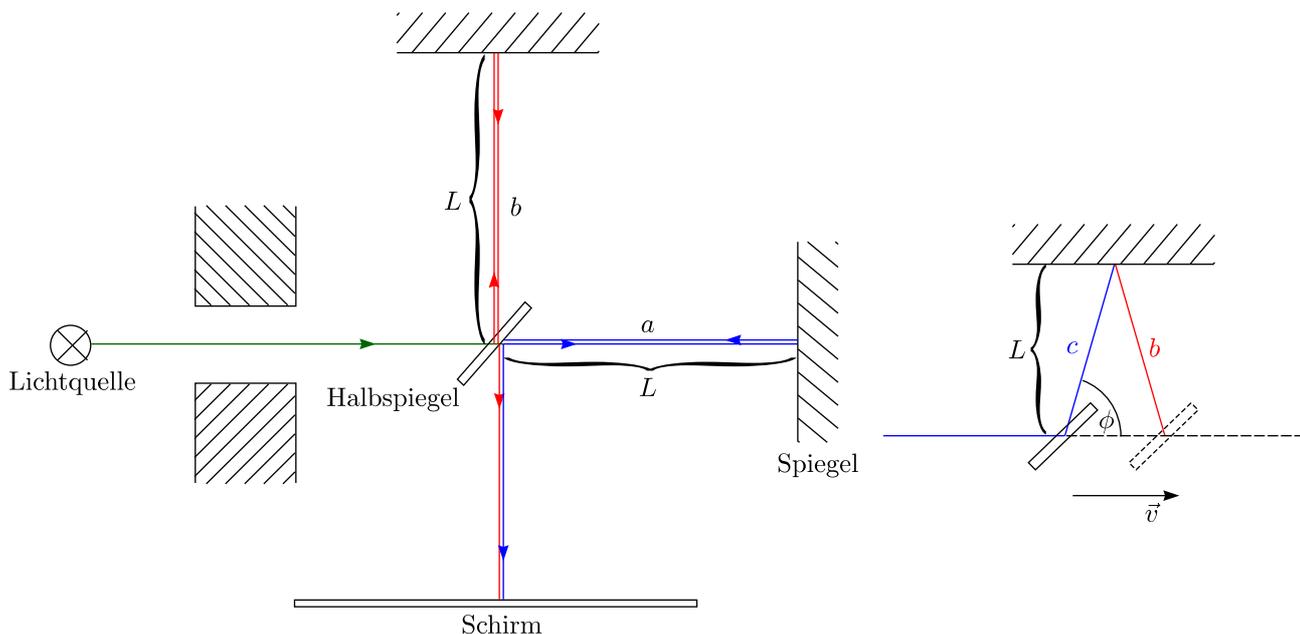
$$c = \frac{2L}{\Delta t}$$

Heute kann man  $c$  sehr genau bestimmen:

$$c = 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}} < \infty!$$

c.) Beweis, daß Lichtgeschwindigkeit  $c$  unabhängig vom Bezugssystem:

Michelson, Morley (1887) (Idee von Maxwell):



Das System befindet sich auf der Erde, d.h.  $v = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ . Die Laufzeit zwischen Spiegel und Halbspiegel beträgt:

$$t_a = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2 \cdot L \cdot c}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Die Laufzeit von b.) beträgt:

$$\cos \phi = \frac{v}{c}$$

Wir erhalten außerdem für die Laufstrecke  $s$ :

$$s = \frac{2L}{\sin \phi}$$

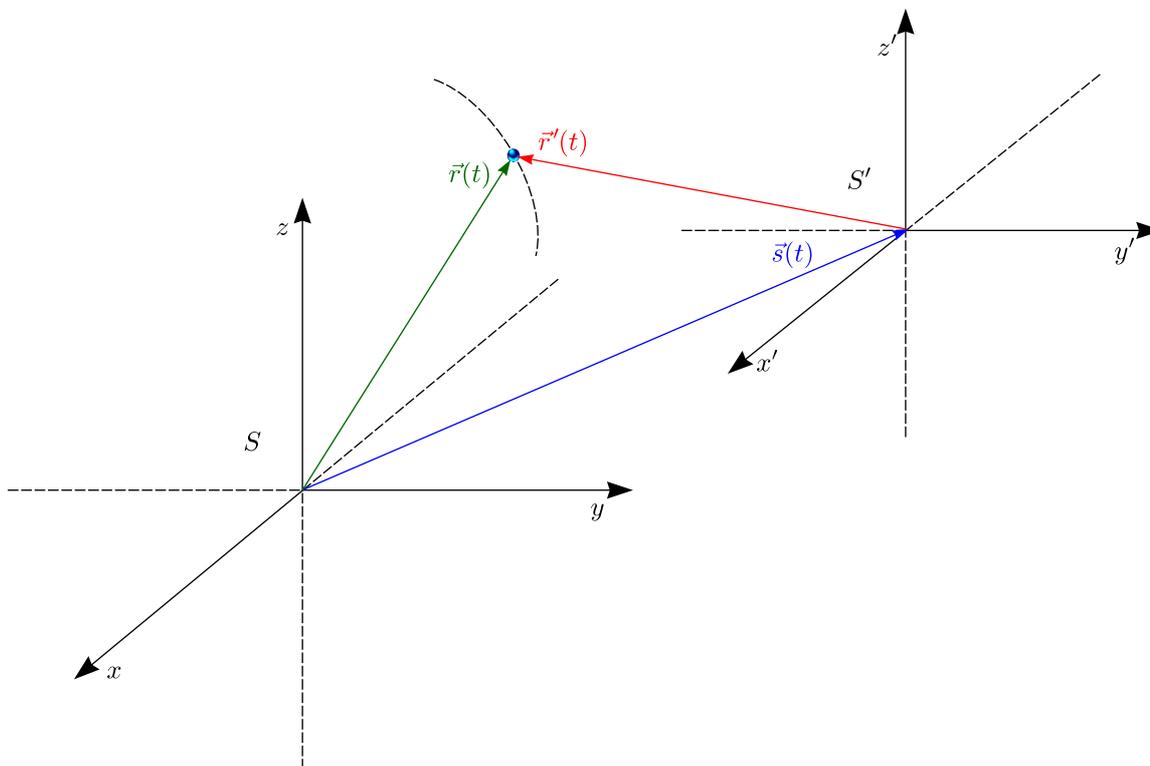
$$t_b = \frac{2L}{c \cdot \sin \phi} = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \cos^2 \phi}} = \frac{2L}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_a - t_b = \frac{2L}{c} \left( \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) \neq 0$$

Dabei wird folgende Beobachtung gemacht:

$$\Delta t = 0$$

### 7.2.3 Wiederholung: Galileitransformationen



$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= x(t) - v \cdot t \\ y'(t) &= y(t) \\ z'(t) &= z(t) \end{aligned} \right\} \text{Für Bewegung von } S' \text{ mit Geschwindigkeit } v \text{ in } x\text{-Richtung}$$

$$\frac{dx'(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} - v = v'(t) - v$$

\* Maxwell (1864):

Er beschreibt eine elektromagnetische Welle, die sich mit  $v = c$  ausbreitet, unabhängig vom Bezugssystem!

\* Einstein (1905):

Einstein geht von der Notwendigkeit aus, Metrik von Raum und Zeit zu verändern.

## 7.2.4 Lorentztransformation

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - vt) \cdot \gamma \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \cdot \gamma \end{aligned} \right\} \text{Für Bewegung in } x\text{-Richtung}$$

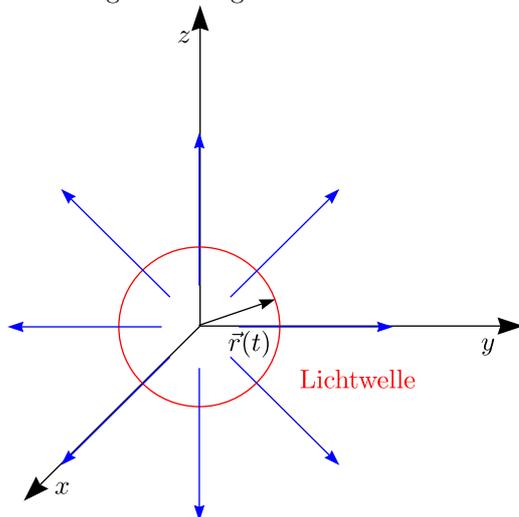
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ mit } \beta \equiv \frac{v}{c}$$

**Allgemein:**

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{v^2} (\gamma - 1) - \gamma \cdot t \right)$$

$$t' = \left( t - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{r} \right) \gamma$$

Ist die Lichtgeschwindigkeit invariant?



$$\vec{r}(t)^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = c^2 \cdot t^2$$

Im System S' haben wir:

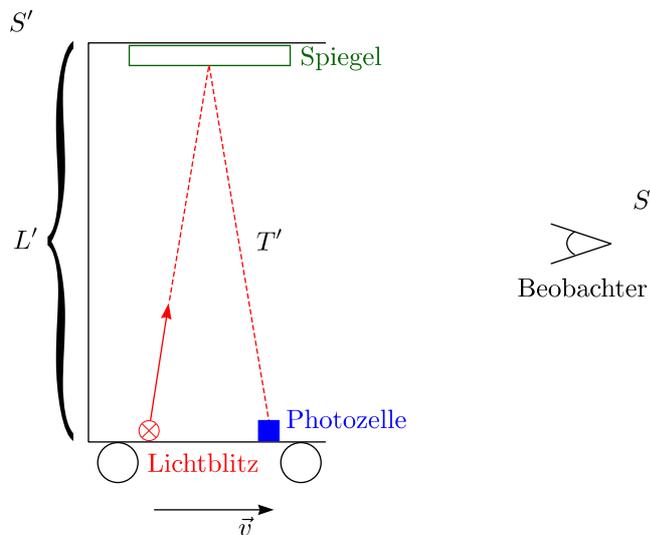
$$\begin{aligned} \vec{r}'(t)^2 &= x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \gamma^2 x^2 - \gamma^2 \cdot 2xvt + \gamma^2 v^2 t^2 + \underbrace{y^2 + z^2 + x^2}_{c^2 t^2} - x^2 = \\ &= (\gamma^2 - 1) x^2 - \gamma^2 \cdot 2x \cdot v \cdot t + (\gamma^2 \cdot v^2 + c^2) t^2 = \\ &= \left( \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - 1 \right) x^2 - \gamma^2 \cdot 2xtv + \left( \frac{v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + c^2 \right) t^2 = \\ &= \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 x^2 - \gamma^2 \cdot 2vxt + \gamma^2 \cdot c^2 \cdot t^2 = c^2 \left( \gamma^2 t^2 - \gamma^2 \cdot 2t \frac{vx}{c^2} + \gamma^2 \frac{v^2 x^2}{c^4} \right) = \\ &= c^2 \left( \gamma \cdot \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \right)^2 = c^2 t'^2 \end{aligned}$$

Es handelt sich also ebenfalls um eine Kugelwelle mit Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

## 7.2.5 Relativistische Effekte

## 1. Die Zeitdilatation

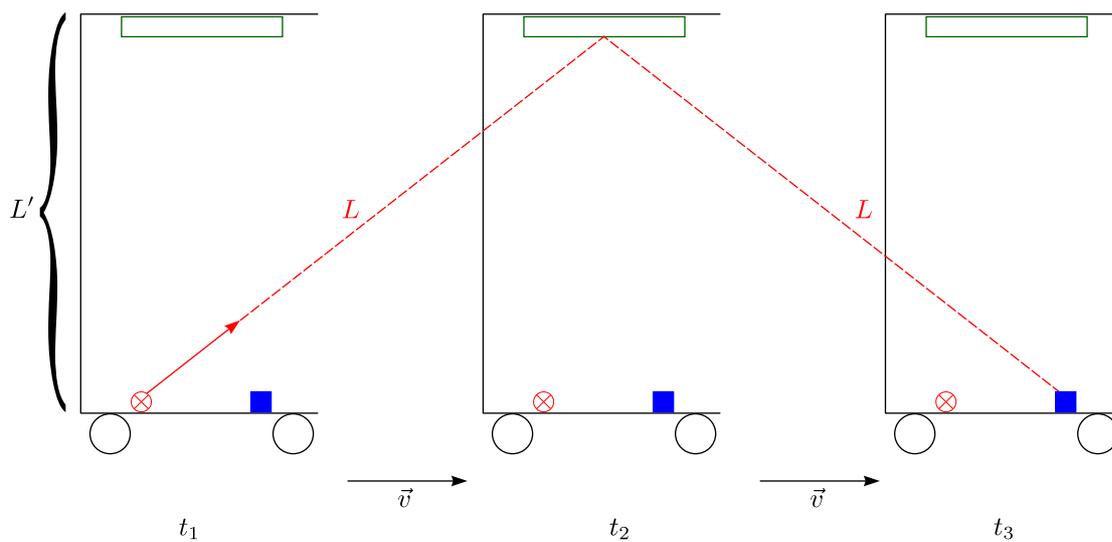
Betrachte eine „Uhr“:



Wenn der Lichtpuls auf die Photozelle auftrifft, wird ein neuer Puls ausgesendet:

„Periode“:  $T' = \frac{2L'}{c}$

Für Beobachter:  $T = t_3 - t_1$



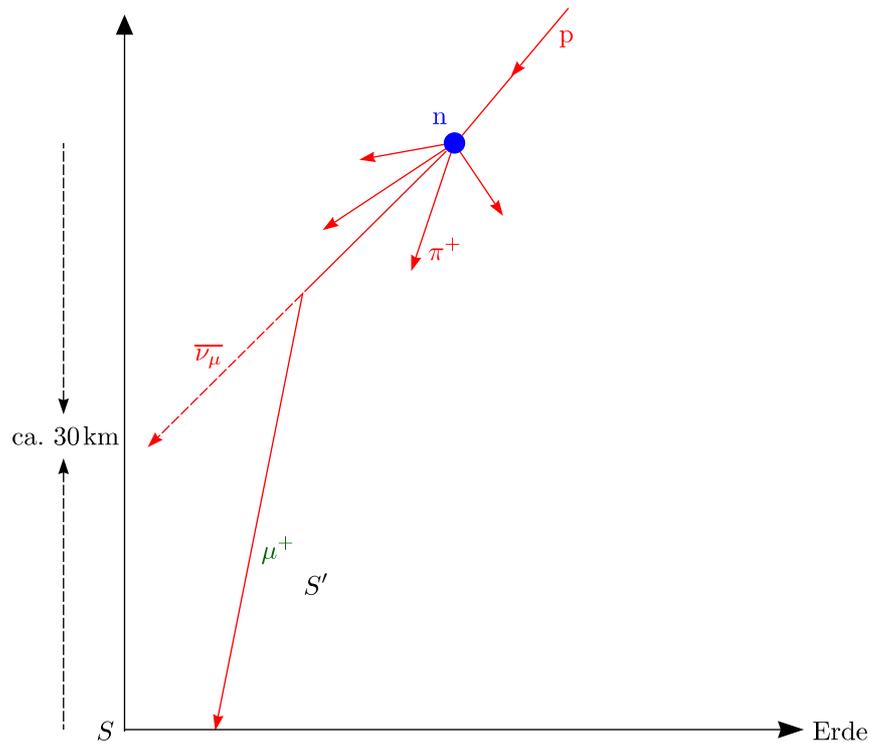
$$L = \sqrt{L'^2 + \left(\frac{v \cdot T}{2}\right)^2} = \frac{T \cdot c}{2}$$

$$\Rightarrow T^2 \frac{c^2}{4} = L'^2 + \frac{v^2 T^2}{4}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2L'}{\sqrt{c^2 - v^2}} = 2L' \frac{\gamma}{c}$$

