Mechanik

Experimentalphysik 1

Professor Weiß

Abschrift von Matthias Blaicher
Grafiken von Daniela Mockler

Karlsruhe, 19. Februar 2009

Inhaltsverzeichnis

I Einführung **8**

1 Was ist Physik **8**

2 Teilgebiete der Physik **8**

3 Aktuelle Forschungsgebiete **8**

4 Physikalische Größen & Maßeinheiten **9**

5 Basisgrößen und Basiseinheiten **9**

6 Zeitmessung **9**
6.1 Allgemein . . . 9
6.2 Messung kurzer Zeiten . . . 9
6.2.1 Sekundenpendel . . . 9
6.2.2 Schwingquarz . . . 10
6.2.3 "Cäsium"-Atomuhr . . . 10
6.3 Messung langer Zeiten . . . 10
6.3.1 Radioaktiver Zerfall . . . 10
6.3.2 Messen . . . 10
6.3.3 ^{14}C-Methode . . . 11
6.3.4 ^{14}C-Zerfall . . . 11

7 Längenmessung **11**
7.1 Große Abstände . . . 11
7.1.1 Sinussatz der Geometrie . . . 11
7.2 Kleine Abstände . . . 11

8 Messfehler **12**
8.1 Fehlerfortpflanzung . . . 12
8.2 Mathematischer Einschub: Partielle Ableitung . . . 12

II Kinematik des Massepunkts **13**

9 Bewegung im eindimensionalen Raum **14**

10 Bewegung im dreidimensionalen Raum **15**

11 Würfe im Gravitationsfeld der Erde. **16**

12 Kreisbewegungen **17**
12.1 Allgemeine Kreisbewegung . . . 17
12.2 Gleichförmige Kreisbewegung . . . 17

13 Zusammenfassung **17**

III Newtonsche Axiome **17**

14 Trägheitsprinzip **17**
14.1 Historisches . . . 18

14.2 Bewegte Bezugsysteme . . . 18
14.2.1 Koordinatentransformation . . . 18
14.3 Intertialsystem . . . 18
14.4 Grenzen der Galilei-Transformation . . . 19
14.5 Aktionsprinzip . . . 19
14.6 Reaktionsprinzip . . . 19
14.7 Von Massen und Kräften . . . 19
14.7.1 Hookesches Gesetz . . . 19
14.7.2 Zerlegung von Kräften . . . 20
14.7.3 Kräfte in der Natur . . . 21

15 Gravitation **21**
15.1 In der Nähe der Erdoberfläche . . . 21
15.1.1 Mathematischer Einschub: Taylor Reihe . . . 22
15.2 Feier Fall . . . 22
15.3 Verlangsamter Fall . . . 22
15.3.1 Schiefe Ebene (ohne Reibung) . . . 22
15.3.2 Feste Rolle . . . 23
15.4 Bestimmung der Gravitationskonstanten γ . . . 23
15.5 Fadenpendel . . . 25
15.5.1 Lösungsansatz der DGL . . . 25
15.6 Harmonischer Oszillator . . . 26

16 Kontaktkräfte **26**
16.1 Typische Kraft-Abstandsabhängigkeit . . . 27
16.2 Reibung . . . 27
16.2.1 Haftreibung . . . 27
16.2.2 Gleitreibung . . . 28
16.2.3 Rollreibung . . . 28
16.3 Strömungswiderstand . . . 28
16.3.1 Stokesche Reibung, viskose Reibung . . . 29
16.3.2 Newtonsche-Reibung . . . 29

17 Zentralbewegungen **29**
17.1 Gleichförmige Kreisbewegungen . . . 29
17.1.1 Beispiel: Satelliten-Kreisbahn . . . 30
17.2 Mathematischer Einschub: Vektoren . . . 30
17.2.1 Skalarprodukt . . . 30
17.2.2 Kreuzprodukt . . . 31
17.2.3 Rechenregeln . . . 31
17.3 Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ . . . 32
17.4 Beschleunigte Kreisbewegung . . . 32
17.5 Drehimpuls . . . 33
17.5.1 Zeitliche Änderung des Drehimpulses . . . 34

18 Die Kepler'schen Gesetze **34**
18.1 1. Keplergesetz: Ellipsensatz . . . 35
18.1.1 Die Ellipse . . . 35
18.2 2. Keplergesetz: Flächensatz . . . 35
18.2.1 Erklärung Newtons . . . 35
18.3 3. Keplergesetz . . . 36
18.3.1 Erklärung Newtons . . . 36

19 Scheinkräfte **36**
19.1 Freier Fall im beschleunigten System . . . 36
19.2 Beispiel: Fadenpendel . . . 37

19.3 Rotierende Bezugsysteme . . . 37
19.3.1 Zentrifugalkraft . . . 37
19.3.2 Corioliskraft . . . 38

20 Erhaltungssätze **38**
20.1 Arbeit . . . 38
20.1.1 Wegintegral . . . 39
20.1.2 Hubarbeit . . . 39
20.2 Leistung . . . 40
20.3 Kinetische Energie . . . 41
20.4 Potentielle Energie . . . 41
20.5 Energieerhaltungssatz . . . 41
20.6 Mathematischer Einschub: Gradient, Rotation, Divergenz . . . 43
20.7 Äquipotentialflächen . . . 43

21 Graviation II **43**
21.1 Kugelschale der Masse M . . . 44
21.2 Vollkugel der Masse M . . . 45

22 Impulserhaltung **46**
22.1 Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt . . . 47

23 Stoßprozesse **48**
23.1 Gerader, zentraler Stoß . . . 48
23.1.1 Elastischer Stoß . . . 48
23.1.2 Inelastischer Stoß . . . 49
23.1.3 Total inelastischer Stoß . . . 49
23.2 Nicht zentraler Stoß zweier elastischer Körper . . . 49
23.3 Stöße im Schwerpunktsystem . . . 50
23.4 Kontinuierlicher Impulsaustausch . . . 51

24 Energie- und Drehimpulserhaltung **51**

IV Mechanik starrer Körper 53

25 Kräfte am starren Körper **53**
25.1 Kräftepaare . . . 54
25.2 Gleichgewichtsbedingung der Statik . . . 54
25.3 Mechanische Energie eines starren Körpers . . . 54
25.4 Potentielle Energie bezgl. Erdanziehung . . . 55
25.5 Gleichgewichtslagen (x_0) . . . 55

26 Kinetische Energie **55**
26.1 Berechnung der Rotationsenergie . . . 56
26.2 Harmonischer Oszillator . . . 57

27 Trägheitsmomenten einfacher Körper **57**
27.1 Vollzylinder . . . 57
27.1.1 Symmetrieachse . . . 57
27.1.2 Restliche Achsen . . . 58
27.2 Rohr . . . 58
27.3 Hohlzylinder . . . 59
27.4 Kugel . . . 59
27.4.1 Vollkugel . . . 59
27.4.2 Kugelschale . . . 60

27.5 Quader 60

28 Satz von Steiner **61**
28.1 Beispiel: Kreisscheibe 61

29 Trägheitstensor **62**
29.1 Starre Körper aus m_i Massepunkten 63
29.2 Starrer, kontinuierlicher Körper 63
29.3 Trägheitsmoment eines Quaders 64
29.3.1 Experiment: Schuhkarton in freier Rotation 65
29.4 Wahl beliebiger Achsen 65

30 Rotationsenergie **66**

31 Kreiselbewegung **67**
31.1 Kräftefreier Kreisel 67
31.1.1 Spezialfall paralleler Drehimpuls und Achse 67
31.2 Nutation 67
31.3 Bewegung im rotierenden System 69
31.3.1 Transformation 69
31.4 Kreisel mit äußerem Drehmoment, Präzession 70
31.4.1 Präzession der Erde 72
31.5 Elementarer Drehimpuls 72
31.5.1 Bahnimpuls des Elektrons im Atom. 72
31.5.2 Eigenimpuls von Elementarteilchen, Spin 72
31.5.3 Drehimpulsänderung 72

V Mechanik deformierbarer Körper 73

32 Generelle Eigenschaften **73**
32.1 Festkörper 73
32.2 Flüssigkeiten 73
32.3 Gase 73
32.4 Kristaline Festkörper 73
32.5 Eigenschaften 74

33 Spannung und Drehnung **74**
33.1 Spannung 74
33.1.1 3-dimensionaler Festkörper 75
33.2 Drehung 76
33.3 Scherung 76
33.4 Verzerrungs- oder Deformationstensor 76
33.5 Spannung und Deformation 77
33.5.1 Hookesches Gesetz 77

34 In der Praxis **77**
34.1 Dehnung 78
34.1.1 Querdehnung 78
34.2 Allseitige Kompression 79
34.3 Scherung 80
34.4 Plastische Verformung 81
34.4.1 Relaxation 81
34.5 Elastische Energie 82
34.6 Mechanische Hysterese 83
34.7 Spezielle Geometrien 83

34.7.1 Verbiegung eines Stabes . . . 83
34.7.2 Torsion eines runden Stabes . . . 84

35 Ruhende Flüssigkeiten und Gase 84
35.1 Hydrostatik . . . 85
35.2 Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit . . . 85
35.3 Schweredruck in Flüssigkeiten . . . 86

36 Schweredruck in Gasen 87

37 Auftrieb 89

38 Grenzflächenphänomene 89
38.1 Oberflächenspannung . . . 89
38.2 Benetzung und Kapillarität . . . 90
38.2.1 Benetzung . . . 91
38.2.2 Kapillarität . . . 91
38.2.3 Aktuelle Forschung, Anwendungen . . . 91

39 Strömende Flüssigkeiten und Gase 92
39.1 Strömung idealer Flüssigkeiten . . . 92
39.1.1 Stationäre Strömung . . . 92
39.2 Viskose Strömung . . . 93
39.2.1 Strömung in einem zylindrischen Rohr . . . 94
39.3 Differentielle Beschreibung von Strömungen . . . 95
39.3.1 Kontinuitätsgleichung . . . 95
39.4 Eulergleichung . . . 96
39.4.1 Bernoulli-Gleichung . . . 96
39.4.2 Potentialströmung . . . 97
39.4.3 Grenzen der Diskussion . . . 97