Mit  $L' = \frac{T'c}{2}$  folgt:

$$T = \gamma \cdot T' \quad (\text{Zeitdilatation})$$

**Anwendung: Kosmische Höhenstrahlung**


Wir betrachten den Zerfall von Myonen ( $\mu$ ). Die Lebensdauer eines Myons beträgt:

$$\tau'_\mu = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Für die zurückgelegte Lichtstrecke ergibt sich:

$$L' = \tau'_\mu \cdot c \approx 660 \text{ m}$$

Im System  $S$  haben wir:

$$\tau_\mu = \gamma \cdot \tau'_\mu$$

In diesem Falle gilt:

$$\gamma = 50$$

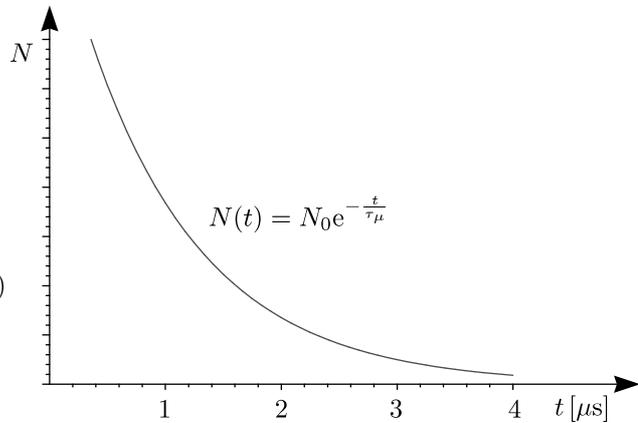
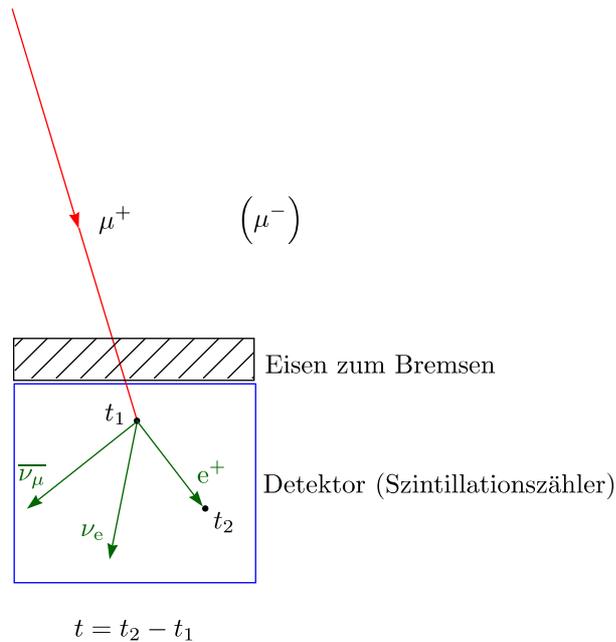
(für angenommene  $v = 0,9998 c$ ).

$$\tau_\mu = 50 \cdot 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ s} = 110 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Damit gilt für die Weglänge:

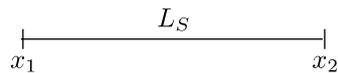
$$L = \gamma \cdot \tau'_\mu \cdot v = 110 \cdot 10^{-6} \text{ s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 33 \text{ km}$$

**Einschub: Bestimmung von  $\tau_\mu$**



2. Längenkontraktion

Beispiel: Stab der Länge  $L_S$



Im System  $S'$  gilt:

$$x'_2 = \gamma (x_2 - vt_2) \Rightarrow \text{Ende vom Stab}$$

$$x'_1 = \gamma (x_1 - vt_1) \Rightarrow \text{Anfang vom Stab}$$

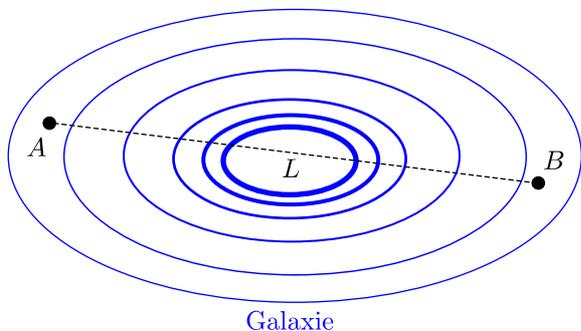
Längenmessung: Beide Enden zur gleichen Zeit:  $t_2 = t_1$

$$\Rightarrow x'_2 - x'_1 = \gamma \cdot (x_2 - x_1)$$

$$L' = \gamma \cdot L \text{ bzw. } L = \frac{1}{\gamma} L' \quad (\text{Längenkontraktion})$$

**Beispiel:**

Wie hoch muss Geschwindigkeit eines Raumschiffes - von der Erde aus gesehen - sein, damit ein Astronaut eine Galaxie der Größe  $6 \cdot 10^{20}$  m innerhalb von 30 Jahren durchqueren kann?



Wir betrachten Zeit und Geschwindigkeit vom Astronauten aus, d.h. Raumschiff ist Ruhesystem und Galaxie bewegt sich gegenüber Raumschiff.

\* Galaxie: Bewegtes System  $S'$  mit Länge  $L' = 6 \cdot 10^{20}$  m, Geschwindigkeit  $v'$  und Zeit  $t'$

\* Raumschiff: Ruhesystem  $S$  mit Länge  $L$ , Geschwindigkeit des Beobachters  $v=0$ , und Zeit  $t = 30J = 30 \cdot 3.16 \cdot 10^7 \text{ s} \approx 10^9 \text{ s}$

Damit erhalten wir mit  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v'^2/c^2}$  für die Geschwindigkeit  $v' = L'/t' = L'/\gamma t = L' \sqrt{1 - v'^2/c^2}/t$ . Daraus folgt

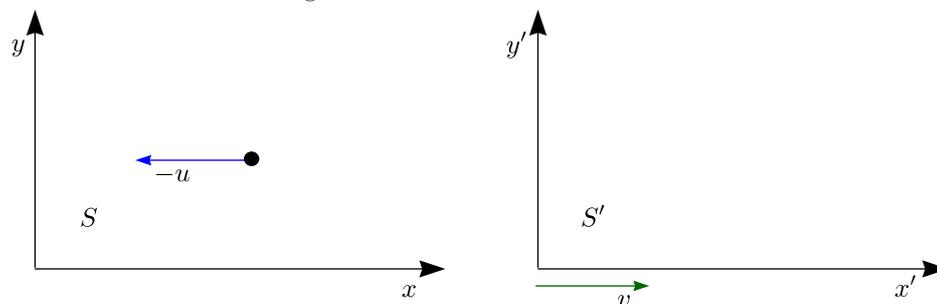
$$v' = \frac{L'c}{\sqrt{L'^2 + c^2 t^2}} = 0,9999999c \approx c \cdot (1 - 10^{-7})$$

Auf Erde gesehen dauert die Reise:

$$t' = \gamma t = L'/v' \approx 64000 \text{ Jahre}$$

Der Astronaut sieht auf seinem Kilometerzähler:  $L = L'/\gamma \approx 6 \cdot 10^{20}/2100 \text{ m}$ .

### 3. Addition von Geschwindigkeiten



$$x(t) = -u \cdot t$$

$$x'(t) = \gamma(x(t) - v \cdot t) = \gamma(-u \cdot t - vt) = -\gamma(u + v)t$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v \cdot x(t)}{c^2} \right) = \gamma \cdot t \left( 1 + \frac{u \cdot v}{c^2} \right)$$

$$u' = \frac{x'}{t'} = -\frac{u + v}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}}; |u'| \leq c$$

#### Beispiel:

Es sei  $u = 0,8c$  und  $v = 0,8c$ . Damit folgt:

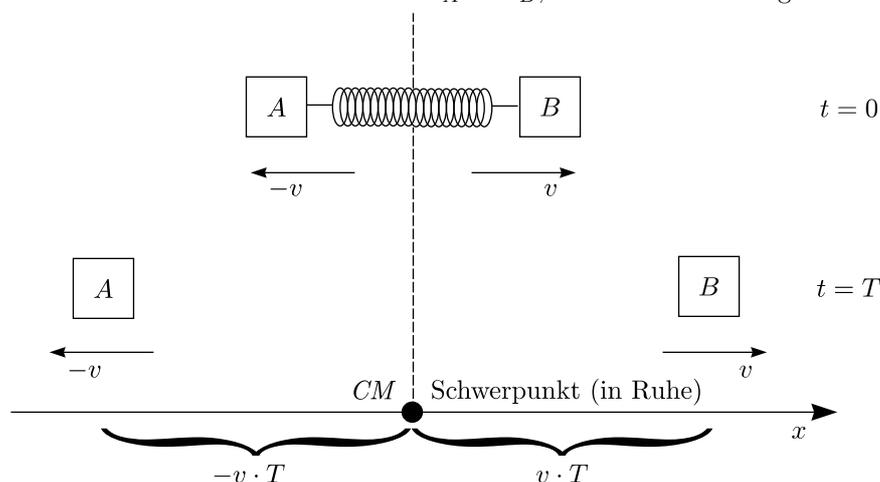
$$|u'| = \frac{1,6c}{1,64} = 0,98c$$

Es gibt somit keine Überlichtgeschwindigkeiten!

## 7.3 Relativistische Dynamik

### 1. Masse

Wir betrachten die beiden Massen  $m_A = m_B$ , die auseinander fliegen:



Von A betrachtet:

S bewegt sich in  $x$ -Richtung mit  $v$

B bewegt sich in  $x$ -Richtung mit  $w = \frac{v+v}{1+\frac{v \cdot v}{c^2}} = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$

Zur Zeit  $t = T$  gilt folgendes:

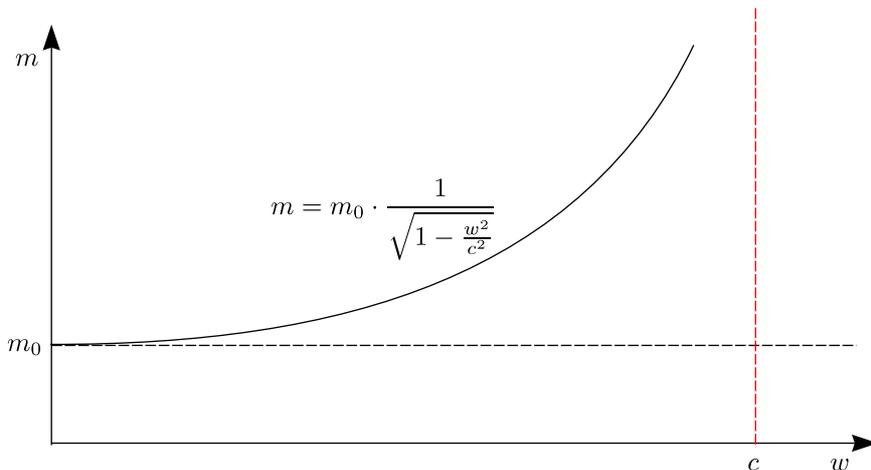
- \* A befindet sich bei  $x_A = -vT$
- \* B befindet sich bei  $x_B = +(w-v)T$

Der Schwerpunkt ruht in Bezug auf das  $x$ - $y$ -Koordinatensystem:

$$\Rightarrow -m_A \cdot v \cdot T + m_{B'} \cdot (w-v) \cdot T = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_{B'} &= m_A \cdot \frac{v}{w-v} = m_A \cdot \frac{v}{\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} - v} = m_A \cdot \frac{c^2 + v^2}{c^2 - v^2} = \\ &= m_A \cdot \sqrt{\frac{c^4 + 2c^2v^2 + v^4}{c^4 + 2c^2v^2 + v^4 - 4c^2v^2}} \\ &= m_A \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{w^2}{c^2}}} = \gamma \cdot m_A \end{aligned}$$

$$m_{B'} = \gamma \cdot m_B$$



2. Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} = \gamma m_0 \vec{v}$$

3. Kraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 \vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0 \vec{a} \\ &= \gamma^3 m_0 a \left( \frac{v^2}{c^2} \vec{e}_v + \frac{1}{\gamma^2} \vec{e}_a \right) \end{aligned}$$

4. Energie

$$\begin{aligned} E_k &= \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{F} d\vec{l} = \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{v}) d\vec{l} \\ &= \int_0^{v_0} (m dv + \underbrace{v dm}_0 \text{ im klassischen Fall}) = \int_0^{v_0} (m v dv + v^2 dm) \end{aligned}$$

Mit  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  erhält man:

$$m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

$$\Rightarrow 2m c^2 dm - m^2 2v dv - v^2 2m dm = 0$$

$$\Rightarrow m v dv + v^2 dm = c^2 dm$$

Nun erhält man:

$$E_k = \int_{m(v=0)}^{m(v_0)} c^2 dm = \overbrace{m c^2}^{E_{Gesamt}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Die verrichtete Arbeit kann man interpretieren als Arbeit, die gebraucht wurde für die Massenzunahme  $c^2 dm$  oder nach Einsteins Kurzformel:  $\text{Masse} = \text{Energie}$ , auch geschrieben als  $E = mc^2$ , wobei die Gesamtenergie  $E$  eines Körpers zwei Komponenten hat, nämlich die kinetische Energie und Ruhemasse:

$$E = E_k + \underbrace{m_0 c^2}_{\text{Massenergie}}$$

Den relativistischen Zusammenhang mit dem Impuls bekommt man, wenn man  $m^2 c^2$  in der obigen Gleichung  $m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$  ersetzt durch  $E^2/c^2$ :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

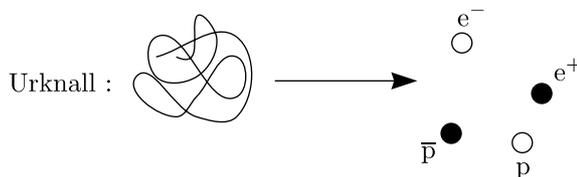
Für  $v \ll c$ :  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$

$$\Rightarrow E_k = m_0 c^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{m_0}{2} v^2$$

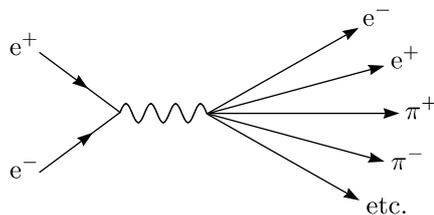
$\Rightarrow$  Die klassischen Gesetze gelten!

Anwendung: Umwandlung von kinetischer Energie in Materie

Beispiel: Urknall:



Im Teilchenbeschleuniger :



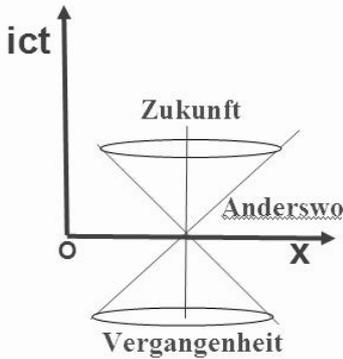
## 7.4 Lorentzinvariante Vierervektoren im 4-dimensionalen Minkowski Raum

Längen, Zeitintervalle und Massen ändern sich zwischen Bezugssystemen. Jedoch die Lichtgeschwindigkeit und die Ruhemasse eines Teilchen sind Lorentzinvariant, d.h. die Größen sind in jedem Inertialsystem identisch. Dies kann man als Lorentzinvariante Längen der folgenden Vierervektoren im 4-dimensionalen Minkowski Raum ausdrücken:

$$X = (x, y, z, ict); \quad X \cdot X = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = -s^2$$

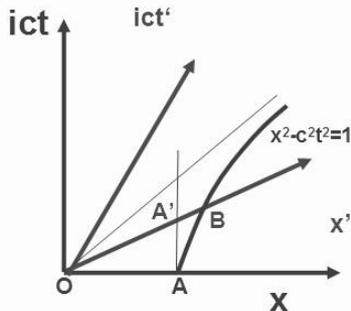
$$P = cm\dot{X} = (p_x, p_y, p_x, iE); P \cdot P = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - E^2 = -c^4 m_0^2$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass  $c=r/t$  in jedem Inertialsystem gleich ist, wenn  $s^2$  Lorentzinvariant ist und die Länge des zweiten Vierervektors ist nach der relativistischen Energie-Impulsbeziehung nur bestimmt durch  $c$  und  $m_0$ , die beide invariant sind. Diese Längen kann man im Orts-Zeit- oder Impuls-Energie Raum anschaulich darstellen. Für den Minkowski Orts-Zeit Raum nimmt man als Achsen die  $ict$ -Achse und eine Orts-Koordinate, z.B.  $x$ . Ein ruhender Punkt, d.h.  $x$ =konstant, kann man als vertikale Linie im Orts-Zeitraum darstellen, da die Zeit auch für einen ruhenden Punkt zunimmt. Ein Punkt, dass sich gleichförmig mit Geschwindigkeit  $v$  in die  $x$ -Richtung bewegt, entspricht eine Gerade mit der Steigung  $\tan \alpha = ct/x = c/v = 1/\beta$ . Ein Lichtstrahl mit  $v = c$  entspricht daher eine Diagonale unter  $45^\circ$ . Solche Linien, die die Bewegung eines Körpers im Orts-Zeit Raum darstellen, nennt man Weltlinien. Da die Lichtgeschwindigkeit die maximal beobachtbare Geschwindigkeit eines Körpers darstellt, sind die physikalisch mögliche Bereiche für reale Teilchen gegeben durch Kegel begrenzt durch  $t = \pm x$ .