VI Schwingungen und Wellen 97

40 Oszillatoren 97
40.1 Freier Oszillator mit Dämpfung . . . 97
40.1.1 Schwache Dämpfung ($\gamma < \omega$) . . . 98
40.1.2 Starke Dämpfung ($\gamma > \omega$) . . . 99
40.1.3 „aperiodischer Grenzfall“ ($\gamma = \omega$) . . . 99
40.2 Erzwungene Schwingung . . . 99
40.2.1 Resonanz . . . 100
40.2.2 Phasen . . . 100
40.3 Periodische aber nicht-harmonische Schwingung . . . 100
40.3.1 Fourieranalyse . . . 100
40.4 Gekoppelter Oszillator, Eigenschwingungen . . . 101
40.4.1 Zwei gekoppelte Pendel . . . 101
40.4.2 3 gekoppelte Oszillatoren (3-dimensional) . . . 101
40.4.3 N gekoppelte Oszillatoren . . . 102

41 Nichtlineare Systeme und Chaos 102
41.1 Knickpendel . . . 102

42 Wellen 102
42.1 Dehnung in einem Stab . . . 102
42.2 Allgemeine Wellengleichung . . . 103
42.3 Harmonische Wellen . . . 103

42.4 Dopplereffekt 104
42.5 Stehende Wellen 104
42.6 Beugung und Interferenz 104
42.7 Wellenpakete 104
42.8 Gruppengeschwindigkeit 104
42.8.1 Schwerewelle 104
42.8.2 Kapillarwellen (Kreuselwellen) 105

VII Grenzen der klassischen, Newton'schen Mechanik 105

43 Partikel mit sehr geringer Masse 105
43.1 Heisenbergsche Unschärferelation 105

44 Körper mit Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit 106
44.1 Die Lorentz-Transformation 106

45 Masse und Energie 107
45.1 Ruhemasse 107
45.2 Was heißt $E = mc^2$ 107

Teil I
Einführung

1 Was ist Physik

Grundlagenwissenschaft der unbelebten Natur

- quantitative Beschreibung
- Mathematik als "Sprache"
- empirische Wissenschaft, Gesetze sind nicht beweisbar im Sinne der Mathematik

Vorgehensweise:

- Beobachtung
- Abstraktion, Modellsysteme
- Gesetzmäßigkeiten erstellen & überprüfen
- Wechselspiel zwischen experimenteller und theoretischer Physik

Erhaltungsgrößen in abgeschlossenen Systemen

- Energie
- Impuls
- Drehimpuls
- Ladung

2 Teilgebiete der Physik

Klassische Mechanik Bewegung massebehafteter Körper bei Einwirkung von Kräften

Quantenmechanik Verhalten von Mikroobjekten mit kleinen Massen

Thermodynamik Systeme mit vielen Teilchen

Elektrodynamik Physik elektromechanischer Felder und ihre Auswirkung

finden Anwendung in z.B. Atomphysik, Optik, Festkörperphysik,... und weiteren Ingenieurswissenschaften

3 Aktuelle Forschungsgebiete

- Elementarteilchenphysik, Hochenergiephysik, Kernphysik, Atomphysik, Molekülphysik (physik. Chemie)
- Plasmaphysik
- Festkörperphysik
  - Oberflächenphysik
  - Nanowissenschaften
- Biophysik
- Geophysik
- Meterologie
- Astrophysik, Astroteilchenphysik

4 Physikalische Größen & Maßeinheiten

NICHT RATEN - MESSEN!

Zustand und Eigenschaften physikalischer Systeme und Vorgänge werden durch physikalische Größen beschrieben, z.B. Zeit, Temperatur, Kraft. Jede physikalische Größe ist mathematisch eine Variable. Sie kann verschiedene Werte annehmen und ist durch eine Maßzahl und ihre Einheit gegeben.

$$\text{physikalische Größe} = \text{Zahl} \cdot \text{Einheit}$$

5 Basisgrößen und Basiseinheiten

Das SI-System (Système International d'Unités)

Länge	m	Meter
Masse	kg	Kilogramm
Zeit	s	Sekunde
el. Stromstärke	A	Ampere
thermo.dyn. Temperatur	K	Kelvin
Stoffmenge	mol	Mol
Lichtstärke	cd	Candela
+ abgeleite Einheiten	z.B. Geschwindigkeit	
+ dezimale Vielfache		

Solche Festlegungen und Überwachungen, sowie die Schaffung von Messstandards und Messvorschriften sind hoheitliche Aufgaben. In Deutschland: Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig (z.B. Atomuhr) und Berlin (z.B. Temperaturskala).

6 Zeitmessung

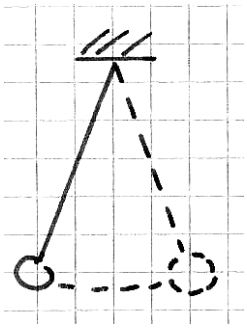
6.1 Allgemein

Abzählen von periodischen Vorgängen. Periodendauer T; Frequenz $\underbrace{\nu}_{n\ddot{u}} = \frac{1}{T}$ $[\mathrm{s}^{-1}]$; $1\frac{1}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{Hz}$ (Hertz)

6.2 Messung kurzer Zeiten

6.2.1 Sekundenpendel

50. Breitengrad: Pendellänge $0,994\,\mathrm{m} \Rightarrow \frac{T}{2} = 1\,\mathrm{s}$



6.2.2 Schwingquarz

T typisch im Bereich von 10^{-7} s; $\nu \sim 10$ MHz. Abweichungen:$\sim 0,2$ ms pro Tag. Verwendung z.B. in Uhren.

6.2.3 "Cäsium"-Atomuhr

$\nu = \frac{1}{T} \sim 9,19 \cdot 10^9$Hz

6.3 Messung langer Zeiten

"astronomische" Einheiten: Stunde, Tag, Jahr...

6.3.1 Radioaktiver Zerfall

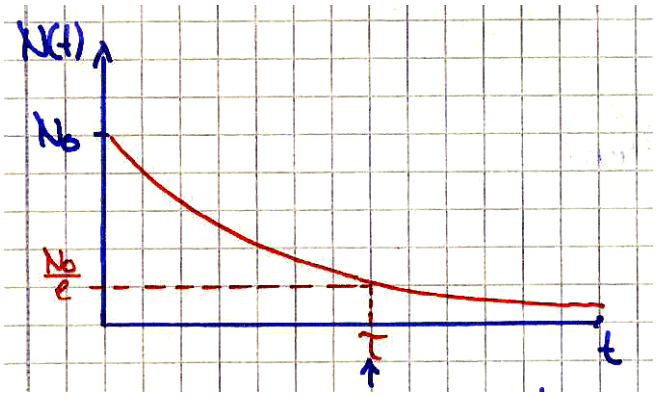
instabile Atomkerne zerfallen statistisch, es gibt aber charakteristische Gesetzmäßigkeiten.

$$\mathrm{N}(t) \quad = \quad N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

N Zahl der noch vorhanden instabilen Kerne

N_0 Zahl der bei $t = 0$ vorhandenen instabielen Kerne.

τ Man muss t durch τ teilen, da sonst eine Einheit als Exponent von e steht. Dort darf aber nur eine Zahl (OHNE EINHEIT) stehen!



"Mittlere" Lebensdauer hängt von dem Zerfallsprozess ab. Größenordnung 10^{-9}s ... 10^9Jahren.

6.3.2 Messen

Zerfälle pro Zeitintervall = Aktiviät

Differentialgleichung und Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau} N_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ \frac{\mathrm{dN}(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau} \mathrm{N}(t) \end{aligned}$$

Aktivität ist also proportional zur Zahl der vorhandenen radioaktiven Kerne.

6.3.3 ^{14}C-Methode

Radioaktives ^{14}C wird in der Athmosphäre durch Höhenstrahlung ständig erzeugt, zerfällt aber ständig wieder

$\Rightarrow$ Gleichgewicht der ^{14}C-Konzentration, ^{14}C-Menge im CO_2 der Luft ist zeitlich konstant. (Man geht dabei davon aus, dass der Gehalt an ^{14}C und CO_2 in der Athmosphäre & die Höhenstrahlung vor Millionen von Jahren dem heute entspricht.)

$\Rightarrow$in lebenden Organismen stellt sich das ^{14}C/^{12}C-Verhältnis der Luft ein. In toten Organismen wird der Austausch mit der Luft gestoppt. Das ^{14}C/^{12}C-Verhältnis nimmt in ihnen exponentiell ab.

6.3.4 ^{14}C-Zerfall

$$^{14}_{6}\mathrm{C} \underset{\mathrm{n}\to\mathrm{p}}{\longrightarrow} ^{14}_{7}\mathrm{N} + e^- + \underset{\text{Elektron-Antineutrino}}{\bar{\nu}_e}$$

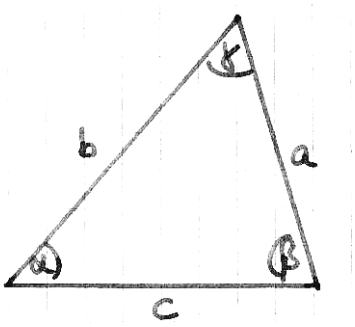
7 Längenmessung

- Messstab

7.1 Große Abstände

Triangulieren, Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

7.1.1 Sinussatz der Geometrie



$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \quad \alpha+\beta+\gamma = 180°$$

Basislänge c und zwei angrenzende Winkel α, β messen, a und b ausrechnen. Dies gilt bis astronomische Entfernungen.