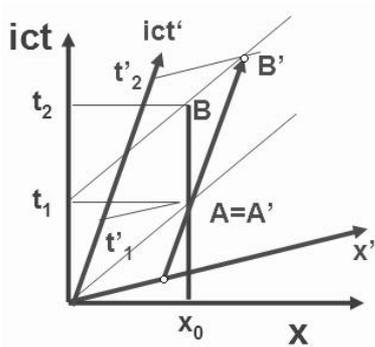


Ein sich mit Geschwindigkeit  $v$  gleichförmig bewegendes Bezugssystem  $S'$  in Richtung der  $x$ -Achse entspricht die Achsen  $x', ict'$ . Die  $ict'$ -Achse ist die Weltlinie von  $O'$  ( $x'=0$ ) und hat eine Steigung  $ct'/x' = c/v = 1/\beta$ , da  $O'$  sich mit Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Die  $x'$ -Achse entspricht  $t' = \gamma(t - vx/c^2) = 0$  und hat daher eine Steigung  $\tan \alpha = ct/x = v/c = \beta$ . Für sehr hohe Geschwindigkeiten gehen beide Achsen  $x'$  und  $ict'$  über in die Diagonale unter  $45^\circ$ .

Konstante Längen des X-Vektors, z.B.  $x^2 - c^2t^2 = 1$  werden durch eine Hyperbel dargestellt, die die  $x$ -Achse bei  $(x = 1, t = 0)$  schneidet. Diese Hyperbel schneidet die  $x'$ -Achse bei  $x' = 1$ , weil in  $S'$  auch gilt  $x'^2 - c^2t'^2 = 1$ . Wie aus der Figur sichtbar ist, schneidet die Hyperbel ein größeres Stück von der  $x'$ -Achse ab, d.h. eine Längeneinheit  $L'$  in  $S'$  ist größer als in  $S$ . Nach der Lorentztransformationen muss gelten:  $L' = \gamma L$  oder  $L = L'/\gamma$  in Übereinstimmung mit der Lorentzkontraktion, die besagt, dass bewegte Stäbe oder Längeneinheiten kürzer wahrgenommen werden.



Man kann auch wie folgt argumentieren: ein Stab der Länge  $OA$ , die in  $S$  ruht, sieht ein Beobachter in  $S'$  als einen bewegten Stab der Länge  $OA'$ , weil die vertikale Weltlinien von  $O$  und  $A$  die  $x'$ -Achse in den Punkten  $O$  und  $A'$  schneiden, d.h. der Beobachter sieht die Lichtblitze von  $O$  und  $A$  zum gleichzeitigen Zeitpunkt  $t'=0$  auf einem Abstand  $OA' < OA$ .



Man kann sich die Zeitdilatation ähnlich klar machen. Eine in  $O$  ruhende Uhr sendet in regelmäßigen Zeitintervallen Lichtblitze aus, deren Weltlinien unter  $45^\circ$  z.B. bei  $O$  und  $t_1$  starten. Sie schneiden die vertikale Weltlinie eines ruhenden (bewegten) Beobachters in  $x_0$  ( $x'_0$ ) in  $A$  ( $A'$ ) und  $B$  ( $B'$ ) und der Beobachter misst ein Zeitintervall  $\Delta t = t_2 - t_1$  ( $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ ). Aus der Figur ist wieder sichtbar:  $\Delta t' > \Delta t$  und die Lorentztransformation ergibt  $\Delta t' = \gamma \Delta t$ . Daher: bei einer relativen Geschwindigkeit zwischen Beobachter werden die Zeitintervalle gedehnt, d.h. eine bewegte Uhr läuft langsamer, wie z.B. aus der langen Lebensdauer der Myonen in der kosmischen Strahlung hervorgeht. Aber die Zeitdilatation wurde auch mit Atomuhren in Überschallflugzeugen verifiziert.

#### 7.4.1 Anwendung der Vierervektoren:

Die Antiprotonen (Symbol  $\bar{p}$ ) wurden entdeckt bei dem Beschuß von Wasserstoff mit Protonen der Energie  $E$  in der Reaktion  $p + p \rightarrow 3p + \bar{p} + X$ . (Man muss mindestens 3 Protonen erzeugen, damit die Baryonzahl erhalten bleibt.) Wie hoch muß die Anfangsenergie  $E$  der Protonen mindestens sein?

Im Anfangszustand sind die Vierervektoren:  $P_p = (\bar{p}_p, iE)$  und  $P_H = (0, im_p)$ , wobei wir als Zeiteinheit  $c=1$  gewählt haben und  $\bar{p}_p$  der Protonimpuls ( $p_x, p_y, p_z$ ) ist. Am Anfang gilt also  $P_A = P_p + P_H = (\bar{p}_p, i(E + m_p))$ . Im Endzustand gilt ebenfalls:  $P_E = P_{3p} + P_{\bar{p}} + P_X = (\bar{p}_E, E_E) \approx (\bar{0}, 4m_p)$ . Hier wurde der Gesamtimpuls bei der Schwellenenergie im Endzustand null gesetzt haben, weil dann alle Energie in Masse umgewandelt wird. Energie und Impulserhaltung verlangen  $P_A = P_E$  und wir wissen, dass die Längen dieser Vierervektoren Lorentzinvariant sind. Für die Länge von  $P_A$  gilt mit  $E^2 = p_p^2 + m_p^2$ :

$$P_A \cdot P_A = p_p^2 - (E + m_p)^2 = p_p^2 - E^2 - 2Em_p - m_p^2 = -2Em_p - 2m_p^2$$

Gleichsetzen mit der Länge  $16m_p^2$  von  $P_E$  liefert als Schwellenenergie für die Antiprotonproduktion:

$$E = 7m_p.$$

Tatsächlich wurden die Antiprotonen zum ersten Mal an einem Protonbeschleuniger in Berkeley, die Anfang der fünfziger Jahre gerade diese Energie erreichen konnte, beobachtet.

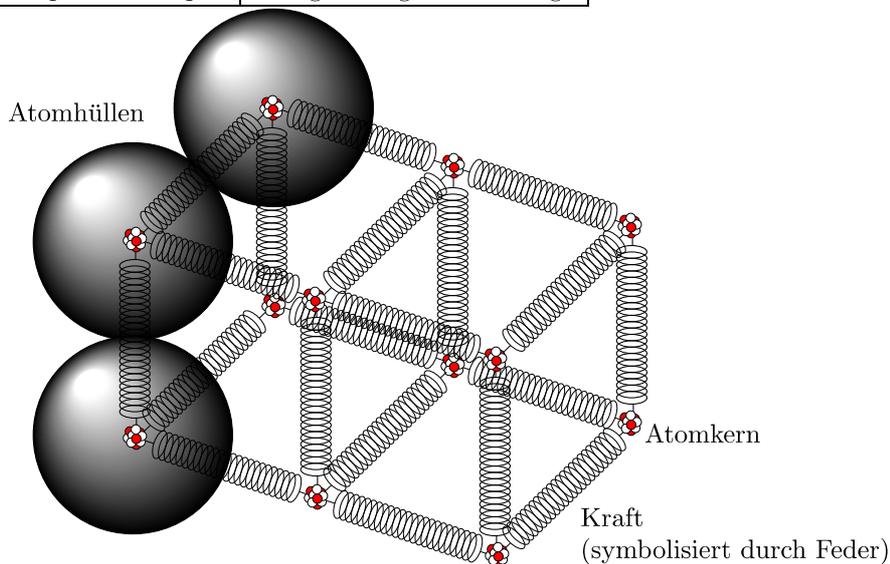
# Kapitel 8

## Physikalische Eigenschaften fester Körper und Flüssigkeiten

### 8.1 Physik fester Körper

Form von Materie, in der interatomare Kräfte zu dreidimensionalen stabilen Anordnungen von Atomen führen.

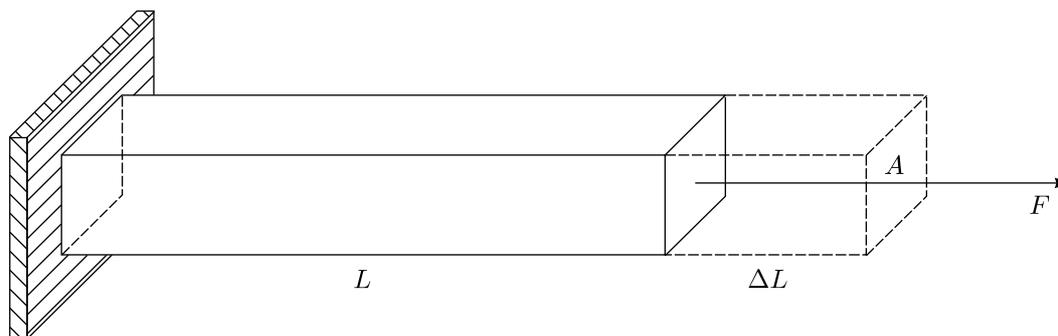
Kristalle	Regelmäßige Anordnung
Amorphe Festkörper	unregelmäßige Anordnung



- \* Kräfte führen zu elastischer Deformation (bei großen Kräften irrelevant)
- \* Wärme manifestiert sich in Atomschwingungen: Je wärmer, desto größer sind die Amplituden.

#### 8.1.1 Elastische Verformung

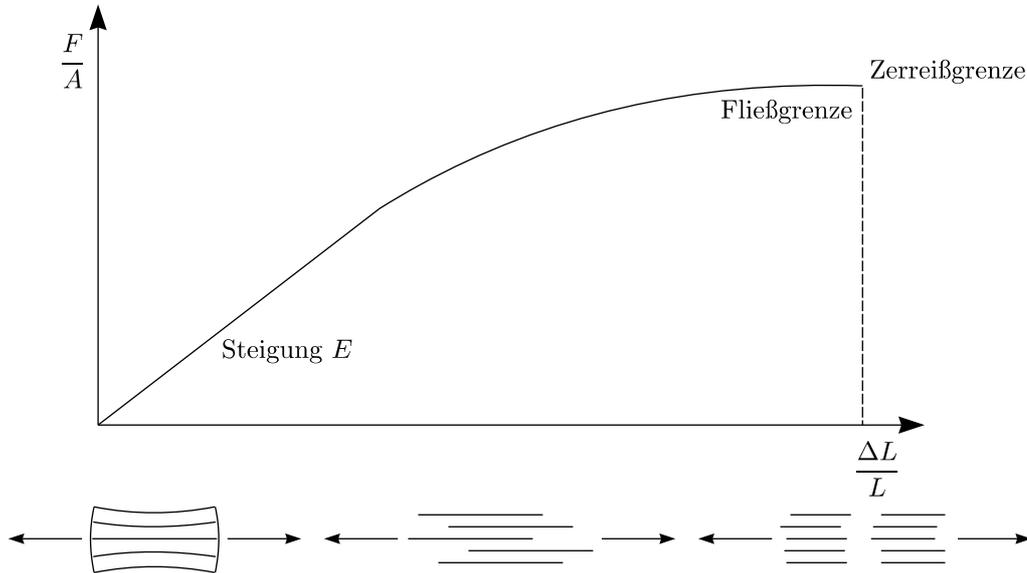
a.) Hookesches Gesetz



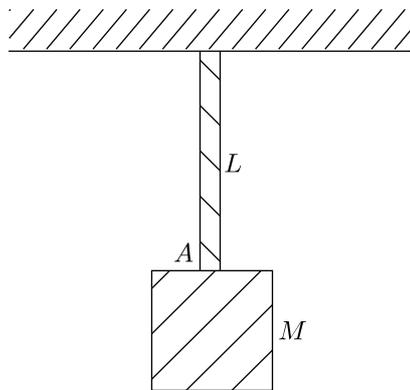
$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{E}$$

$E \triangleq$  Elastizitätsmodul (englisch: Young's-Modulus)

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{ oder } \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$



**Beispiel: Stahlzylinder**



$$L = 2 \text{ m}$$

$$\varnothing = 2 \text{ cm}$$

$$E = 2,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$M = 9,5 \text{ t}$$

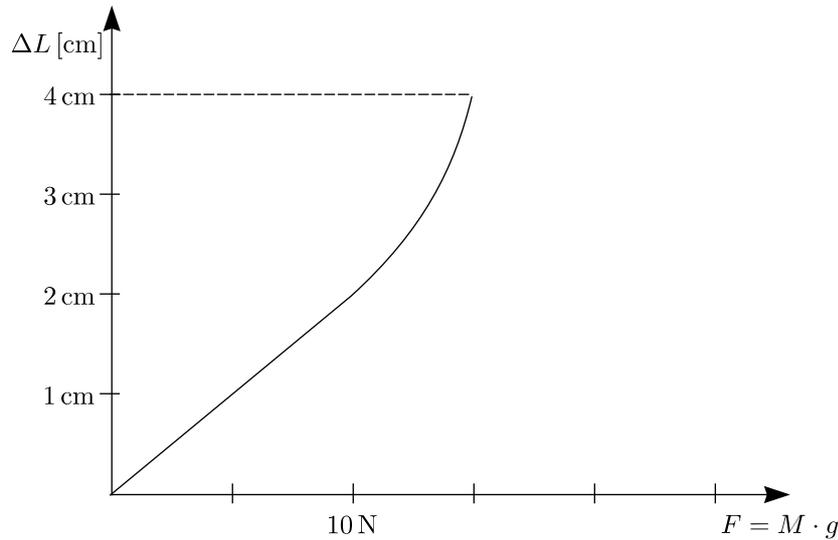
$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L} \Rightarrow \Delta L = \frac{L \cdot F}{E \cdot A} = \frac{2 \text{ m} \cdot 9500 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2,5 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \approx 2,8 \text{ mm}$$

Speziell für Gummi gilt:

$$E = 7 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\Delta L = 101 \text{ m}!$$

Gummi zerreißt allerdings vorher.

Demonstration: Bestimmung von  $E$  für Cu:

$$L = 45 \text{ cm}$$

$$M = 100 \text{ g, } 200 \text{ g, etc.}$$

$$E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{A}$$

$$\Rightarrow E = \frac{L}{\Delta L} \cdot \frac{F}{A} = \frac{45 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} \cdot \frac{10 \text{ N}}{\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{-4} \text{ m})^2} = \frac{22,5 \cdot 10 \cdot 10^8 \text{ N}}{\pi \cdot 2,25} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 3 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Reißfestigkeit:

$$\frac{F}{A} := E \cdot \underbrace{\left( \frac{\Delta L}{L} \right)}_{E_r}$$

$\Delta L$  ist die Verlängerung vor dem Zerreißen.