7.2 Kleine Abstände

- Feinmechanik, z.B. Mikrometerschraube (bis $\frac{1}{100}\,\mathrm{mm} = 10\,\mu\mathrm{m}$)
- optische Methoden
- Interferometrie, Überlagerung kohärenter Lichtquellen (LASER)
  Auflösungsgrenze ~halbe Wellenlänge, $\sim 200\,\mathrm{nm}$
- Rastertunnelmikroskopie. bis atomaren Bereich

8 Messfehler

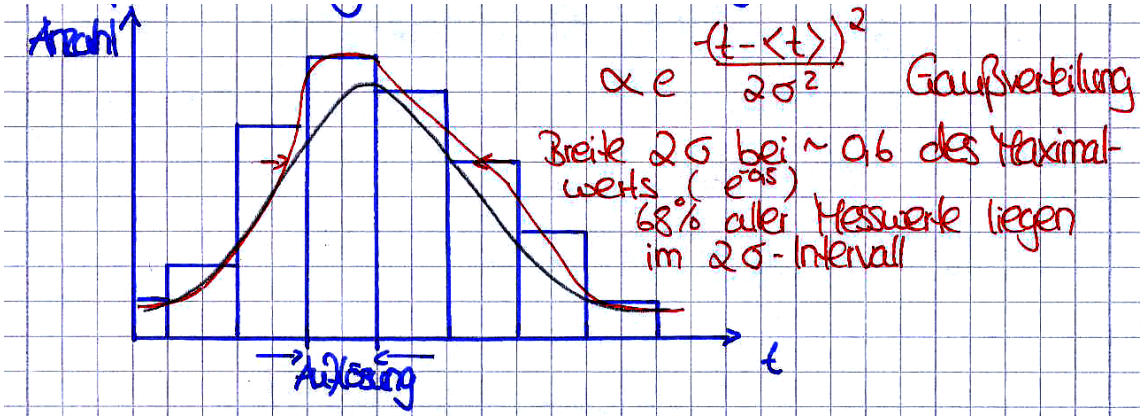
Messfehler sind unvermeidbar. Werden unterschieden in

systematische Fehler , durch Analyse des Messvorgangs erfassbar

statistische Fehler , durch Wiederholung erfassbar

Beispiel: Histogramm der Messung, z.B. Zeit t arithmetischer Mittelwert $\langle t\rangle$von N Einzelmessungen:

$$\langle t\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i$$



$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(t_i - \langle t\rangle\right)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i^2 - N\langle t\rangle^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{N\left(\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2\right)}{N-1}}$$

Standardabweichung des Messwerts, Varianz σ. Für große N gilt $\sigma = \sqrt{\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2}$

8.1 Fehlerfortpflanzung

Analyse notwendig, falls die zu bestimmende physikalische Größe $G = G(x, y, z, \ldots)$ durch die Messung der Größen $x, y, z, \ldots$ ermittelt wird.

$$\begin{aligned}\langle G\rangle &= G\left(\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle, \ldots\right)\\ \sigma_G &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2_{\langle x\rangle}\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2_{\langle y\rangle}\sigma_y^2 + \ldots}\end{aligned}$$

Wobei $\frac{\partial G}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial y}$ ... partielle Ableitung der Funktion $G(x, y, \ldots)$ nach den Variablen $x, y, \ldots$ an der Stelle $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \ldots$.

8.2 Mathematischer Einschub: Partielle Ableitung

Sei f eine Funktion *einer* Variablen (z.B. x), so ist die Ableitung von f an der Stelle x nach dieser Variablen x

$$f' = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Sei f eine Funktion *mehrer* Variablen $(x, y, z, \ldots, t)$, $f = f(x, y, z, \ldots, t)$, so ist die *partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial x}$ (auch f'_x) definiert durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z, \ldots, t) - f(x, y, z, \ldots, t)}{\Delta x}$$

d.h. Änderungen von f bezüglich *einer* Variablen wird betrachtet, die anderen Variablen werden festgehalten. Rechenregeln wie bei gewöhnlichen Ableitungen.

Example 1.

$$u = ax^2 - by$$

"Regenrinne"

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{2xy}{z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -b \end{aligned}$$

Teil II
Kinematik des Massepunkts

Mechanik betrachtet das Verhalten von massebehafteten Körpern unter dem Einfluss von Kräften:

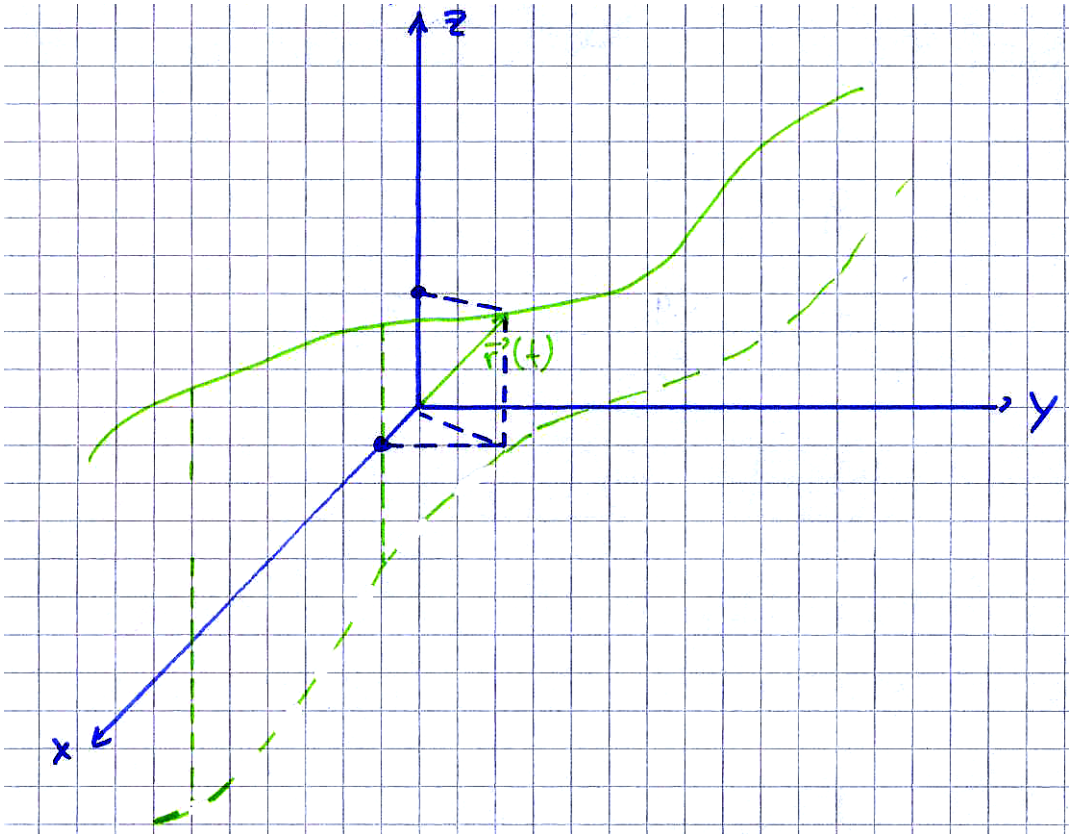
Statik Körper in Ruhe

Kinematik, Dynamik Körper in Bewegung

Mechanik kann *nicht* die *Ursache* von Kräften erklären. Fundamental ist die *Newtonsche Bewegungsgleichung*. Ermöglicht die Beschreibung des Verhaltens realer Körper - im Prinzip alles von der Billiardkugel, Achterbahn, KFZ-Knautschzone, turbulente Strömungen in Gasen oder Flüssigkeiten.

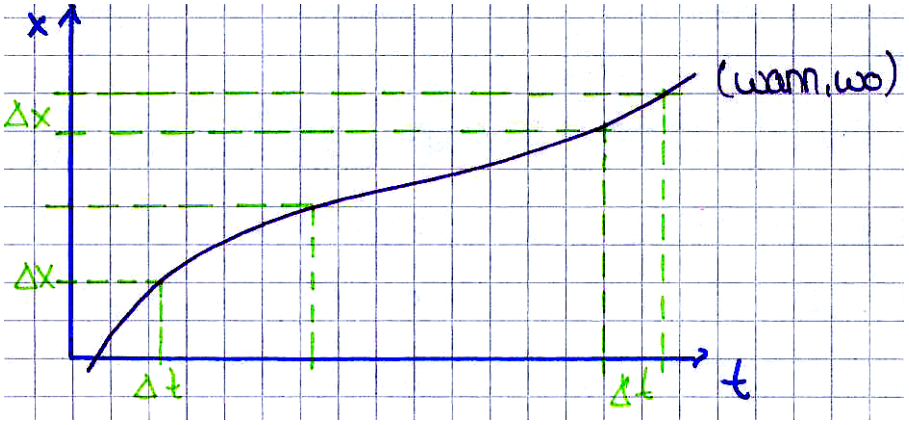
Wir betrachten zunächst einen drastisch idealisierten Körper mit Masse m ohne räumliche Ausdehnung. Seine Bewegung (Kinematik) ist vollständig beschrieben durch die Angabe des Orts (z.B. im kartesischen Koordinatensystem) und dessen Zeitabhängigkeit.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}$$



9 Bewegung im eindimensionalen Raum

Zunächst soll die Bewegung eindimensional untersucht werden, d.h. eine Koordinate $x = x(t)$ reicht aus.

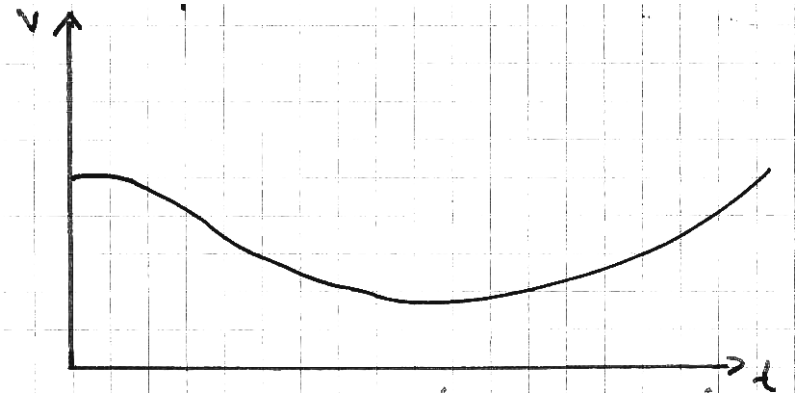


Geschwindigkeit ist ebenfalls zeitabhängig

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t)}{\Delta t}$$

im Grenzwert wird aus dem Differenquotienten ein Differentialquotient

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad [v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$



aus $x(t)$ lässt sich also $v(t)$ errechnen.

Umkehrung $v(t) \longrightarrow x(t)$ durch Integration

$$x(t) = x_0 \int_{t_0}^{t} v(t')\mathrm{d}t'$$

Anfangsbedingung $x_0 = x(t=0)$ muss bekannt sein.

t' = umbenannte Variable

Definition 2. Impuls des Massepunktes

$$p = m \cdot v \quad [p] = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Beschleunigung Änderungung der Geschwindigkeit

"Bremsen" Beschleunigung mit negativem Wert.

TODO:FINISH THIS CHAPTER

10 Bewegung im dreidimensionalen Raum

Es gelten die kartesischen Koordinaten.