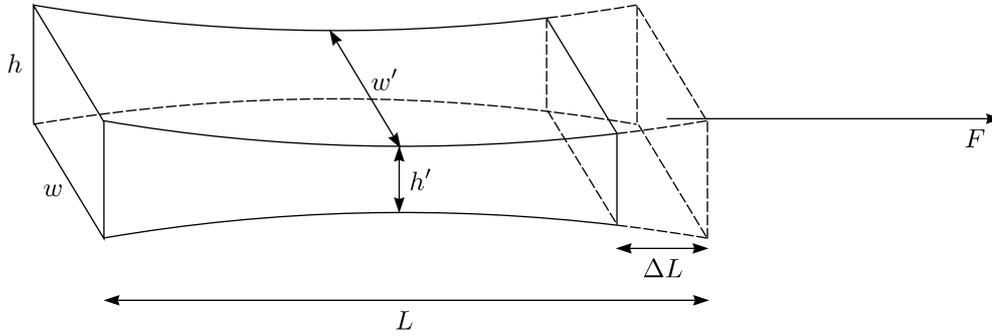
	$E \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$	$E_r \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
Stahl	$2,5 \cdot 10^{11}$	$4 - 30 \cdot 10^8$
Glas	$7 \cdot 10^{10}$	$3 - 20 \cdot 10^7$
Spinnenseide		$2,4 \cdot 10^8$
Sehne		$10^8$
Gummi		$10^7$

Beispiel: Unser Stahlbolzen:

$$M_{max} = \frac{E_r \cdot A}{g} = \frac{3 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 95000 \text{ kg}$$

(Bei Gummi: 320 kg)

b.) Volumenänderung bei Zug



$$w' = w - \Delta w$$

$$h' = h - \Delta h$$

$$L' = L + \Delta L$$

$$\text{Es gilt: } \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta w}{w} = -\mu \frac{\Delta L}{L}$$

$$\mu \hat{=} \text{Poissonzahl} \approx 0,3$$

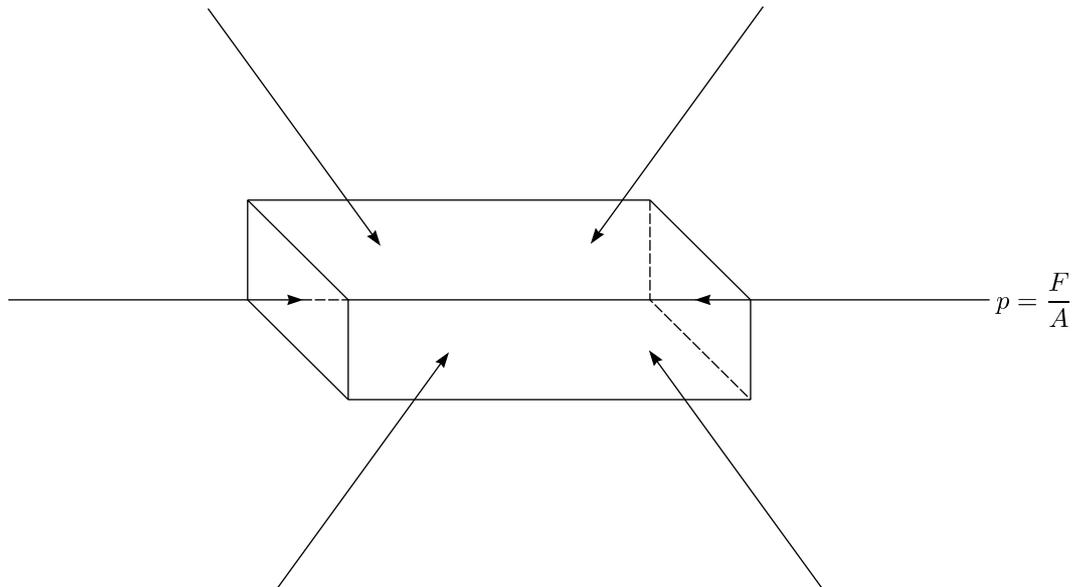
$$V' = V + \Delta V$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(w + \Delta w) \cdot (h + \Delta h) \cdot (L + \Delta L)}{w \cdot h \cdot L} - 1 = \left(1 + \frac{\Delta w}{w}\right) \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) - 1 = \\ &= \left(1 - \mu \frac{\Delta L}{L}\right)^2 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right) - 1 \approx (1 - 2\mu) \cdot \frac{\Delta L}{L} \end{aligned}$$

**Beispiel: Eisenbolzen:**

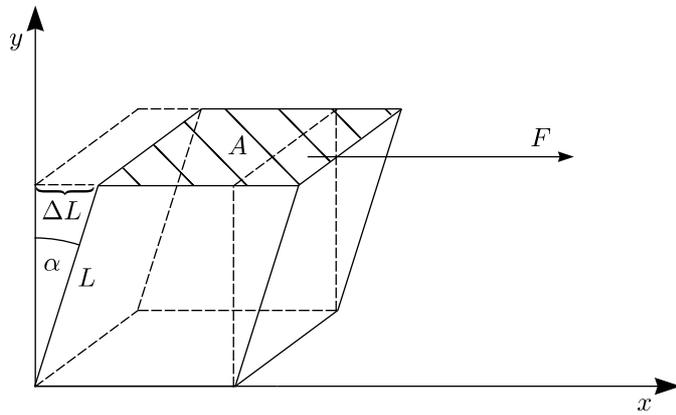
$$\frac{\Delta V}{V} = (1 - 0,6) \cdot \frac{\Delta L}{L} = 0,4 \cdot \frac{2,8 \text{ mm}}{2 \text{ m}} \approx 0,6$$

c.) Kompression im Dreidimensionalen



$$\frac{\Delta V}{V} = -3 \cdot (1 - 2\mu) \frac{p}{E} \text{ mit } k = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (\text{Kompressionsmodul})$$

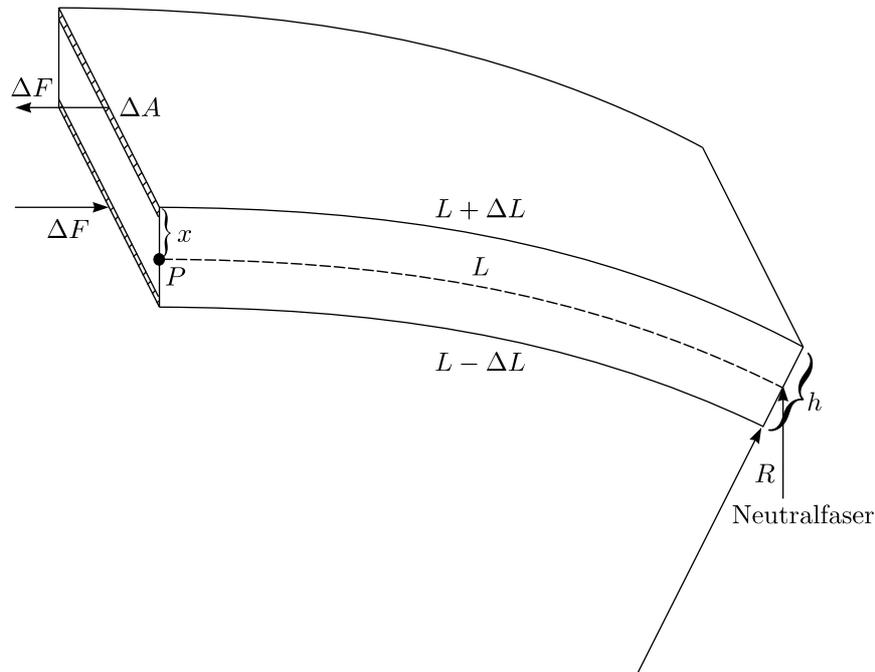
d.) Scherung



$$\frac{F}{A} = G \cdot \frac{\Delta L}{L} = G \cdot \tan \alpha \approx G \cdot \alpha \quad (\text{Schermodul oder Schubmodul})$$

Es gibt dabei folgende Zusammenhänge:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

**Anwendung: Biegung**Wir errechnen das Drehmoment um  $P$ :

$$\Delta M = \Delta F \cdot x$$

Mit  $\frac{\Delta F}{\Delta A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$  und  $\frac{\Delta L}{L} = \frac{x}{R}$ , wobei  $R$  der Krümmungsradius ist, erhalten wir:

$$\Delta M = E \cdot \Delta A \cdot \frac{x}{R} \cdot x = E \cdot \Delta A \cdot \frac{x^2}{R}$$

Durch Integration folgt dann schließlich:

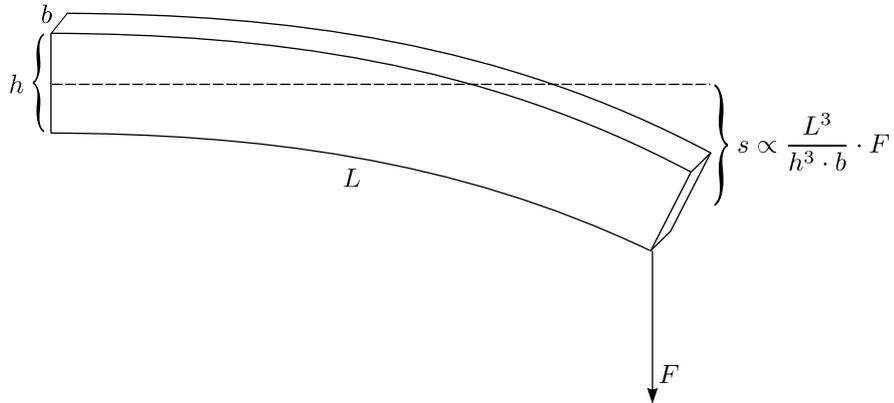
$$M = \int dM = \frac{E}{R} \cdot \underbrace{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dA}_{\text{Flächenträgheitsmoment } B}$$

Die allgemeine Formel zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes lautet:

$$B = \iint x^2 dy dx$$

Als Beispiel betrachten wir uns:

i.) Fall 1:



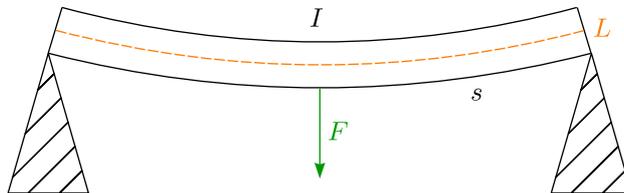
Allgemein gilt:

$$s = \frac{L^3}{3E \cdot B} \cdot F$$

Damit erhalten wir für diesen Fall:

$$s = 4 \frac{L^3}{E h^3 \cdot b} \cdot F$$

ii.) Fall 2:

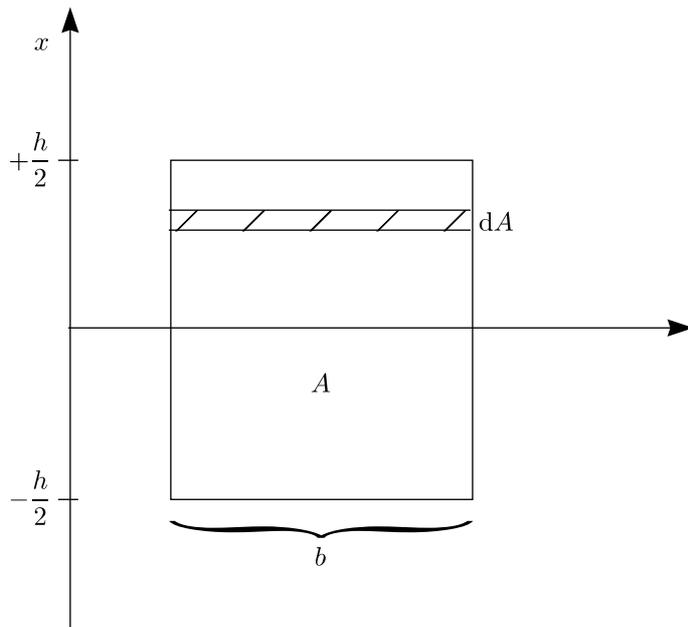


Hier gilt:

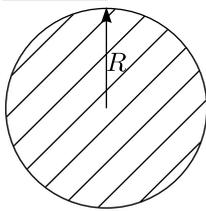
$$s = \frac{L^3}{48 \cdot E \cdot B} \cdot F$$

e.) Scherung

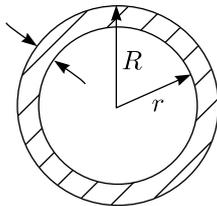
Wir beschäftigen uns mit folgenden Beispielen:

Rechteckiger Stab:

$$I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^2 \cdot b dx = \frac{1}{3} b x^3 \Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h^3 \cdot b}{12}$$

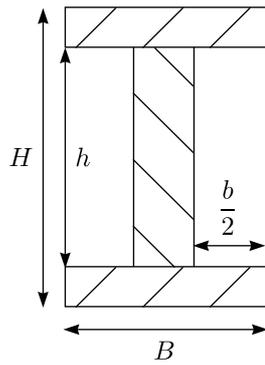
Zylinder und Rohr:\* Zylinder:

$$I_{Zylinder} = \frac{\pi}{4} R^4$$

\* Rohr:

$$I_{Rohr} = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$

**Doppel-T-Träger:**



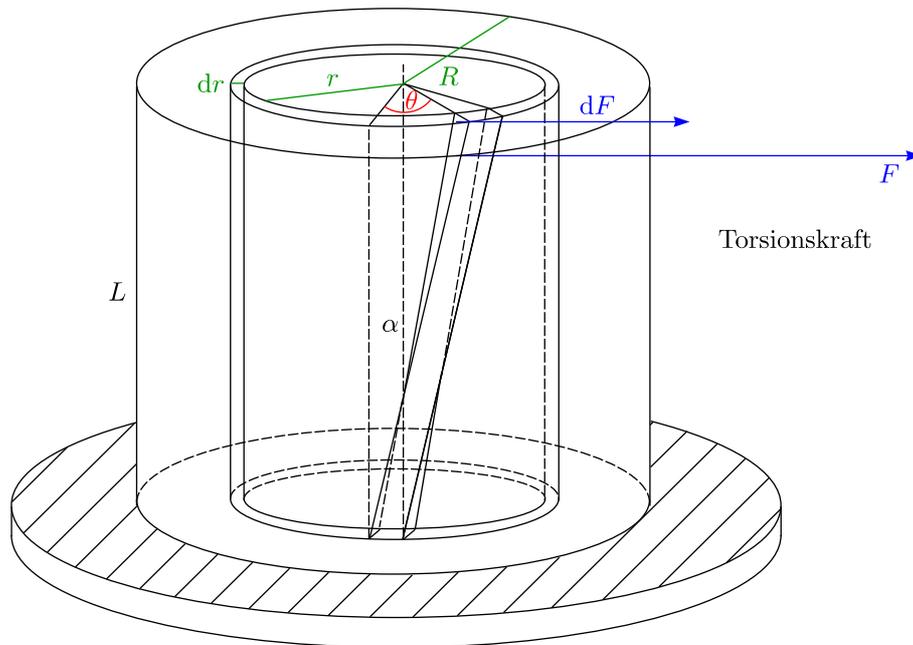
$$I = \frac{1}{12} (BH^3 - bh^3)$$

Vergleichen wir die Biegung eines Zylinders bzw. Rohres gleicher Fläche mit  $R - r = 0,2R$ , welche an einer Seite eingespannt sind:

$$I_{Rohr} = 4,6 \cdot I_{Zylinder}$$

f.) Torsion

Eine Verdrehung entspricht einer Scherung der einzelnen Elemente.



$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r}{L} \cdot \theta$$

Des weiteren gilt:

$$\frac{R \cdot \theta}{L} = \tan \alpha \approx \alpha$$

Für die Zylinderhülse erhalten wir nun:

$$dF = G \cdot \frac{r}{L} \cdot \theta \cdot \underbrace{2\pi r \, dr}_{dA}$$

$$dM = G \cdot \frac{r}{L} \cdot \theta \cdot 2\pi r \, dr \cdot r$$

Für das Drehmoment des gesamten Zylinders gilt:

$$M = \int dM = \frac{2\pi \cdot G \cdot \theta}{L} \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{G \cdot \theta}{L} \cdot R^4 = \underbrace{\frac{R^4}{L} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \theta}_{D_r}$$

Allgemein gilt:

$$M = D_r \cdot \theta$$

$D_r$  nennt man entweder Richtmoment oder auch Torsionsmodul.

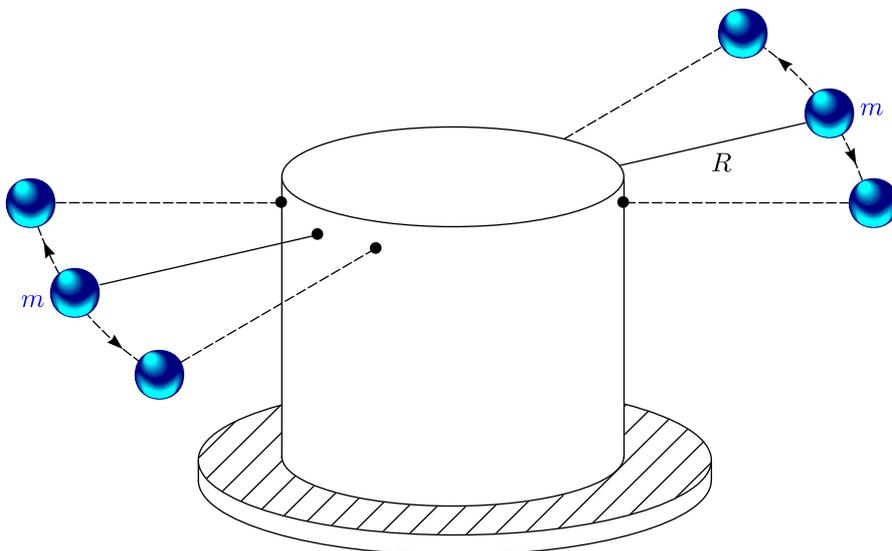
### Fälle:

$$* M_2 = 16 \cdot M_1, \text{ wenn } R_2 = 2 \cdot R_1$$

$$* M_2 = \frac{1}{2} M_1, \text{ wenn } L_2 = 2 \cdot L_1$$

Um bestimmten Winkel  $\theta$  zu erhalten!

### Bestimmung des Richtmomentes (Torsionsmoduls):



Auch hier berechnen wir das Drehmoment:

$$M = D \cdot \theta = J \cdot \ddot{\theta}$$

$J \hat{=}$  Massenträgheitsmoment

Beispiel:  $J_{Hantel} = 2mR^2$

Die Lösung der Differentialgleichung finden wir mit dem Ansatz:

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{J}}$$

$$\Rightarrow D = \frac{4\pi^2}{T^2} J$$

### 8.1.2 Härte eines Festkörpers

Man beschreibt die Härte eines Feststoffes durch die Härteskala nach Moks:

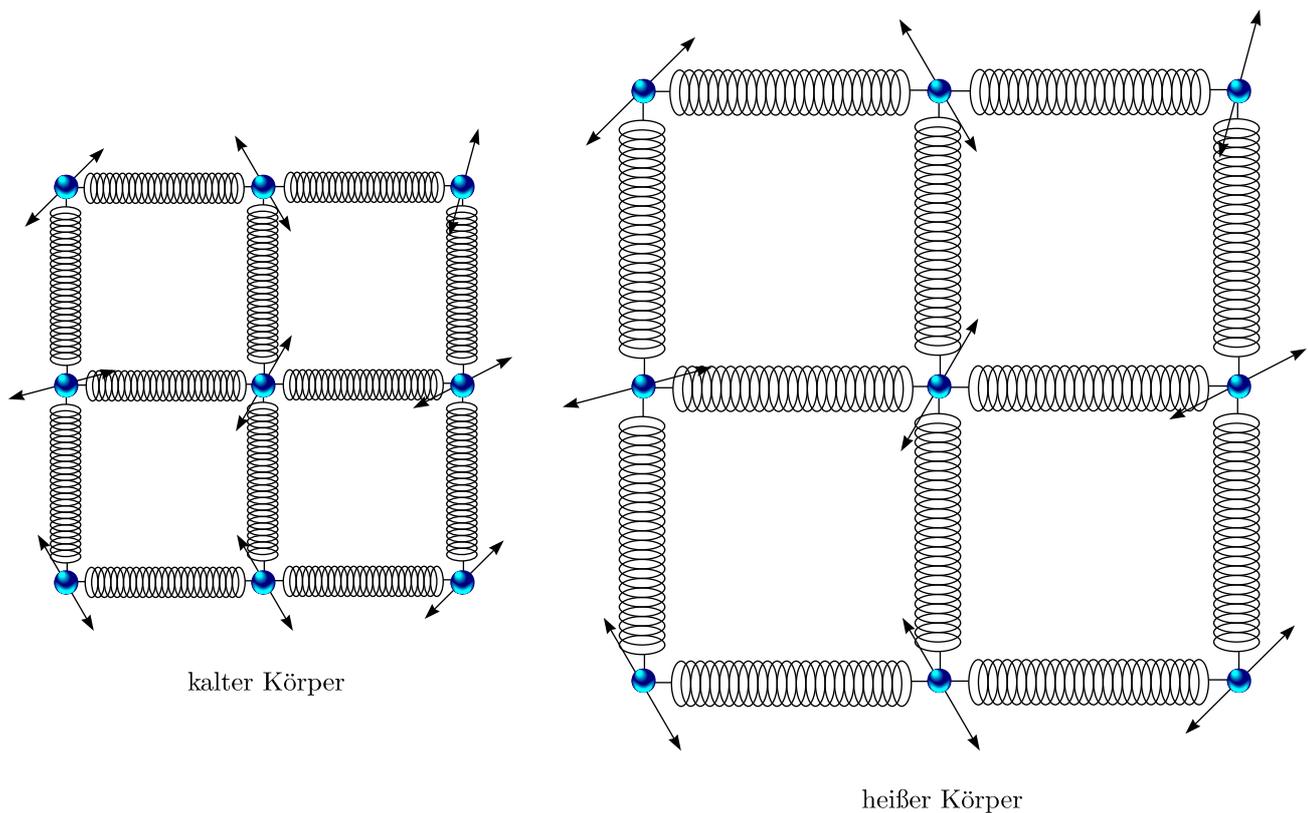
Eichsubstanz	Mokshärte
Talk	1
Gips	2
Kalkspat	3
Flußspalt	4
Apatit	5
Feldspat	6
Quarz	7
Topas	8
Korund	9
Diamant	10

Weitere Beispiele sind:

Eichsubstanz	Mokshärte
Aluminium	2,3 - 2,9
Eisen	3,5 - 4,5
Stahl	7
Graphit	1 - 2
Glas	6 - 6,5
Rubin, Smaragd, Saphir	9

### 8.1.3 Thermische Eigenschaften von Festkörpern

a.) Thermische Expansion



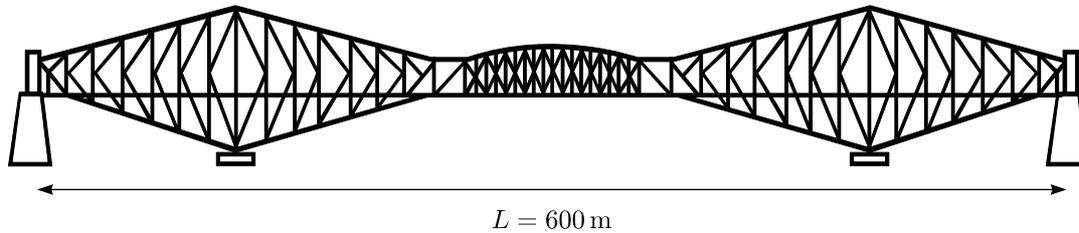
Es ergibt sich folgende Längenänderung:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

$\alpha \hat{=}$  linearer Ausdehnungskoeffizient

**Beispiele:**

Material	Ausdehnungskoeffizient $\alpha \left[ \frac{1}{\text{K}} \right]$
Aluminium	$24 \cdot 10^{-6}$
Stahl	$10 \cdot 10^{-6}$
Quarz	$0,4 \cdot 10^{-6}$
Glas	$9 \cdot 10^{-6}$

**Beispiel: Wärmeausdehnung einer 600 m langen Stahlbrücke Winter/Sommer**

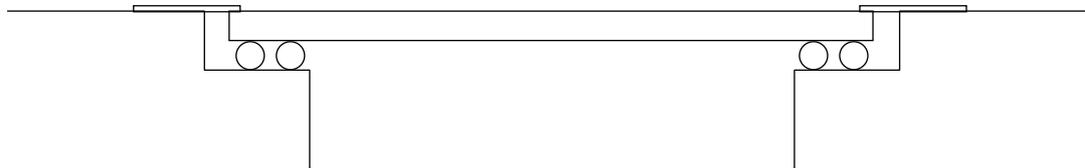
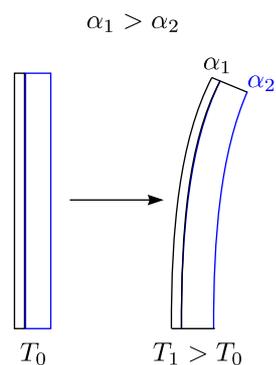
$$T_1 = -40^\circ\text{C}, T_2 = +40^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 80 \text{ K}$$

$$\alpha_{\text{Stahl}} = 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$$

$$\Delta L = L \cdot \alpha \cdot \Delta T = 600 \text{ m} \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{K}} \cdot 80 \text{ K} = 48 \text{ cm (!)}$$

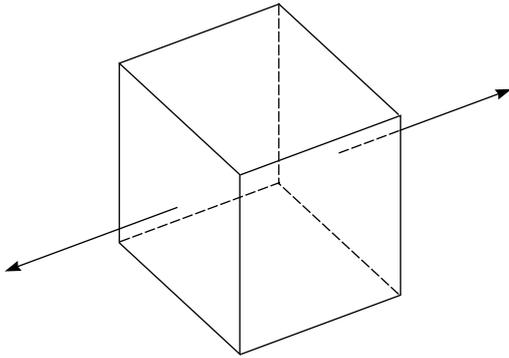
Die Brücke wird auf beiden Seiten um 24 cm länger.

**Technische Lösung: Schwelle:****Anwendung: Bimetallstreifen**

Der Bimetallstreifen wird unter anderem verwendet für:

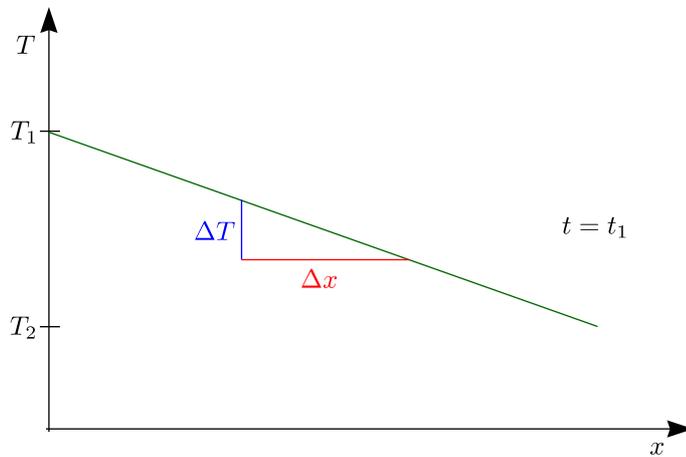
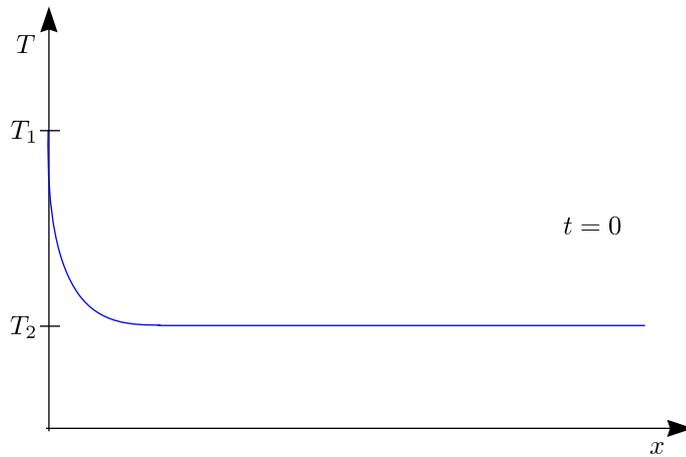
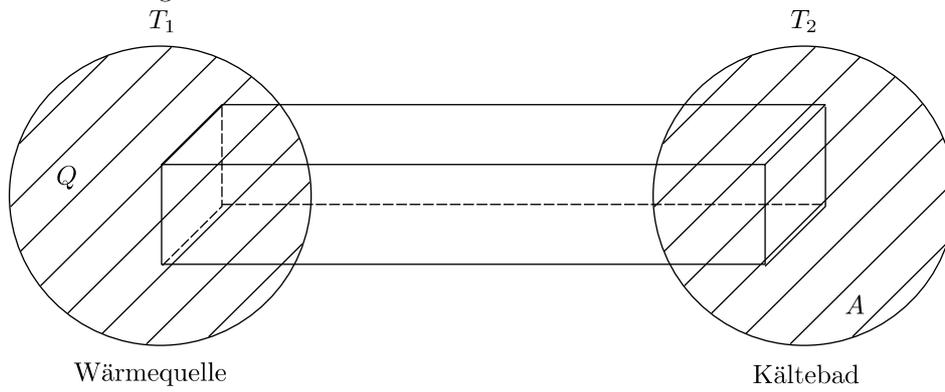
- \* Temperaturmessung
- \* Thermostaten

Volumenänderung:



$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta(L^3)}{L^3} = \frac{3L^2 \Delta L}{L^3} = 3 \frac{\Delta L}{L} = 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

b.) Wärmeleitung



Material homogen, keine seitlichen Wärmeverluste

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx}$$

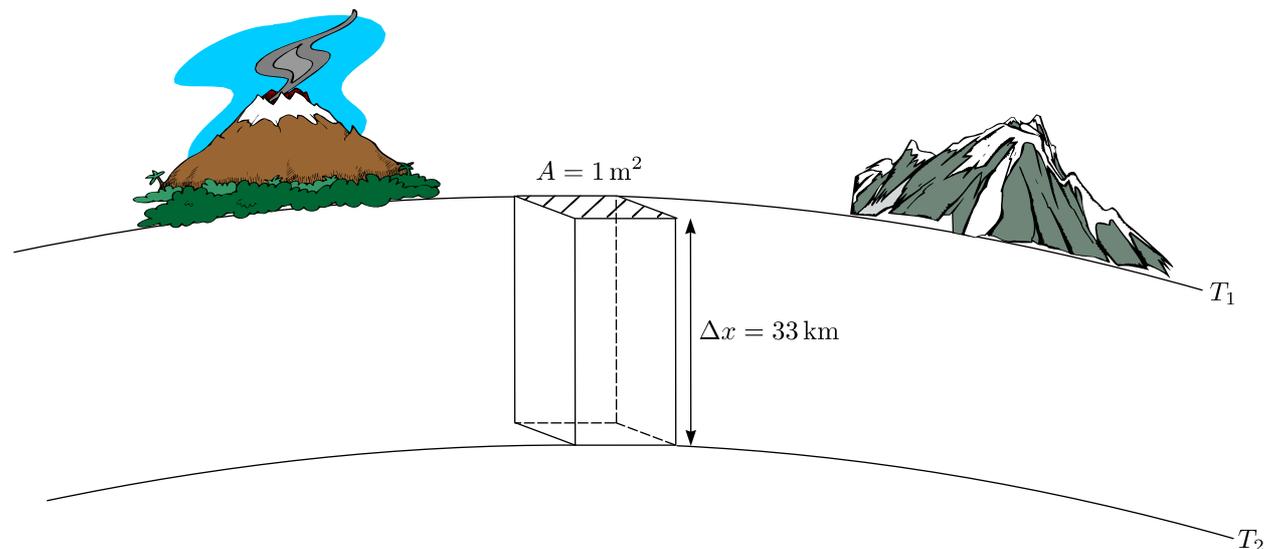
$$\frac{dQ}{dt} \hat{=} \text{transportierte Wärmemenge}$$

$$\lambda \hat{=} \text{thermische Leitfähigkeit}$$

$$\frac{dT}{dx} \hat{=} \text{Temperaturgefälle}$$

**Beispiele:**

Material	Thermische Leitfähigkeit $\lambda \left[ \frac{\text{W}}{\text{mK}} \right]$
Silber	420
Aluminium	220
Gestein	2,5
Wasser	0,6
Luft	0,026

**Beispiel: Wärmefluß durch Erdkruste**

$$\frac{dQ}{dt} = 0,054 \text{ W}$$

Für  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  wollen wir  $T_2$  berechnen:

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta x \cdot \frac{dQ}{dt}}{\lambda \cdot A} = 713^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow T_2 = 723^\circ\text{C}$$

## 8.2 Mechanik von Flüssigkeiten

### 8.2.1 Hydrostatik

Dichtgepackte Systeme ohne starre Anordnung der Atome.

Näherung: inkompressibel, kein Widerstand gegen Scherkräfte

#### Charakteristische Größen:

a.) Dichte

$$\rho = \frac{M}{V}$$

Symbol	Element/Stoff/Umgebung	Dichte $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
Os	Osmium	23 = $23 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Pt	Platin	21
Au	Gold	19
Hg	Quecksilber	13,6
Pb	Blei	11
	Olivenöl	0,9
	Wasser	1,0
	Quarz	2,5
	Neutronenstern, Kernmaterie	$\sim 10^{17}$
	Luft	1,3
	Bestes Vakuum	$10^{-17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Die Erde hat im Mittel eine Dichte von  $5,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

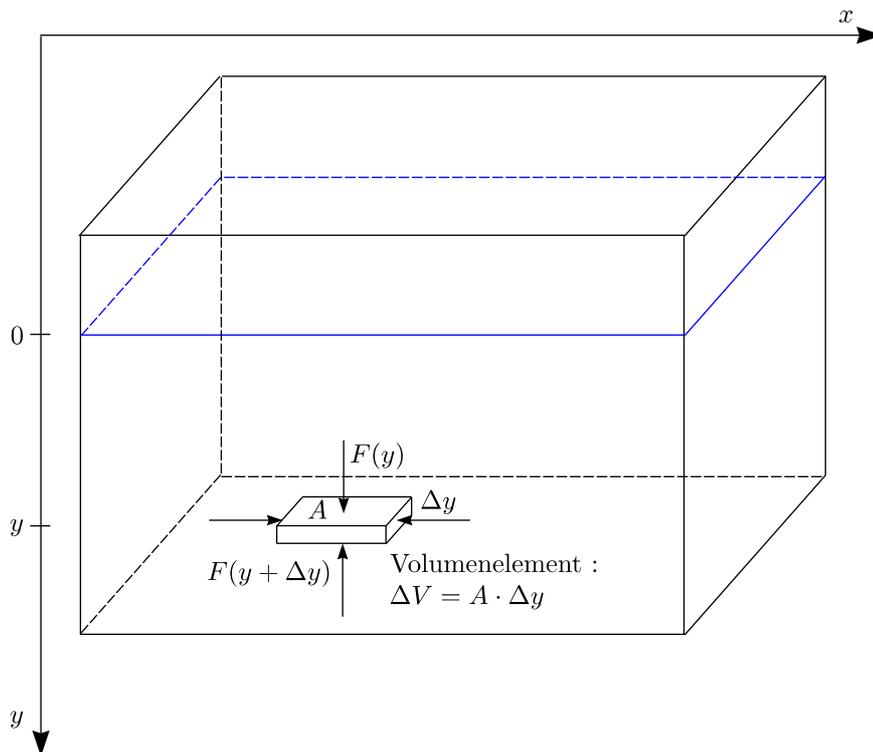
b.) Druck

$$P = \frac{F}{A}, \text{ wobei } F \perp A$$

$$[P] = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal} \equiv 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Auch  $1 \text{ atm} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \hat{=} 760 \text{ Torr} (760 \text{ mm Hg})$