Größe	Definition
Ort (Ortsvektor)	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}$
Geschwindigkeit	$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t)$
Impuls	$\vec{p}(t) = m\vec{v}(t)$
Beschleunigung	$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$

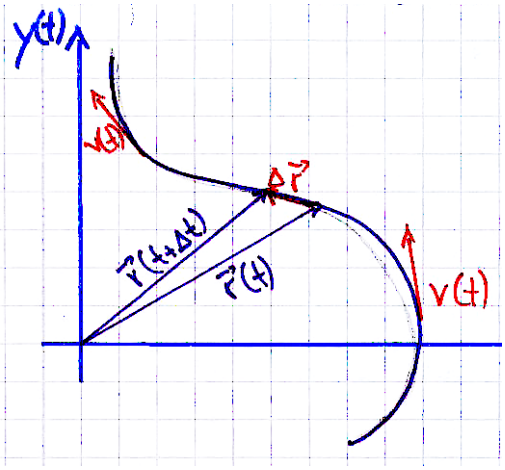
Die vektorielle Schreibweise steht abkürzend für die *getrennte Ableitung der Komponenten.*

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wichtige Festellung: Die Bewegungsabläufe in den drei Raumkoordinaten sind untereinander nicht abhängig! "Ungestörte Überlagerung der Bewegung"

Remark 3. Die Zeitableitung eines Vektors liegt tangential zu seiner Bahnkurve.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ \vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \end{aligned}$$



11 Würfe im Gravitationsfeld der Erde.

Wahl des Koordinatensystems

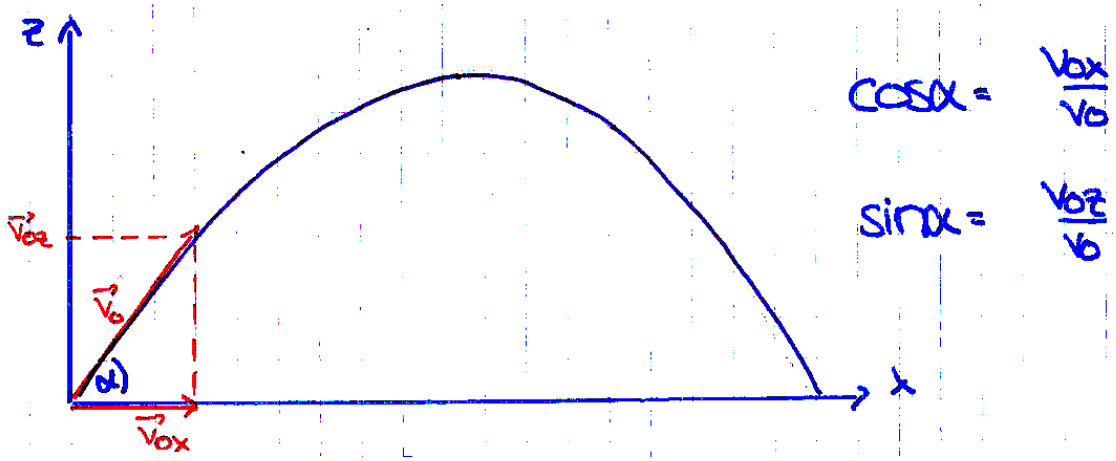
x-Richtung horizontal

z-Richtung vertikal

Es gilt $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g \end{pmatrix}$. Anfangsbedingungen $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} & \underset{=0}{v_{0y}} & v_{0z} \end{pmatrix}$ zum Zeitpunkt $t = t_0 = 0$. Jede Komponente kann zeitunabhängig integriert werden!

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}t \\ y_0 \\ z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

Die Zeit ist für alle Komponenten gleich und lässt sich daher eliminieren, man erhält für $z(x)$ Wurfparabeln. Mit $x_0 = z_0 = 0$ und $|\vec{v}_0| = v_0$



$$z = \frac{-g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x$$

Wurfhöhe aus $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0$ folgt $x_{max} = \frac{v_{0x}v_{0z}}{g}$, $z_{max} = \frac{v_{0z}^2}{2g}$

Wurfweite $2x_{max} = \frac{2v_{0x}v_{0z}}{g} = \frac{v_0^2}{g} 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$. Maximale Wurfweite bei $2\alpha = 90°$, $\alpha = 45°$

12 Kreisbewegungen

12.1 Allgemeine Kreisbewegung

Mittelpunkt bei $x = 0$, $y = 0$. Radius R, Radiusvektor $\vec{R} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi & R\sin\varphi \end{pmatrix}$. Winkel wird im *Bogenmaß* gemessen

$$\varphi = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}}$$

Einheit: rad, Radiant. Eigentlich ohne Einheit $\left[\frac{\text{m}}{\text{m}}\right]$. $1\,\text{rad} \triangleq \frac{360°}{2\pi} = 57,3°$ $\left(2\pi \triangleq 360°\right)$

12.2 Gleichförmige Kreisbewegung

Die zeitliche Zunahme des Winkels ist konstant. $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$ (Winkelgeschwindigkeit) $[\omega] = \frac{\text{rad}}{s}$ meist $\frac{1}{\text{s}}$.

Zeitl. Entwicklung des Winkels φ

Für φ gilt $\varphi = \omega t$, $\vec{R}$ läuft mit ω um den Mittelpunkt. Wir wählen $\varphi(t = 0) = 0$:

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} R\cos\omega t & R\sin\omega t \end{pmatrix}$$

Periodendauer, Umlaufzeit (wenn $\omega t = 2\pi$): $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Frequenz, Zahl der Umläufe pro Zekunde. $\frac{1}{T} = \nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (bei dieser Schreibweise ist ω im Bogenmaß)

Geschwindigkeit, komponentenweise differenzieren z.B. $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -R\sin\omega t$. $\vec{v}$ tangential, d.h. $\vec{v} \perp \vec{R}$. $|\vec{v}| = v = \omega R$

Beschleunigung, $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \perp \vec{v}$, $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{R}$, $|\vec{a}| = a = \omega^2 R = \omega v = \frac{v^2}{R}$. $\vec{a}$ zeigt zum Kreismittelpunkt und heißt Zentripetalbeschleunigung.

13 Zusammenfassung

Ort $\vec{r}(t)$

Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \vec{v}(t)$

Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \vec{a}(t)$

Unabhängigkeitsprinzip

Teil III
Newtonsche Axiome

Bisher: Kinematik eines Massepunkts beschreibt dessen Bewegungsablauf $\vec{r}(t)$.

Jetzt: Dynamik, Ursache für einen bestimmten Bewegungsablauf. (z.B. Wurfparabeln, Planetenbahnen). Zentrale Begriffe sind hierbei: *Kraft*, *Masse*

14 Axiom 1 - Trägheitsprinzip (Galilei)

Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn keine resultierende Kraft auf ihn einwirkt.$\vec{v} = \text{const.} \vee \vec{v} = 0$ falls $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$.

14.1 Historisches

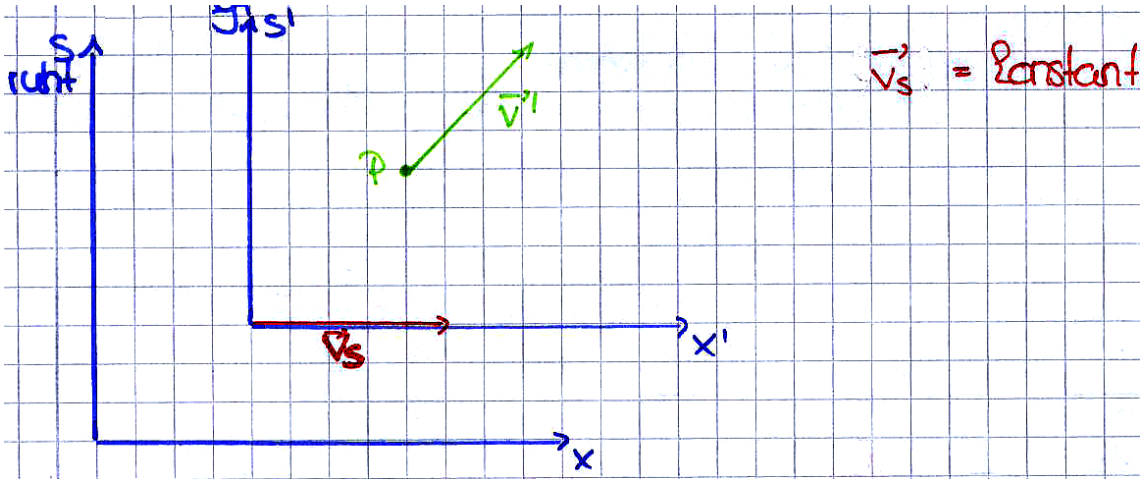
Was ist die "natürliche" Bewegung eines Körpers ohne Einwirkung?

Galilei $\rightarrow \vec{v} = \text{const.}$

Newton Beschleunigungen werden von Kräften verursacht. $\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = 0 \Rightarrow$Kräftefreies System

14.2 Bewegte Bezugsysteme

Alle Bewegungen laufen wie gewohnt ab, wenn das Bezugsystem sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.



Für P gilt von S aus gesehen: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_s$ (Überlagerungsprinzip)

14.2.1 Koordinatentransformation

$$\left.\begin{array}{l} x' = x - v_s t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{array}\right\} \text{Gallilei-Transformation}$$

$$\begin{aligned} v'_x &= \dot{x}' = v_x - v_s \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_x &= \dot{v}'_x = \dot{v}_x = a_x \\ a'_y &= a_y \\ a'_z &= a_z \end{aligned}$$

Beschleunigungen sind im System s und s' gleich. Im Bezugsystem mit $\vec{v} = \text{const}$ gelten die Newtonschen Gesetze!

14.3 Intertialsystem

Von lat. inertia = Trägheit. Beschleunigte Bezugsysteme sind *keine* Inertialsysteme. Kraft nötig um eine Position im beschleunigten System zu halten.

14.4 Grenzen der Galilei-Transformation

Zeit ist *nicht* absolut, muss mittransformiert werden beim Wechsel von einem System zum anderen. Unwichtig solange $v, v', v_s \ll$ Lichtgeschwindigkeit.

14.5 Axiom 2 - Aktionsprinzip (Das Newtonsche Axiom)

Die *Beschleunigung* eines Körpers ist umgekehrt proportional zu seiner *Masse* und direkt proportional zur resultierenden *Kraft*, die auf ihn wirkt.

$$\begin{aligned} \vec{a} &\propto \vec{F} \\ |\vec{a}| &\propto \frac{1}{m} \\ \vec{a} &= \frac{\vec{F}}{m} \\ \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

Allgemeiner mit Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p}$$

14.6 Axiom 3 - Reaktionsprinzip

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt Körper A auf den Körper B eine Kraft $\vec{F}_{AB}$ aus, so wirkt eine gleich große, entgegengesetzt gerichtetete Kraft von Körper B auf Körper A.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

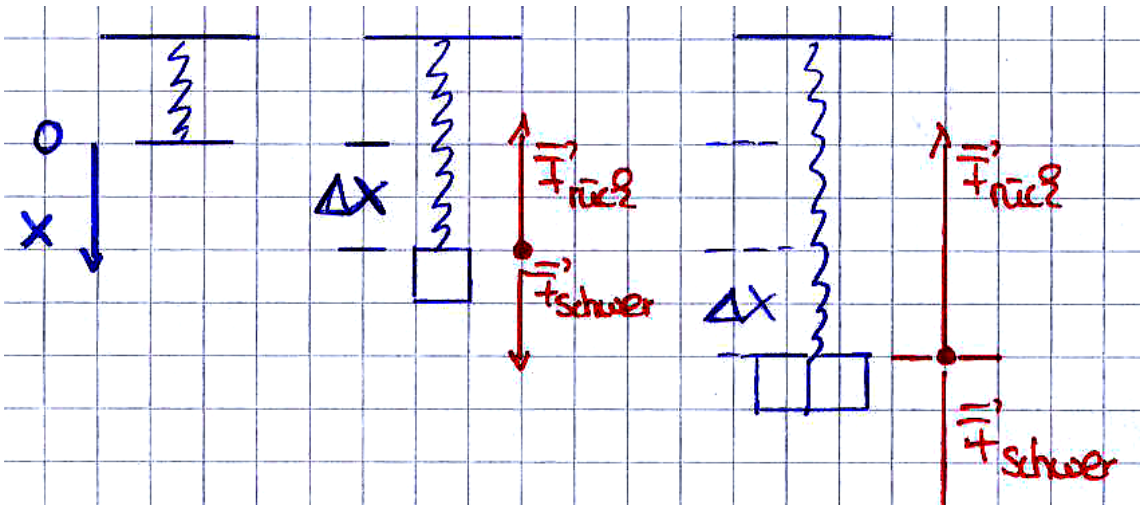
14.7 Von Massen und Kräften

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$	nötig, um $\vec{v}$ zu verändern, $\vec{F} \parallel \vec{a}$
m	Eigenschaft von Körpern, sich einer Beschleunigung zu widersetzen. *Träge Masse*

14.7.1 Hookesches Gesetz

Kräfte lassen sich messen z.B. mit Federwage.



1. Alles in Ruhe
   $\sum_i F_i = 0$, also $\vec{F}_{Rück} = -\vec{F}_{schwer}$
2. $x \propto F_{schwer}$

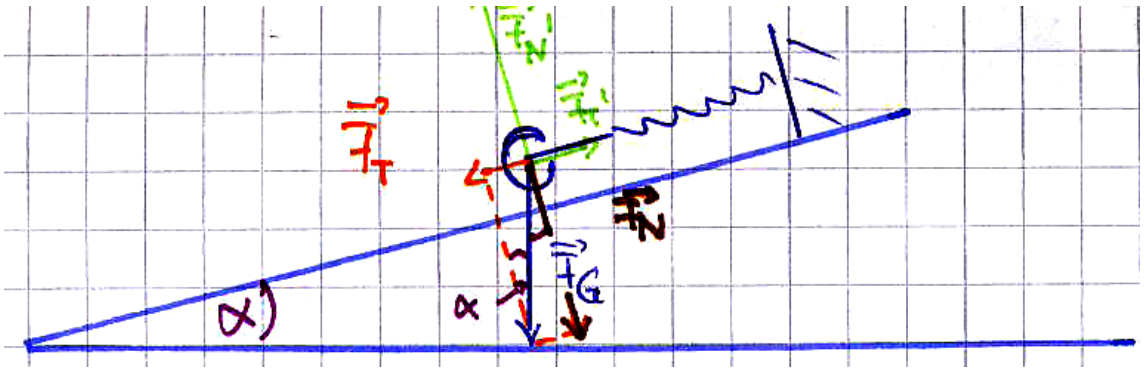
Definition 4. Hook'sches Gesetz

$$\vec{F}_{Rück} = -D\vec{r}$$

14.7.2 Zerlegung von Kräften

Kräfte lassen sich vektoriell zerlegen und addieren.

Example 5. Rolle auf schiefer Ebene, mit Federwaage festhalten.



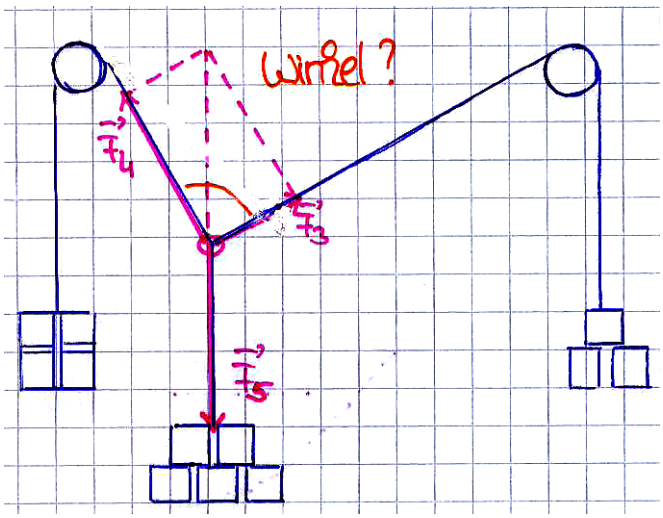
Gewichtskraft zerlegbar in Komponenten $\perp$ und $\parallel$ zur Unterlage.

$$\vec{F}_G = \vec{F}_N + \vec{F}_T$$

$\vec{F}_N$	Normalkraft
$\vec{F}_T$	Tangentialkraft

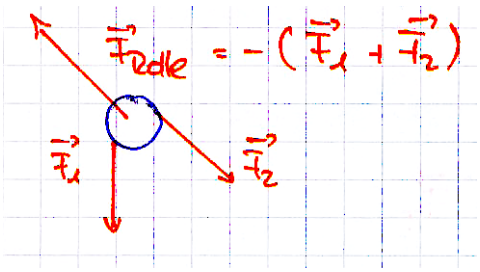
$\sum_i F_i = 0$ wegen Beschleunigung $a = 0$ (Statik). Experiment zeigt: $F_T = \frac{1}{2}F_G$ bei 30°.

Example 6. Kraftdreieck mit Seilen



Bei $\circ$ muss $\sum_i \vec{F}_i = 0$ sein (Statik). Daher $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_5 = 0$. Bei 90° gilt für das Verhältnis der Kräfte, d.h. für die Beträge von F_i: $5^2 = 3^2 + 4^2$ (Pythagoras)

Remark 7. Mit Rollen wird die Kraftrichtung geändert, nicht der Betrag. Rollenlager *müssen* die "Umlenkkraft" aufbringen.



14.7.3 Kräfte in der Natur

Es gibt 4 fundamentale Kräfte, oder Wechselwirkungen

1. Gravitation
2. Elektromagnetische Wechselwirkung
   z.b. Coulombkraft, Lorentzkraft, auch Kontaktkräfte, die bei Berührung von Körpern auftreten (Reibung, Druck)
3. Starke Wechselwirkung
   →Bindung zwischen Kernbausteinen
4. Schwache Wechselwirkung
   →"Umwandlung", Zerfall von Elementarteilchen

15 Gravitation

Newtons größte Entdeckung: Das universelle *Gravitationsgesetz*.

$$\vec{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

mit $\gamma \approx 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$=Gravitationskonstante.

15.1 In der Nähe der Erdoberfläche

$$F_G = m_s g$$

F_G entspricht dem Gewicht, die Schwerkraft eines Körpers mit der schweren Masse m_s mit

$$g = \gamma \frac{m_{Erde}}{r_{Erde}^2} = 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx const.$$

Fläche mit $g = const.$: Geoid ($\triangleq$verbeulte Birne)

$$\begin{aligned} F &= \gamma \frac{M_E m_s}{r^2} \\ &= \gamma \frac{M_E m_s}{(R_E + h)^2} \\ &= \frac{\gamma M_E}{R_E^2} \cdot \frac{m_s}{\left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^2} \\ &= g m_s \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_E}\right)^2} \\ (Taylor) &= g m_s \left(1 - 2\frac{h}{R_E} + 3\frac{h^2}{R_E^2} - 4\frac{h^3}{R_E^2} + \ldots\right) \end{aligned}$$

Frage: Wo bleibt die r^2-Abhängigkeit? Ist vernachlässigbar, falls $r - R_E \ll R_E$. $R_E = 6371\,\text{km}$, vgl. z.B. $\frac{1}{6371^2} = 2,4637 \cdot 10^{-8}$ mit $\frac{1}{6372} = 24629 \cdot 10^{-8}$. Also ein relativer Fehler von nur $3,2 \cdot 10^{-5}$.

15.1.1 Mathematischer Einschub: Enwicklung einer Funktion in einer Taylor Reihe

Eine Funktion $y = f(x)$, die stetig ist, und alle Ableitungen für $x = a$ besitzt, kann in vielen Fällen als Summe einer Potenzreihe geschrieben werden.

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

z.B. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ um $x = a = 0$: $f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - 4x^2 - 4x^3 + 5x^4 \ldots$; $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$

15.2 Feier Fall

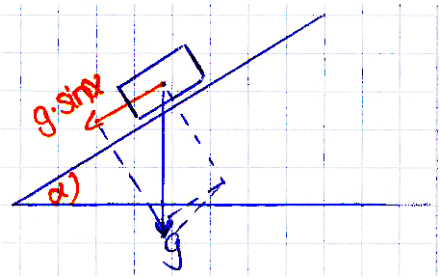
Alle Körper werden mit ihrer Gewichtskraft (Schwerkraft) F_G zum Erdmittelpunkt gezogen aufgrund ihrer *schweren* Masse m_s. $F_G = m_s g$, $g = \gamma \frac{M_E}{R_E^2}$. Nach dem 2. Newtonschen Axiom (Bewegungsgleichung; Körper widersetzt sich mit seiner trägen Masse m_T der Beschleunigung a) gilt $F_G = m_T a$. $\rightarrow a = \frac{F_G}{m_T} = \frac{m_s}{m_T} \cdot g$.