## 8.2.2 Hydrostatischer Druck durch Gravitation



$$F(y) = P(y) \cdot A$$

$$F(y + \Delta y) = P(y + \Delta y) \cdot A$$

$\Delta V$  wird nicht beschleunigt, daher ist die Summe aller Kräfte gleich Null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 :$$

$$P(y) \cdot A + M \cdot g - P(y + \Delta y) \cdot A = 0$$

Somit gilt:

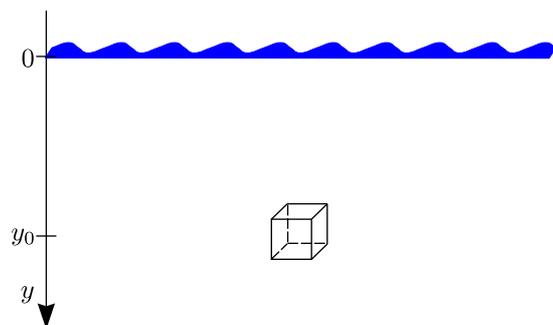
$$A \cdot P(y + \Delta y) - A \cdot P(y) = A \cdot \Delta P = \rho \cdot g \cdot A \cdot \Delta y$$

$$\Delta y \mapsto 0, \Delta P \mapsto 0 :$$

$$\frac{dP}{dy} = \rho \cdot g$$

Wenn man dies integriert, folgt:

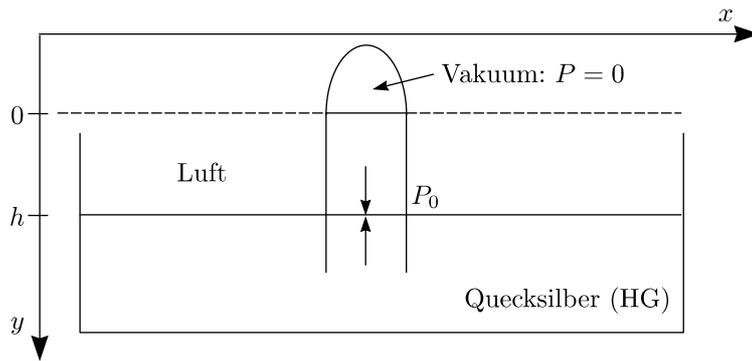
$$P(y) = P_0 + \rho \cdot g \cdot y \text{ (Pascals Gesetz)}$$

Beispiel: Wasserdruck in 60 m Tiefe

$$P(y_0) = P_0 + \rho_{H_2O} \cdot g \cdot y_0 = 1,01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} + 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 60 \text{ m} \approx 6,9 \text{ bar}$$

**Anwendungen:**

a.) Barometer



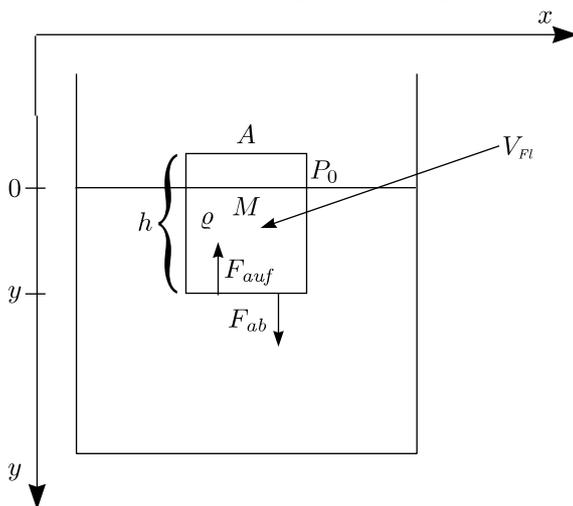
$$y = h : P(h) = P_0 = \rho_{\text{Hg}} \cdot g \cdot h$$

Damit gilt für die Höhe:

$$h = \frac{P_0}{\rho_{\text{Hg}} \cdot g} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{13,6 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 760 \text{ mm (0,76 m)}$$

b.) Auftrieb

Schwimmende oder getauchte Objekte verdrängen Flüssigkeitsvolumen mit ihrem eigenen Volumen. Wenn  $V_{\text{Objekt}} \cdot \rho_{\text{Objekt}} < V_{\text{Flüssigkeit}} \cdot \rho_{\text{Flüssigkeit}}$ , dann schwimmt der Körper. Andernfalls sinkt er.



$$F_{\text{auf}} = P_0 \cdot A + \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A \cdot y$$

$$F_{\text{ab}} = P_0 \cdot A + M \cdot g = P_0 \cdot A + \rho \cdot g \cdot h \cdot A$$

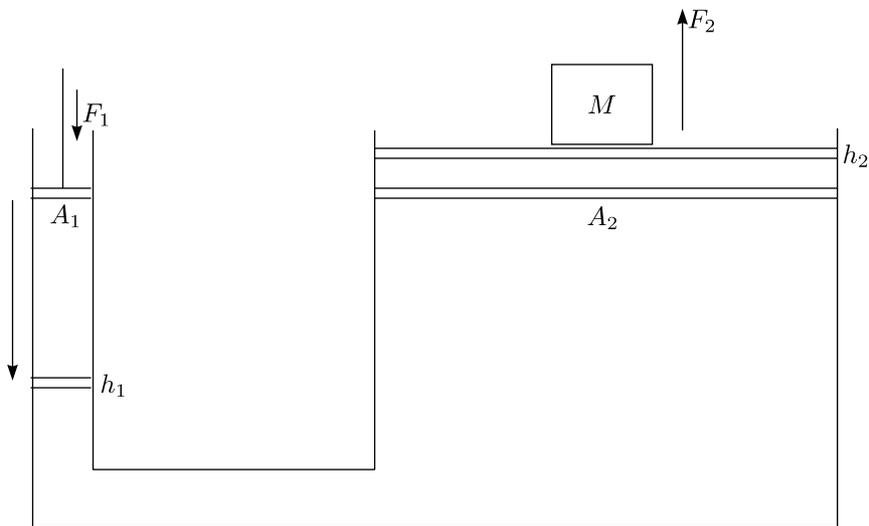
$$F_{\text{auf}} - F_{\text{ab}} = \Delta F = A \cdot g \cdot (\rho_{\text{Fl}} y - \rho_{\text{Fl}} \cdot h)$$

\* Falls  $\rho_{\text{Fl}} \cdot V_{\text{Fl}} = \rho \cdot V = \Delta F = 0$ , schwimmt der Körper.

\* Falls  $\rho_{\text{Fl}} V_{\text{Fl}} > \rho \cdot V$  treibt er auf.

\* Falls  $\rho_{\text{Fl}} V_{\text{Fl}} < \rho \cdot V$  sinkt er.

c.) Hydrostatischer Körper/Hydraulische Presse



$$P_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} = P_2 \quad (P_1 = P_2)$$

Wir vernachlässigen den Gravitationsdruck:

$$F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Versobenes Volumen ist gleich:

$$V_1 = h_1 \cdot A_1 = h_2 \cdot A_2 = V_2$$

$$h_2 = h_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

### Beispiel:

a.) Welche Masse  $M$  kann mit der Kraft  $F_1$  angehoben werden?

$$A_1 = 1 \text{ cm}^2, A_2 = 100 \text{ cm}^2, F_1 = 100 \text{ N}$$

$$\Rightarrow M = \frac{F_2}{g} = \frac{P_2 \cdot A_2}{g} = \frac{P_1 \cdot A_2}{g} = \frac{F_1}{g} \cdot \frac{A_2}{A_1} = \frac{100 \text{ N}}{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \cdot 100 = 1020 \text{ kg}$$

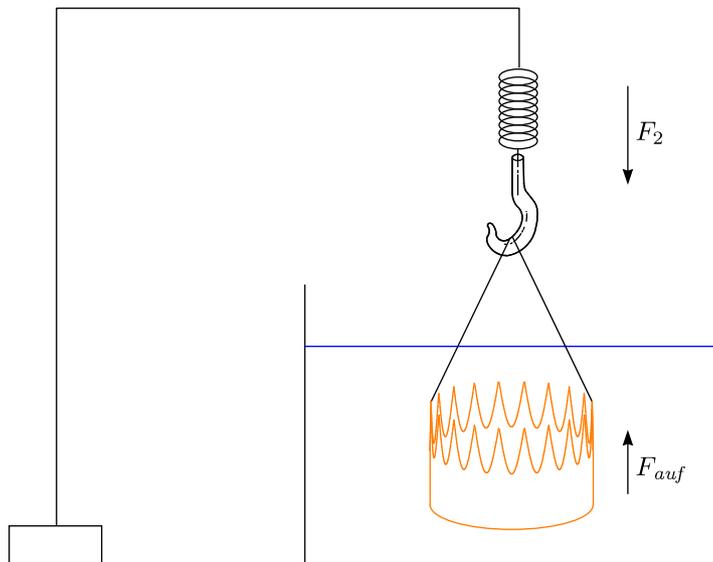
b.) Wie hoch wird  $M$  gehoben?

$$h_1 = 30 \text{ cm}$$

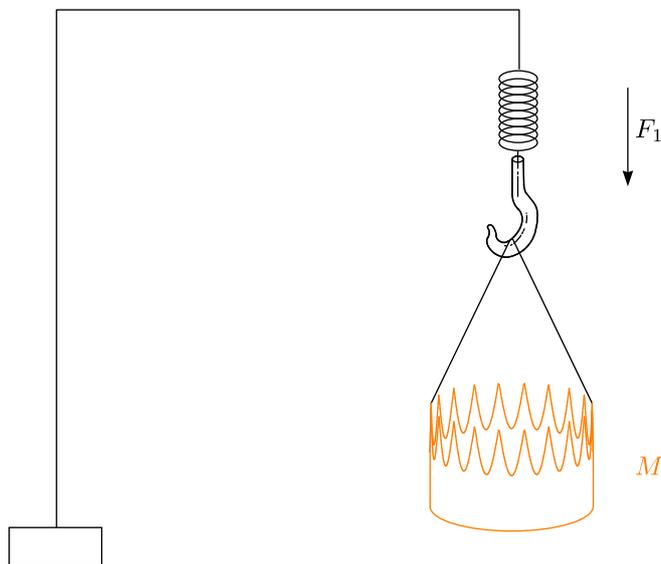
$$h_2 = h_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = 0,3 \text{ cm}$$

Will man höher heben, muß man pumpen.

d.) Bestimmung der Dichte von Objekten (Archimedes, Goldkrone)



$$F_2 = M \cdot g - F_{auf} = 50 \text{ N}$$



$$F_1 = M \cdot g = 45 \text{ N}$$

Daraus ergibt sich dann nach weiterer Rechnung:

$$F_{auf} = M \cdot g - F_2 \stackrel{!}{=} \rho_{Fl} \cdot g \cdot V$$

$$\boxed{V = \frac{M \cdot g - F_2}{\rho_{Fl} \cdot g}} = 510 \text{ cm}^3$$

Damit ergibt sich dann die Dichte der Krone:

$$\rho_{Krone} = \frac{M}{V} = M \cdot \frac{\rho_{Fl} g}{Mg - F_2} = 10 \cdot \rho_{Fl} = 10^4 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Es handelt sich also „nur“ um golden angemaltes Blei!

### Experiment: Dichte eines Steins

$$F_1 = M \cdot g = 1,04 \text{ N}$$

$$F_2 = M \cdot g - F_{auf} = M \cdot g - \rho_{Fl} \cdot g \cdot V = 0,64 \text{ N}$$

Damit ergibt sich dann das Volumen des Steins:

$$V = \frac{M \cdot g - F_2}{\rho_{Fl} \cdot g} = \frac{0,4 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 40 \text{ cm}^3$$

Damit folgt für die Dichte:

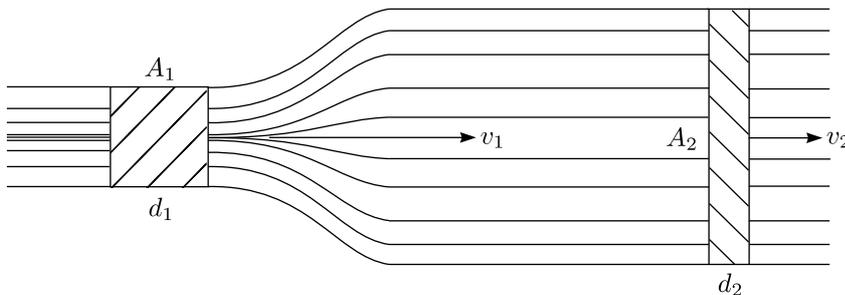
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1,04 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3} = 2,5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

### 8.2.3 Hydrodynamik

Jede organisierte Bewegung von nicht-festen Multiteilchensystemen wird Fließen genannt und durch die Hydrodynamik beschrieben.

#### Ideale Strömungen:

- Flüssigkeit inkompressibel
- keine Viskosität
- Turbulenz (d.h. nur laminare Strömungen)
- $\rho = \text{const.}$



$$d_1 = v_1 \cdot \Delta t, d_2 = v_2 \cdot \Delta t$$

Das Volumen in  $\Delta t$  ist konstant. Das heißt:

$$V_1 = A_1 d_1 = A_1 v_1 \Delta t = A_2 d_2 = A_2 v_2 \Delta t = V_2 = \text{const.}$$

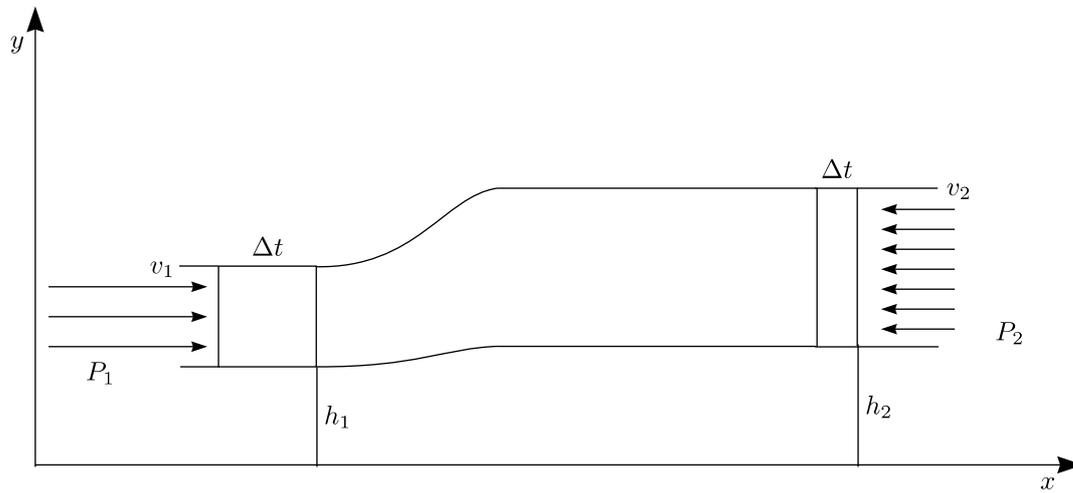
#### Fluß:

$$\phi = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \phi = A \cdot v = \text{const.} \text{ (Kontinuitätsgleichung)}$$

#### Die Bernoulli-Gleichung:

Bewegte Flüssigkeiten ist Ansammlung von sich bewegenden Massenpunkten. Damit gelten Newtons Gesetze.