$a = g$ gilt NUR, wenn $m_S = m_T$, dies ist das *Äquivalenzprinzip*. Experimentelle Verifizierung: $\frac{m_S - m_T}{m_s} < 10^{-12}$

15.3 Verlangsamter Fall

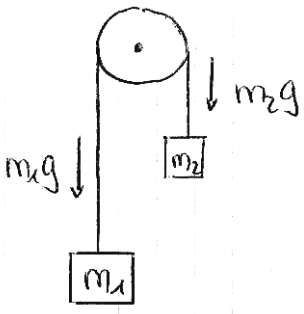
15.3.1 Schiefe Ebene (ohne Reibung)

$a = g \sin\alpha$ (mit $m_S = m_T$)



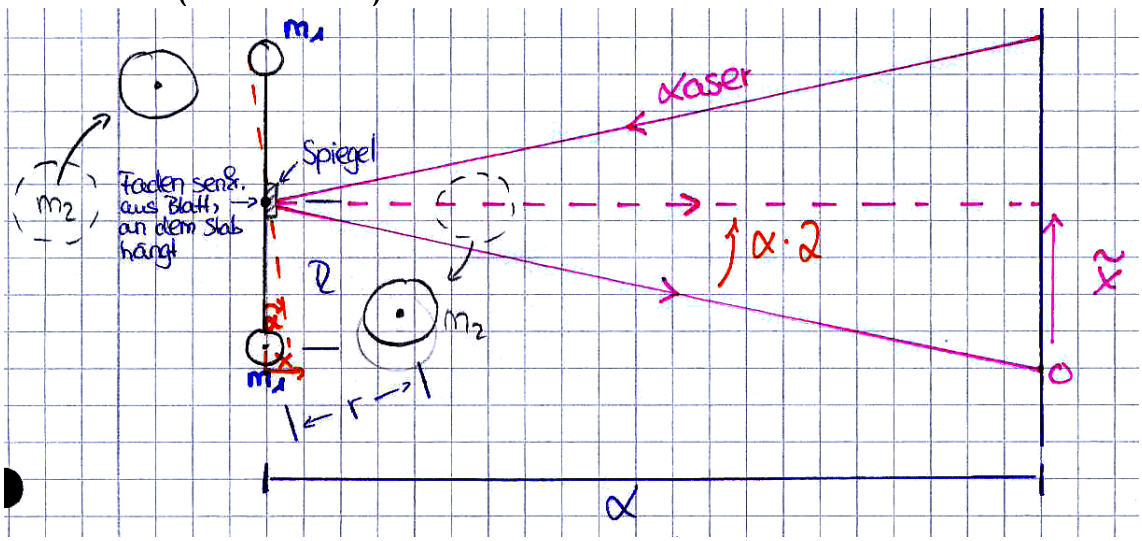
15.3.2 Feste Rolle

$$
\begin{aligned}
F &= (m_1 - m_2)\, g \\
m_{ges} &= m_1 + m_2 \\
\\
a &= \frac{F}{m_{ges}} \\
&= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g
\end{aligned}
$$



15.4 Bestimmung der Gravitationskonstanten γ

Versuchsaufbau (Sicht von oben)

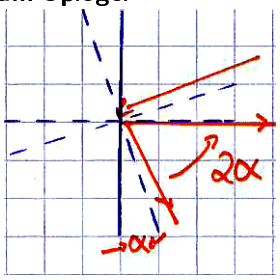


Stab mit den Massen m_1 hat einen Spiegel und hängt an einem Draht.

Experimentelle Daten

$$
\begin{aligned}
m_1 &= 0,015\,\mathrm{kg} \\
m_2 &= 1,5\,\mathrm{kg} \\
R &= 0,05\,\mathrm{m} \\
r &= 0,04\,\mathrm{m} \\
\alpha &= 13,75\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Zum Spiegel



Erläuterung In der Ausgangsstellung neutralisieren sich die Gravitationskräfte. Dann werden die Massen m_2 auf den Abstand r zu den Massen m_1 gebracht. Dann wirkt $F = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = m \cdot a$ und die Massen m_1 werden beschleunigt mit

$$a = \gamma\frac{m_2}{r^2}$$

mit $\alpha = \frac{x}{R}$ und $2\alpha = \frac{\tilde{x}}{\alpha}$ folgt für die Beschleunigung des Lichtpunkts $\tilde{a} = \ddot{\tilde{x}}$ an der Wand.

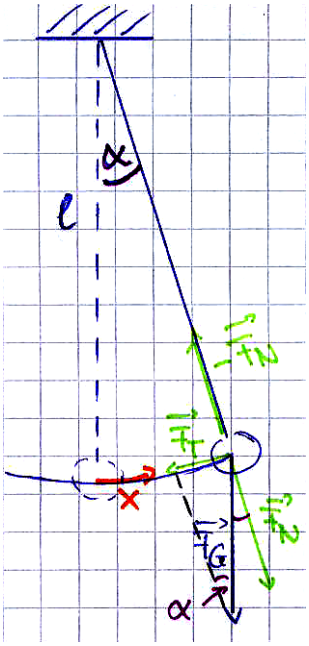
$$\tilde{a} = a\frac{2x}{R}$$

Experiment messe $\tilde{a} \Rightarrow a \Rightarrow \gamma$. exp: $t = 90\,\mathrm{s}$

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= 5 \cdot 2\,\mathrm{cm} = 0,1\,\mathrm{m} \\
&= \frac{1}{2}\tilde{a}t^2 \\
\tilde{a} &= \frac{2\tilde{x}}{t^2} = \frac{0,2\,\mathrm{m}}{(90\,\mathrm{s})^2} \\
&= 2,5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
\Rightarrow a &= \tilde{a} \cdot \frac{2\tilde{x}}{t^2} = 2,5 \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{0,05\,\mathrm{m}}{27,5\,\mathrm{m}} \\
&= 4,5 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
\Rightarrow \gamma &= \frac{ar^2}{m_2} = \frac{4,5 \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0,04\,\mathrm{m})^2}{1,5\,\mathrm{kg}} \\
&= 4,8 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}
\end{aligned}$$

Literaturwert $\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$

15.5 Fadenpendel



Es wirken Seilkraft und Gravitation. Für die rücktreibende Kraft gilt

$$\begin{aligned} F_r &= F_G \sin\alpha \\ &= m_s g \sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= m_T a \\ &= m_T l \ddot{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \ddot{x} = l\ddot{\alpha} \\ &= -\frac{m_S g \sin\alpha}{m_T} \end{aligned}$$

Durch $\sin\alpha$ ist dies eine schwierige Differentialgleichung als Bewegungsgleichung. Für kleine Auslenkungen gilt als Näherung $\sin\alpha = \alpha$ mit α im Bogenmaß.

15.5.1 Lösungsansatz der DGL

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

mit beliebiger Zeitphase φ_0, je nach Anfangsbedingung.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\alpha_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \ddot{\alpha} &= -\alpha_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

α und $\ddot{\alpha}$ in Differentialgleichung einsetzen, und α_0 und $\sin(\omega t + \varphi_0)$ kürzen sich raus, es bleibt:

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \frac{m_S}{m_T} \cdot \frac{g}{l} &= 0 \\ \omega &= \sqrt{\frac{m_S}{m_T}} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Experiment Apfel, Stahlkugel, Handy →Alle Körper verhalten sich gleich.

$$\Rightarrow m_S = m_T$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

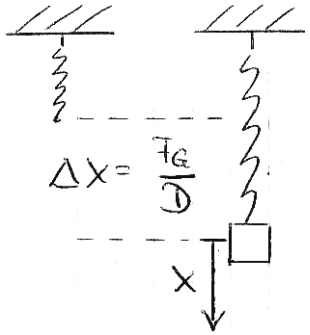
Definition 8. Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

ω ist die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Phase von $\sin(\omega t + \varphi_0)$ ändert. Nicht zu verwechseln mit $\dot{\alpha}$, der Winkelgeschwindigkeit des Pendels.

15.6 Harmonischer Oszillator

Wichtigstes "Objekt" in der Physik. Mechanische Realisierung durch träge Masse an "masseloser" Feder bei Gültigkeit des Hook'schen Gesetzes.



Anhängen einer Masse bewirkt Auslenkung der Feder um $\Delta x = \frac{F_G}{D}$, statisch. Für neue Ruhelage sei $x = 0$. Eine Auslenkung aus $x = 0$ um x bewirkt eine *Rückstellkraft* $F = -Dx$. Nach dem 2. Axiom gilt für die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} F &= ma \\ -Dx &= ma \end{aligned}$$

$$m\ddot{x} - Dx = 0$$

Definition 9. Differentialgleichung des harmonischen Oszillators, ohne Reibung, ohne Anregung

$$m\ddot{x} + Dx = 0$$

Lösungen sind sin- oder cos-Zeitfunktionen z.B. $x = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ einsetzen von x und $\ddot{x}$ folgt, dass $\omega^2 = \frac{D}{m}$

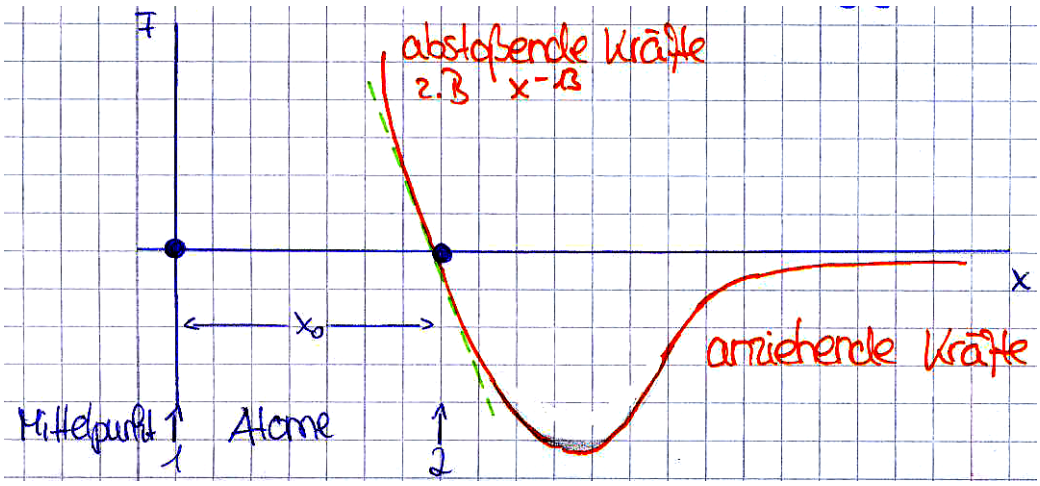
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

z.B. Messung von ω oder T bei gegebener Masse erlaubt die Bestimmung von D (oder umgekehrt).