Der Druck leistet Arbeit:

$W \equiv \text{Arbeit} \equiv \text{Kraft} \times \text{Weg}$

$$W_1 = P_1 \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot dt$$

$$W_2 = -P_2 \cdot A_2 \cdot v_2 \cdot dt$$

$$W = W_1 + W_2 = (P_1 - P_2) \cdot \underbrace{v \cdot A}_{\phi = \text{const.}} \cdot dt$$

$$\Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta h = \underbrace{\rho \cdot v \cdot A \cdot dt}_m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \rho \cdot v \cdot A \cdot dt (v_2^2 - v_1^2)$$

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k$$

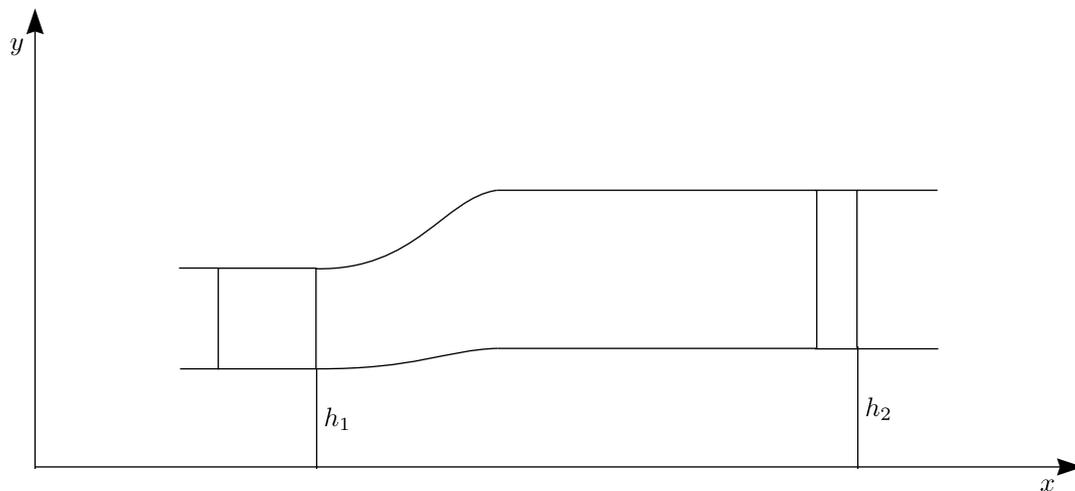
$$\Rightarrow (P_1 - P_2) \cdot v \cdot A \cdot dt = \rho \cdot v \cdot A \cdot dt \cdot g \cdot (h_2 - h_1) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v \cdot A \cdot dt \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const.} \quad (\text{Bernoullis Gleichung, 1783})$$

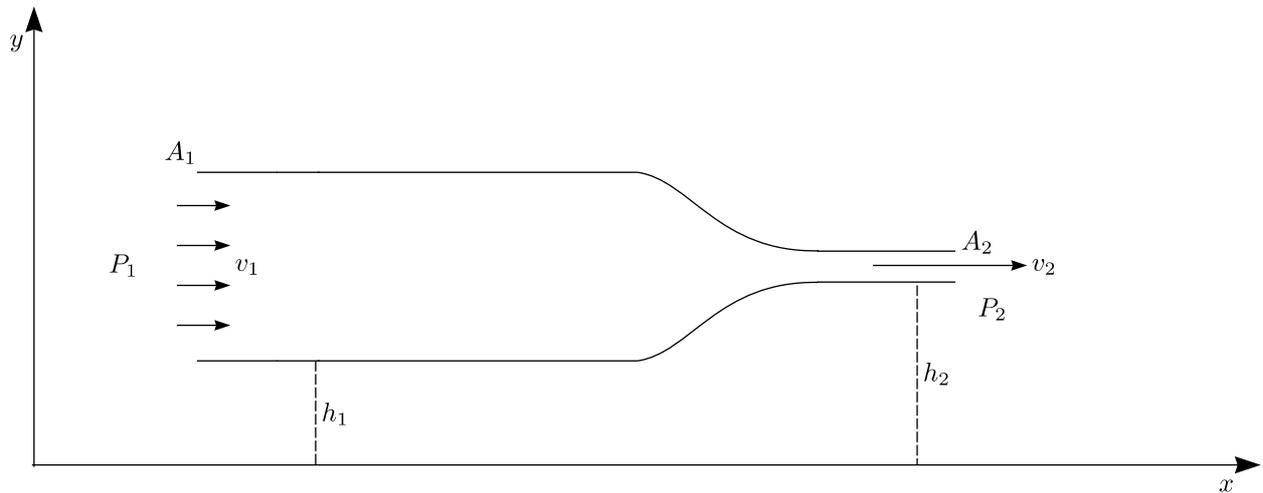
**Spezialfälle:**

a.) Flüssigkeit in Ruhe:  $v = 0$



$$P + \rho \cdot g \cdot h = \text{const.} \quad (\text{Pascals Gesetz})$$

b.) Flüssigkeit fließt horizontal ( $g=0$ )



$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2) = P_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$

Für  $A_1 > A_2$  folgt  $P_2 < P_1$ .

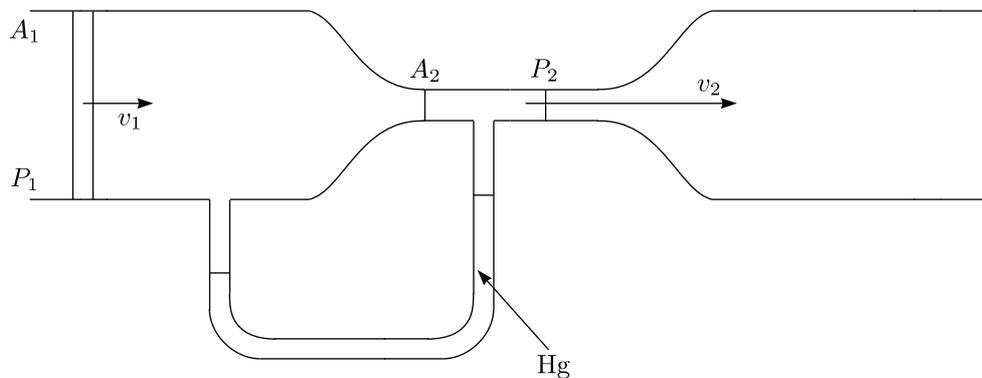
**Beispiel:**

Es sei  $P_1 = 2$  bar,  $A_1 = 1 \text{ m}^2$ ,  $v_1 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $A_2 = 0,1 \text{ m}^2$ . Damit folgt:

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$P_2 = 1,5 \text{ bar}$$

**Anwendung: Strömungsmeißinstrument**



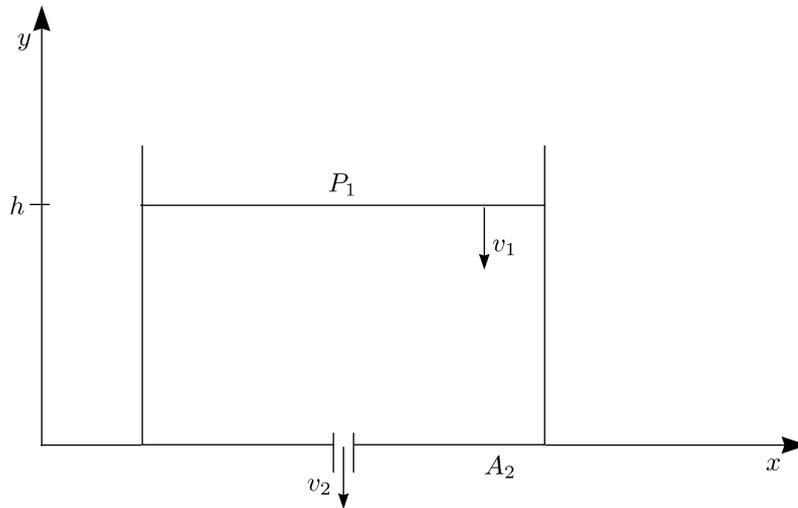
bestimmt  $\Delta p = p_1 - p_2$

Messung von  $\Delta p, A_1, A_2$  :

$$\phi = A_1 \cdot v_1 = A_1 \cdot \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho \left( \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right)}}$$

**Beispiel:**

Wir betrachten ein zylindrisches Faß mit Loch im Boden (Durchmesser=1 cm).



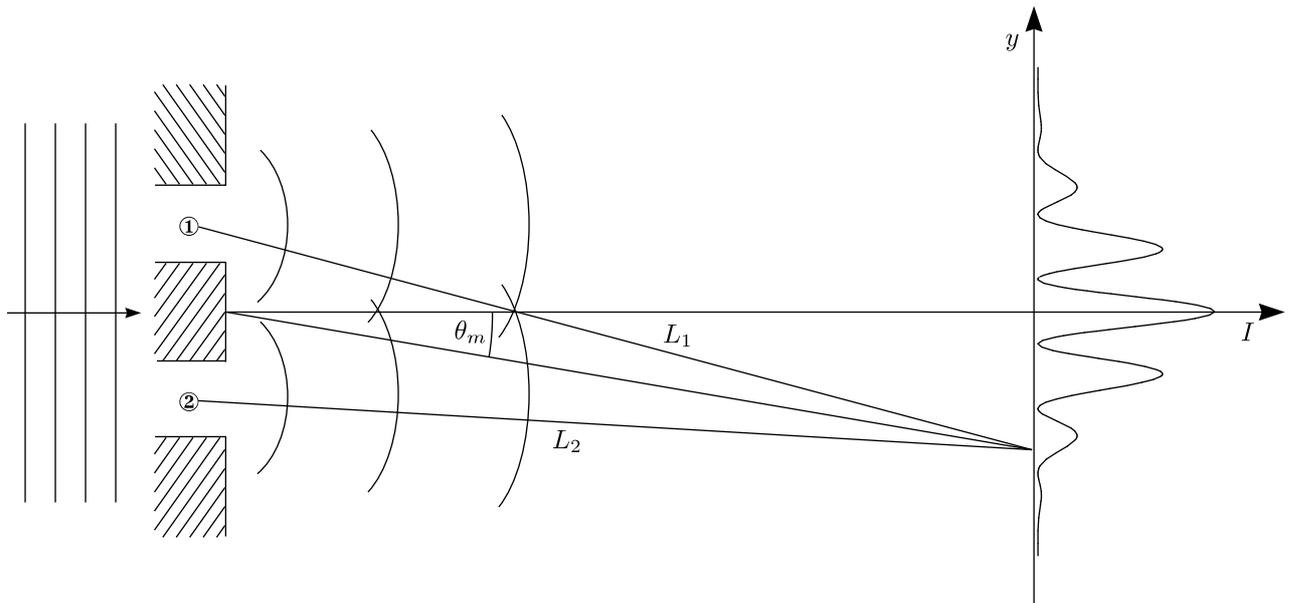
$$P_1 = ?$$

$$P_2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (h = 0)$$

$$P_1 + \rho gh = P_2$$

### 8.3 Licht und Materie - Korpuskel und Welle

#### 8.3.1 Licht als elektromagnetische Welle



$$\Delta L = |L_1 - L_2| = n \cdot \lambda$$

\* Maxima:

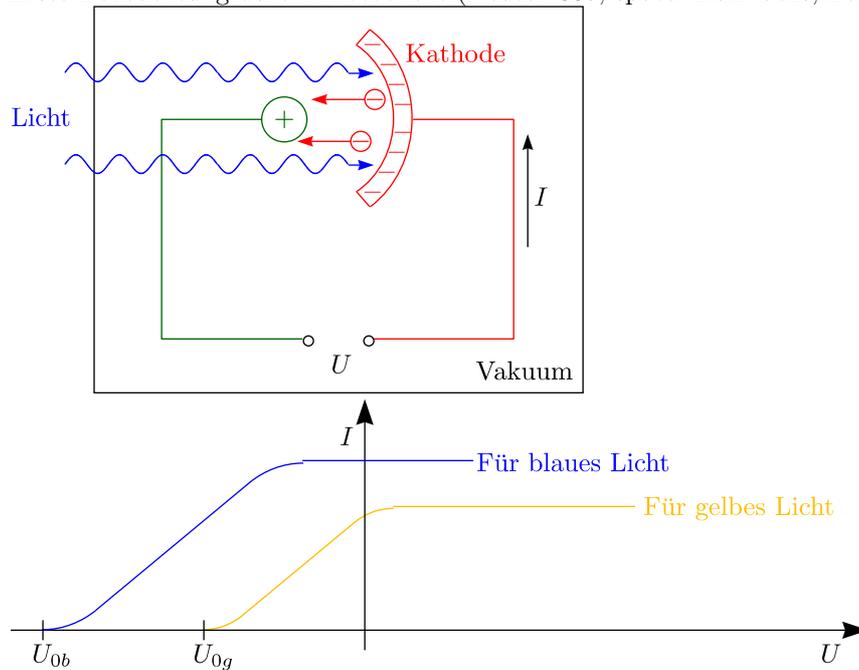
$$\sin \theta_n = \frac{n \cdot \lambda}{d}$$

\* Minima:

$$\sin \theta_n = \frac{(n + \frac{1}{2}) \cdot \lambda}{d}$$

### 8.3.2 Licht als Koruskel

Erste Beobachtung durch Photoeffekt (Heute 1887, später Hallwacks, Lenard)



#### Interpretation:

Das Licht gibt dem Elektron einen „Schubs“, der umso stärker ist, je größer die Frequenz  $\nu$  des verwendeten Lichtes ist. Planck stellte diese Theorie um 1900 auf; Einstein erhielt 1905 dafür den Nobelpreis.

$$E_\gamma \propto \nu_{Licht}$$

$$E_\gamma = h \cdot \nu$$

Licht besteht aus einzelnen Koruskeln („Photonen“).

$$E_\gamma = h \cdot \nu = h \cdot \frac{\omega}{2\pi} \equiv \hbar \cdot \omega$$

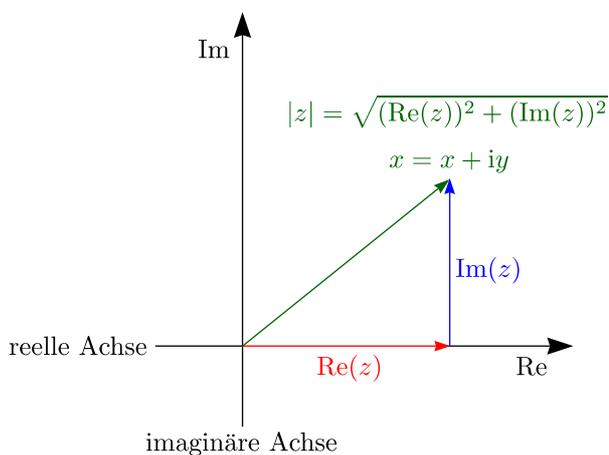
$h$  nennt man das Plancksche Wirkungsquantum. Dessen Wert beträgt  $6,626 \cdot 10^{-34}$  Js. Eine interessante Konsequenz hieraus ist:

$$E = h \cdot \nu = mc^2$$

Damit erhält man die kinetische Masse eines Photons:

$$m_\gamma = \frac{h \cdot \nu}{c^2}$$

#### Exkurs: Komplexe Zahlen

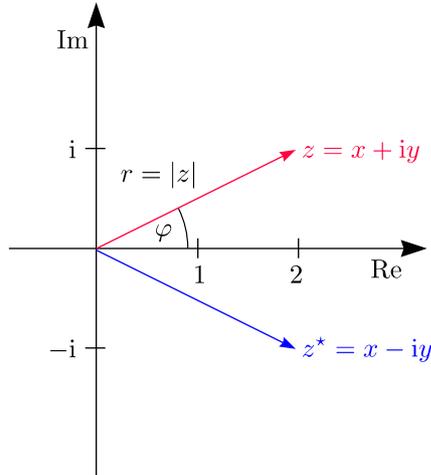


Eulersche Darstellung und Polarkoordinaten-Darstellung einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  sind äquivalent:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin \varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos(\varphi) - i \sin(\varphi)$$

Der Beweis erfolgt mit den Taylorentwicklungen der Funktionen  $e^x$ ,  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$ .



$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$z = x + iy$$

$$z = r (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$z = r e^{i\varphi}$$

Der Betrag folgt anschaulich mittels des Satzes von Pythagoras anwendbar auf die Darstellung in der komplexen Zahlenebene:

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Die Projektionen auf die jeweiligen Achsen ergeben sich durch:

$$\operatorname{Re}(z) = x = r \cos(\varphi)$$

$$\operatorname{Im}(z) = y = r \sin(\varphi)$$

Die konjugiert komplexe Zahl folgt durch Spiegelung an der reellen Achse:

$$z = x + iy \quad z^* = x - iy$$

$$z = r e^{i\varphi} \quad z^* = r e^{-i\varphi}$$

Des weiteren lassen sich damit Sinus und Kosinus mit komplexen Exponentialfunktionen darstellen:

$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

### 8.3.3 Materie als Welle

Bei Licht besteht ein sogenannter Dualismus Welle - Korpuskel. Für den Impuls einer elektromagnetischen Welle ergibt sich:

$$m \cdot c = \frac{h \cdot \nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

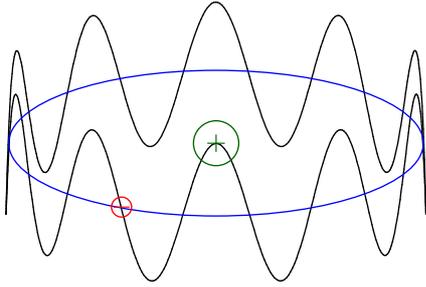
Im Jahre 1923 stellte De Broglie die Theorie auf, daß Materie analog zu Licht eine Wellennatur besitzt:

$$m \cdot v = \frac{h}{\lambda}$$

Hieraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

\* Beugung und Interferenzeffekte von Teilchen (beispielsweise  $e^-$ ,  $n$ , ...)

\* Diskrete Energiezustände im Atom

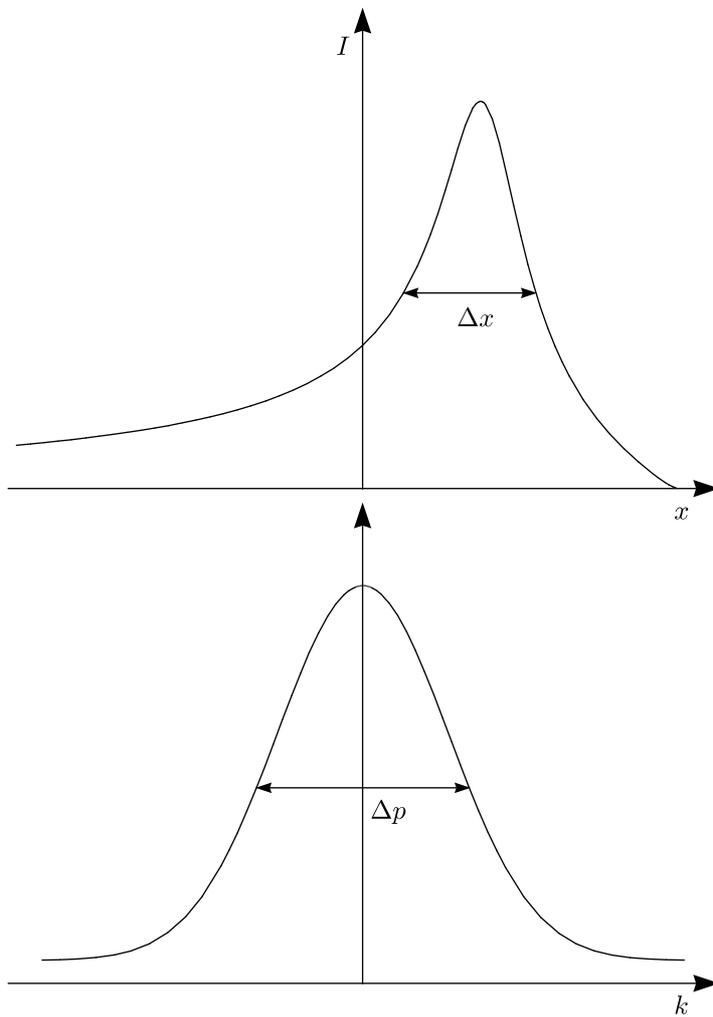


Das Elektron formt eine stehende Welle.

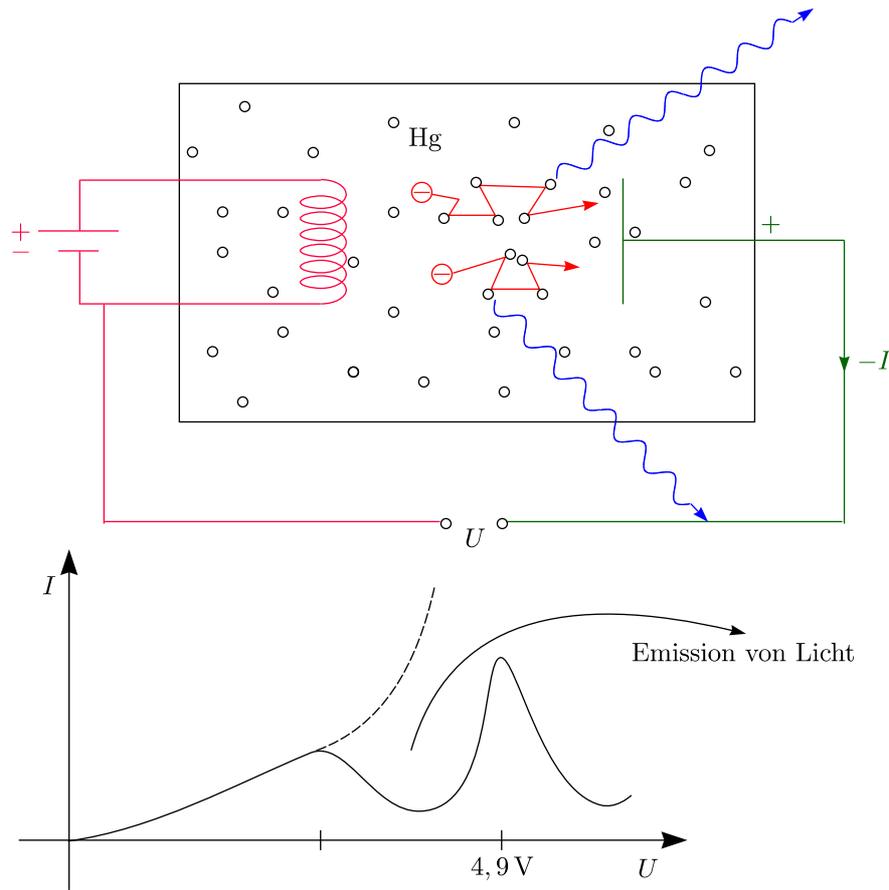
\* Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \gtrsim h$$

Materieteilchen treten als Wellenpakete auf.



**Nachweis zur Energiequantelung: Franck-Hertz-Versuch (1914):**



**8.3.4 Elektromagnetische Wellen im Vakuum im Dreidimensionalen**

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = c^2 \Delta \cdot \Psi(\vec{r}, t)$$

Wir machen folgenden Ansatz:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int d^3k \underbrace{a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}}_{\text{Harmonische Welle}}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich:

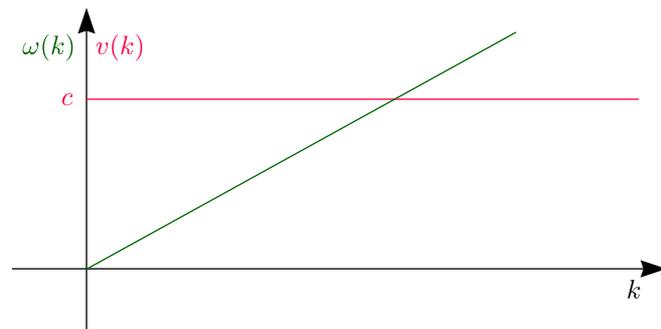
$$(-i\omega)^2 \cdot \Psi(\vec{r}, t) = (ik)^2 \cdot \Psi(\vec{r}, t)$$

Hieraus folgt dann:

$$\omega^2 = c^2 \vec{k}^2$$

Hieraus folgt nun die Dispersionsrelation für freie Lichtwellen im Vakuum:

$$\omega = c \cdot k$$



Auch gilt:

$$\omega = c \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \nu \cdot \lambda = c$$

### 8.3.5 Materiewellen

Wir benutzen die Formel für die de Broglie-Wellenlänge:

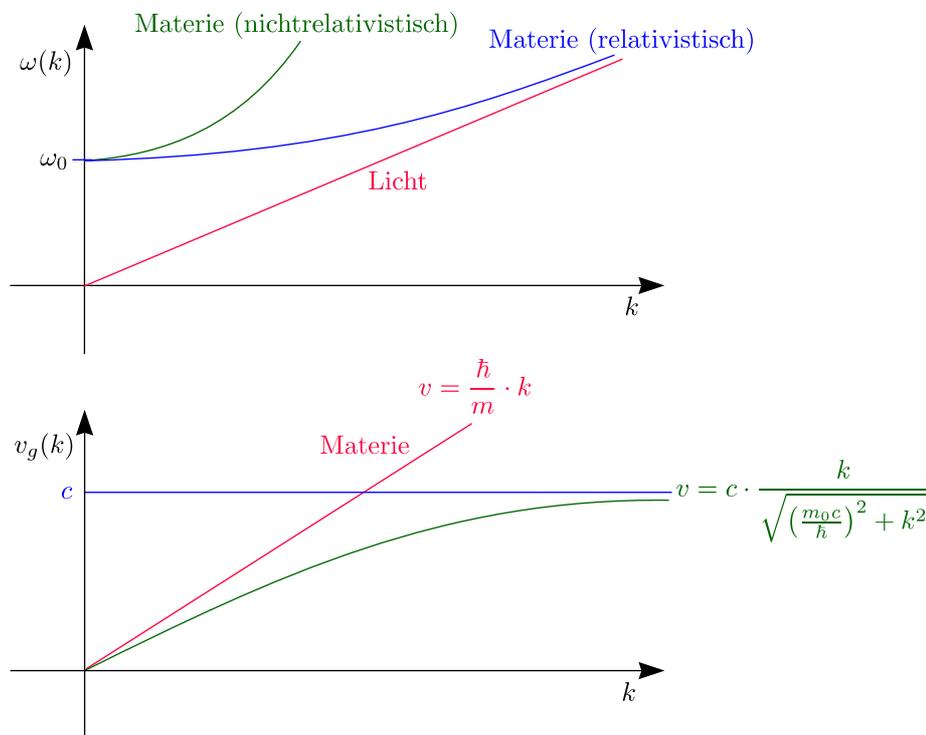
$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

Damit gilt:

$$v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{\hbar}{m} \cdot k$$

Dies entspricht der Gruppengeschwindigkeit  $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ . Somit gilt durch Integration:

$$\omega(k) = \omega_0 + \frac{\hbar}{2m} k^2$$



Relativistisch korrekt ist folgendes:

$$\omega(k) = c \cdot \sqrt{k_0^2 + k^2} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2}$$

\* 1.Fall:  $k \ll k_0$

$$\omega(k) \approx c \cdot k_0 + \frac{c}{2k_0} k^2$$

\* 2.Fall:  $k \gg k_0$

$$\omega(k) \approx c \cdot k$$

Damit gilt durch partielles Ableiten nach  $k$ :

$$v(k) = \frac{\partial}{\partial k} \omega = c \cdot \frac{k}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2}}$$

**Wellengleichung für Materiewellen:**

Die nichtrelativistische Schrödingergleichung lautet:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t)$$

Da es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, machen wir wieder einen Ansatz als Fouriertransformierte:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Durch Einsetzen von  $\Psi(\vec{r}, t)$  in die Schrödingergleichung, erhält man:

$$\omega(k) = \frac{\hbar}{2m} k^2 \text{ für } k \ll k_0$$

**Wellengleichung für relativistische Materiewellen:**

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta + \left( \frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

Man nennt diese auch Klein-Gordan-Gleichung. Es wird wieder der Ansatz als Fouriertransformierte verwendet:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d^3k a(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

Durch Einsetzen resultiert:

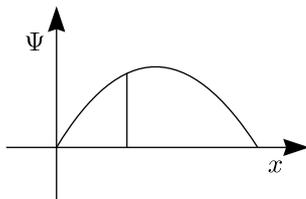
$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + k^2 = 0$$

Für  $m_0 \mapsto 0$  (Photonen) folgt aus der Klein-Gordon-Gleichung die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen.

**Interpretation von  $\Psi$ :**

\* Saite:

$\Psi$  ist die Auslenkung (= z).



\* Elektromagnetische Wellen:

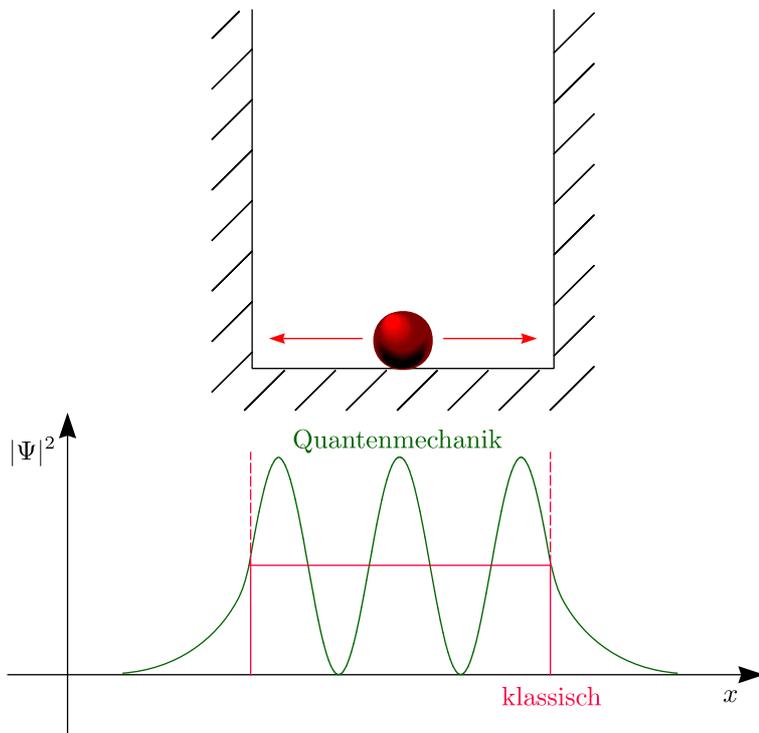
$\Psi$  ist die Feldstärke.

\* Materie:

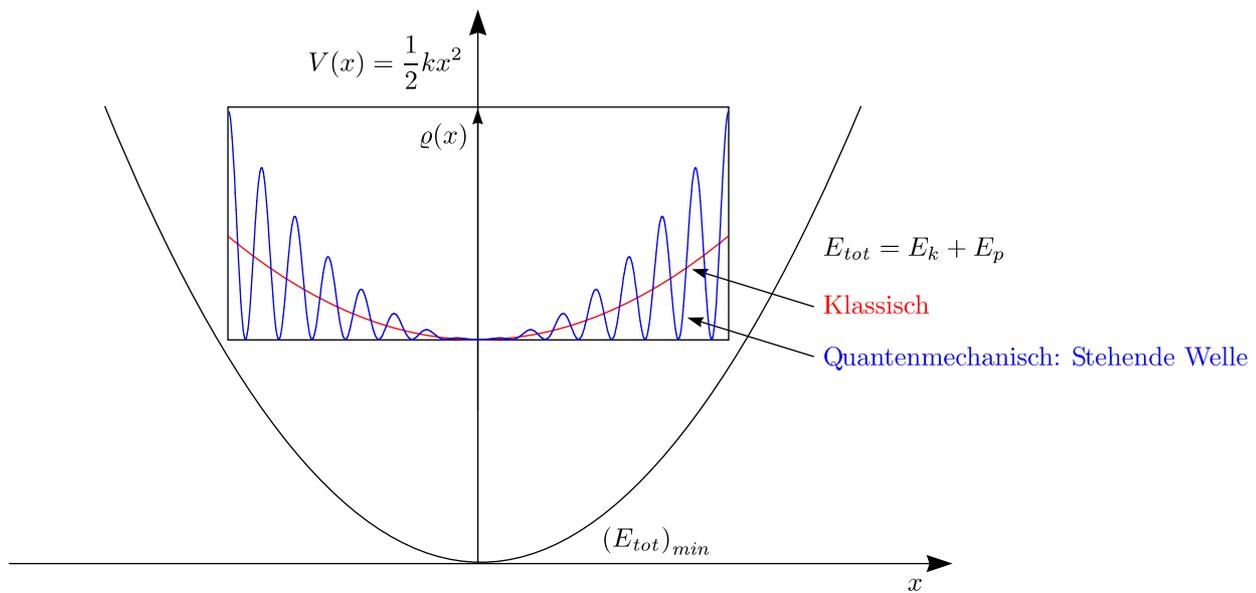
$\Psi$  ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude.

$\varrho(\vec{r}, t) = |\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$  wird als Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretiert. Es gilt folgende sehr wichtige Normierungsrelation:

$$\boxed{\int_{V \mapsto \infty} \varrho d^3r = 1}$$



**Illustration von Feder-Pendel (harmonischer Oszillator):**



Da sich nur stehende Materiewellen im Potential befinden, sind nur diskrete Energieniveaus möglich. Dies führt also zu einer Quantelung der Energie.



# Anmerkungen:

- Sprechstunde: Di 11:30 Uhr - 12:30 Uhr oder Frau Weißmann unter (3521)
- E-Mail-Adresse: [Wim.deBoer@Physik.uni-karlsruhe.de](mailto:Wim.deBoer@Physik.uni-karlsruhe.de)
- Internetadressen:
  - Professor: [www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer](http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~deboer)
  - Übungsleiter: [www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~Wagner](http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~Wagner)
- Literatur:
  - HOLLIDAY/RESNIK Physik 1 (de Gruyter)
  - DEMTRÖDER Experimentalphysik (Springer)
  - TIPLER Physik (Spectrum)
  - GERTHSEN Physik (Springer)