16 Kontaktkräfte

Berührung führt immer zu Verschiebung von Atomen und damit zu Rückstellkräften.

16.1 Typische Kraft-Abstandsabhängigkeit



Für kleine Auslenkungen um den Gleichgewichtsabstand gilt

$$F(x) = -c\,(x - x_0)$$

Dies ist die mikroskopische Ursache für das *Hook'sche Gesetz*. Kontaktkräfte (z.B. Zugkraft im Seil, Reibung, Stöße zwischen Gasatomen, ...) werden durch Coulombkräfte verursacht. Sie bestimmen die Wechselwirkung der Elektronen untereinander und mit den Atomkernen. Zum vollen Verständnis wird die Quantenmechanik benötigt.

16.2 Reibung

technisch wichtig, wissenschaftlich schwierig. Hier: makroskopische Beschreibung, die der allgemeinen Erfahrung entspricht.

16.2.1 Haftreibung

Körper wird durch eingesetzte Kraft *nicht* beschleunigt.

$$a = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{F}_{HR}$$

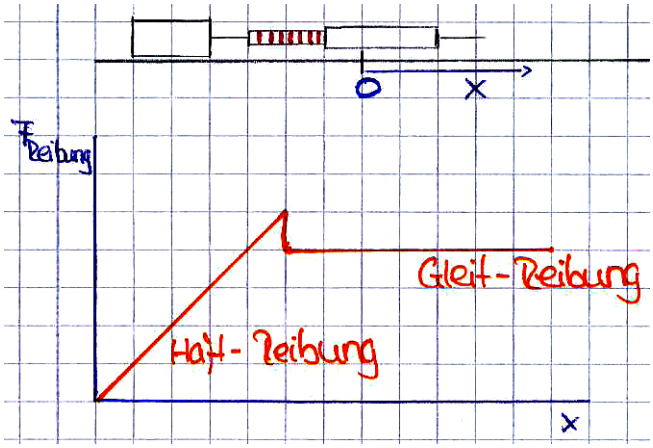
F_{HR} hat einen maximalen Wert.

$$F_{HR,max} = \mu_H F_N$$

μ_H	Haftreibungszahl
F_N	Normal, Auflagekraft $\perp$Unterlage

F_{HR} ist unabhängig von makroskopischer Auflagefläche, abhängig von der Struktur der Oberfläche.

Versuch



16.2.2 Gleitreibung

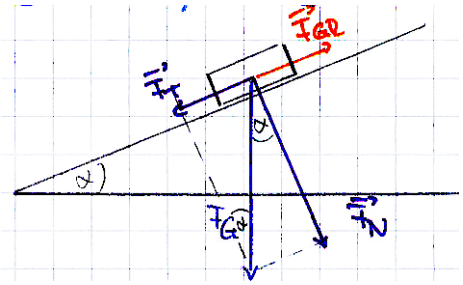
Gleitreibung $F_{GR} = \mu_G F_N$
experimentell $\mu_G < \mu_H$

Gleitreibung ist unabhängig von Geschwindigkeit und Auflagefläche.

16.2.3 Rollreibung

$\mu_R < \mu_G$
Wichtig: $\vec{F}_{HR}, \vec{F}_{GR}, \vec{F}_{RR} \perp \vec{F}_N$ und sind der Bewegungsrichtung entgegengesetzt.

Example 10. Schiefe Ebene



bis zu einem Grenzwinkel haftet der der Körper

$$\begin{aligned} \vec{F}_{HR} &= -\vec{F}_T \\ F_{HR} &= \mu_H F_N \\ &= \mu_H F_G \cos\alpha \end{aligned}$$

wenn er gleitet, gilt:

$$\begin{aligned} F &= ma = F_T - F_{GR} \\ ma &= F_G\left(\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha\right) \end{aligned}$$

16.3 Strömungswiderstand

Geschwindigkeitsabhängig in einer im Allgemeinen komplizierten Weise. Mögliche Darstellung:

$$F_R = bv^n$$

mit $n = 1 \ldots 2$. b enthält die Geometrie des Körpers und Fluid-Parameter.

16.3.1 Stokesche Reibung, viskose Reibung

bei ausreichend kleiner Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} F_R &\propto v \\ \vec{F}_R &= -\gamma \vec{v} \\ [\gamma] &= \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Kugel

$$\gamma = 6\pi\eta R$$

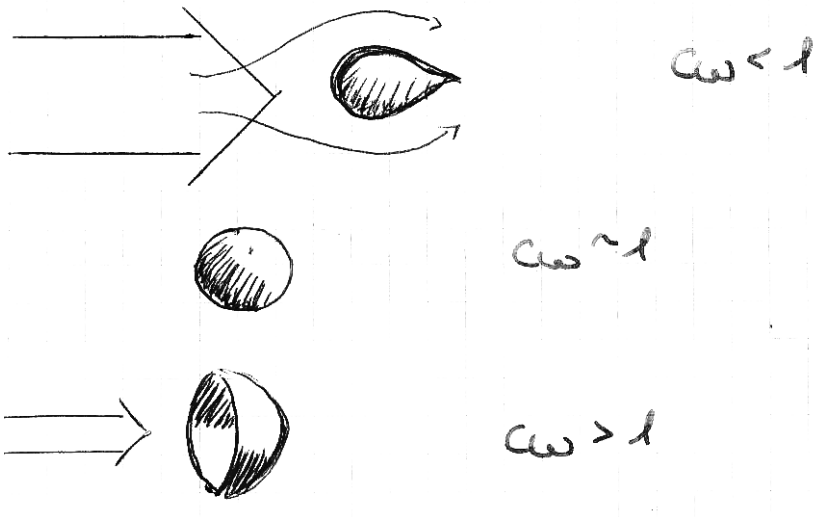
η	Viskosität $[\eta] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s \cdot t}}$
R	Kugelradius

16.3.2 Newtonsche-Reibung

bei schneller Bewegung.

$$\begin{aligned} F_R &\propto v^2 \\ F_R &= \frac{1}{2} c_w \rho A v^2 \end{aligned}$$

ρ	Dichte des Fluids
A	Querschnittsfläche des Körpers
c_W	Widerstandskoeffizient, hängt von der Form des Körpers ab.



17 Zentralbewegungen

17.1 Gleichförmige Kreisbewegungen

mit $\omega = const.$ Wir wissen, dass dies eine Beschleunigung erfordert, die zum Kreismittelpunkt gerichtet ist. Ihr Betrag ist

$$a = \omega^2 r = \frac{v^2}{r} = \omega v, \quad \vec{a} \perp \vec{v}$$

Nach dem 2. Axiom ist dann eine Kraft nötig, die zum Kreismittelpunkt zeigt, mit dem Betrag $F_{ZP} = m\omega^2 r$.

Definition 11. Zentripetalkraft

$$F_{ZP} = m\omega^2 r$$

17.1.1 Beispiel: Satelliten-Kreisbahn um die Erde

$$\begin{aligned} F_{ZP} &= F_G \\ m\omega^2 r &= \gamma \frac{M_E \cdot m}{r^2} \\ \frac{2\pi}{T} &= \gamma \frac{M_E}{r^3} \end{aligned}$$

Damit folgt für die Umlaufzeit:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{r^3}{M_E}$$

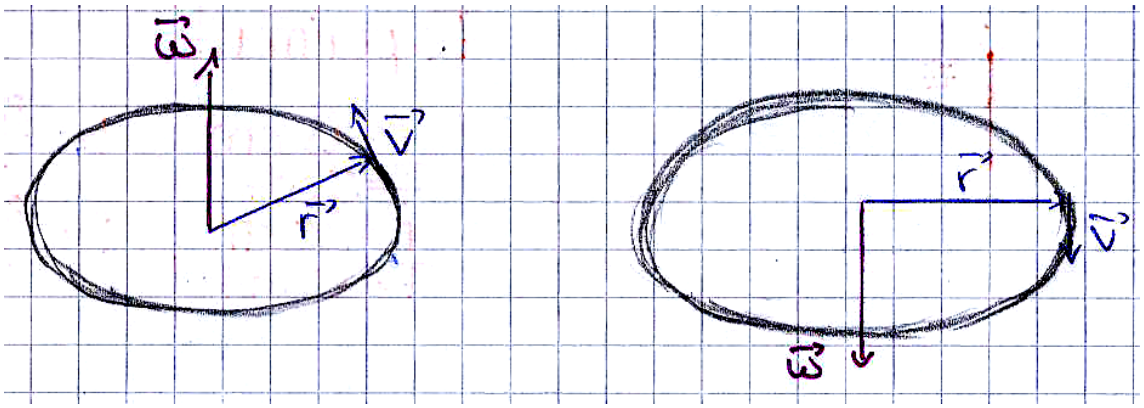
Spionage-Satelliten mit Höhe über der Erdoberfläche von ca. 100 km (d.h. endliche Lebensdauer wegen Luftreibung). Die Bahnebene ist gegen Äquator gekippt

$$\omega_{\text{Spion}} \gg \omega_{\text{Erde}}$$

Geostationär Satellit "steht" über einem festen Punkt des Äquators

$$\omega_{\text{Satellit}} = \omega_{\text{Erde}}$$

Wie kann also die Orientierung der Kreisbahn angegeben werden? →Vektor der *Winkelgeschwindigkeit* $\vec{\omega}$. $\vec{\omega}$ ist ein *axialer Vektor* (Kraft, $\vec{E}$-Feld, $\vec{v}$ sind polare Vektoren).



17.2 Mathematischer Einschub: Vektoren

17.2.1 Skalarprodukt

Definition 12. Skalarprodukt oder Punktprodukt. Das Ergebnis ist ein Skalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \\
\vec{b} &= \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \\
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\
&= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\vartheta
\end{aligned}$$

Senkrechte Vektoren Es gilt die Orthogonalitätsbedingung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Parallele Vektoren

$$\begin{aligned}
\vec{a} &\parallel \vec{a} \\
\vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 \\
&= a^2
\end{aligned}$$

17.2.2 Kreuzprodukt

Definition 13. Kreuzprodukt oder Vektorprodukt

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \\
&= |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\vartheta
\end{aligned}$$

17.2.3 Rechenregeln

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{c}$$

Beweis durch Ergänzungstricks z.B. $+a_x b_x c_x - a_x b_x c_x$

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\
\vec{a} \times \vec{b} &= -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right)
\end{aligned}$$

Multiplikation mit einem Skalar A

$$\begin{aligned}
A\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) &= (A\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(A\vec{b}\right) \\
A\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) &= (A\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(A\vec{b}\right)
\end{aligned}$$

Doppelte Produkte

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) &\neq \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \\
\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &\neq \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}
\end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) &= \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\end{aligned}$$

Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\pm\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\vec{a}\right) &= \vec{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A+A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \vec{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{a}+\vec{a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{b}\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) &= \frac{\mathrm{d}\vec{a}}{\mathrm{d}t}\times\vec{b}+\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}\times\vec{a}\end{aligned}$$

17.3 Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

- parallel zur Drehachse
- senkrecht zu $\vec{v}$
- Betrag $\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\underbrace{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}}_{r}\cdot\underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{v}\rightarrow|\vec{\omega}|=\frac{v}{r}$

Im allgemeinen gilt

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

daraus $\vec{\omega}=\ldots$ durch

$$\begin{aligned}\vec{r}\times\vec{v} &= \vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\\ &= \vec{\omega}\,(\vec{r}\cdot\vec{r})-\vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\\ \text{mit } \vec{r}\perp\vec{\omega}&\\ &= \vec{\omega}r^2-0\\ \\ \Rightarrow\vec{\omega} &= \frac{1}{r^2}\,(\vec{r}\times\vec{v})\end{aligned}$$

Für die Zentripetalbeschleunigung bei $\vec{\omega}=\text{const.}$ folgt

$$\begin{aligned}\vec{a}_{ZP} &= \vec{\omega}\times\vec{v}\\ &= -\omega^2\vec{r}\end{aligned}$$

17.4 Beschleunigte Kreisbewegung

Winkelbeschleunigung $\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$, $\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}^2},\frac{1}{\mathrm{s}^2}\right]$. Auch $\vec{\alpha}$ ist ein achsialer Vektor

Positive Beschleunigung $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\omega}$

negative Beschleunigung $\vec{\alpha}\downarrow\uparrow\vec{\omega}$ (Bremsvorgang)

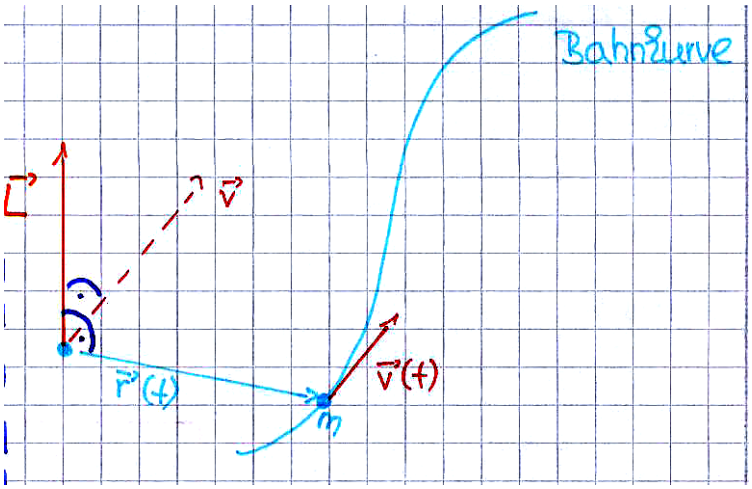
Verknüpft ist die Tangentialbeschleunigung $\vec{a}_{\tan}=\vec{\alpha}\times\vec{r}$. Falls $\vec{\alpha}$ nicht parallel zu $\vec{\omega}$ liegt, ändert sich die Bahnebene.

17.5 Drehimpuls

Dynamische Größe auf einen Raumpunkt bezogen.

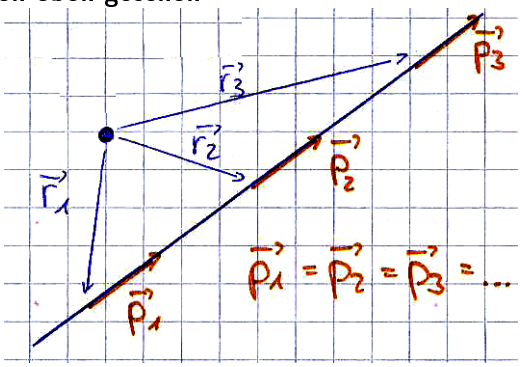
Definition 14. Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$



Beispiel 1: geradliniger Vorbeiflug mit $\vec{p}$ = const. d.h. $\vec{F} = 0$

Von oben gesehen



$\Rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{const.}$ Ohne äußere Einflüsse ist der "Drehimpuls erhalten"

Beispiel 2: Kreisbewegung

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\
&= \vec{r} \times (m\vec{v}) \\
&= \vec{r} \times (m\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
&= m\left(\vec{\omega}\,(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}\,(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\right) \\
&= mr^2\vec{\omega}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= mr^2\vec{\omega} \\
\text{Drehimpuls} &= \text{Trägheitsmoment} \cdot \text{Winkelgeschw.}
\end{aligned}$$

ähnlich $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$.

17.5.1 Zeitliche Änderung des Drehimpulses

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p}) \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\ &= \underbrace{\vec{v}\times m\vec{v}}_{=0}+ \qquad \underbrace{\vec{r}\times F}_{=\text{Drehmoment } M}\end{aligned}$$

Man kann also nur eine Impulsänderung machen, wenn man Kraft aufwendet.

Definition 15. Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r}\times\vec{F} \\ \text{Drehmoment} &= \text{Hebelarm}\times\text{Kraft}\end{aligned}$$

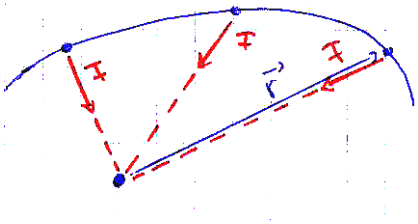
Drehmoment bewirkt eine Änderung des Drehimpulses.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\sum_i \vec{M}_i$$

Falls äußeres Drehmoment $M=0$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=0 \quad \vec{L}=\text{const.}$$

dies gilt insbesondere für *Zentralbewegungen*, dabei ist eine Kraft (Beschleunigung) immer auf einen Punkt gerichtet.



$$\begin{aligned}\vec{F} &\downarrow\uparrow \vec{r} \\ \vec{a} &\downarrow\uparrow \vec{r}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rightarrow \vec{M} &= \vec{r}\times\vec{F}=0 \\ \rightarrow \vec{L} &= \text{const.}\end{aligned}$$

Es gilt:

1. Bahn verläuft in einer Ebene.
2. der vom Beschlunigungszentrum ausgehende Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeitabschnitten gleiche Flächen. (Flächensatz, 2. Kepler'sches Gesetz)

18 Die Kepler'schen Gesetze

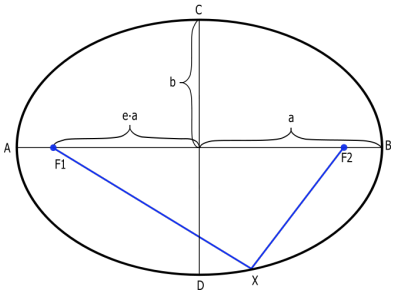
- beschreiben die Planetenbahnen
- sind begründet auf genauen Messungen von Tycho Brahe
- wurden von Kepler (1571-1630) *vor* den Erkenntnissen von Newton aufgestellt

18.1 1. Keplergesetz: Ellipsensatz

Die Planeten bewegen sich um die Sonne auf Ellipsenbahnen, die Sonne steht im Brennpunkt dieser Ellipse.

18.1.1 Die Ellipse

Normalform $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Es gilt:$r + r' = 2a$

Polarkoordinaten $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

Bemerkungen:

- alle Planetenbahnen leigen nahezu in *einer* Ebene
- Drehsinn ist gleich

⇒Gemeinsam entstanden.

- Exzentrität klein:

$\varepsilon_{\text{Erde}}$	=0,0167
$\varepsilon_{\text{Venus}}$	=0,0068
$\varepsilon_{\text{Merkur}}$	=0,206
$\varepsilon_{\text{Pluto}}$	=0,25

18.2 2. Keplergesetz: Flächensatz

Die Verbindungslinie (Fahrstrahl) von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

18.2.1 Erklärung Newtons

In $\mathrm{d}t$ überstrichene Dreiecksfläche $\mathrm{d}\vec{A}$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{A} &= \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v}\mathrm{d}t) \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{r}\times m\vec{v}\mathrm{d}t) \\ &= \frac{1}{2m}\vec{L}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$\vec{L}$ konstant wegen Zentralkraft $(\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = 0) \rightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \text{const.} \hookrightarrow$ Flächensatz$\surd$

18.3 3. Keplergesetz

Vergleich der Bahnen verschiedener Planeten ergibt: Das Quadrat der Umlaufdauer eines Planeten ist proportional zur 3. Potenz der Länge der großen Halbachse seiner Bahn, $T^2 \propto a^3$

$$\frac{a^3}{T^2} = 3,35 \cdot 10^{18} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{C}_{\mathrm{Sonne}}$$

18.3.1 Erklärung Newtons

Gravitationsgesetz $F = \gamma \frac{m_{\mathrm{Sonne}} \cdot m_{\mathrm{Planet}}}{r^2}$; für elliptische Bahnen mathematisch etwas aufwendig, bei Annahme von Kreisbahnen einfach. Siehe auch Satellit

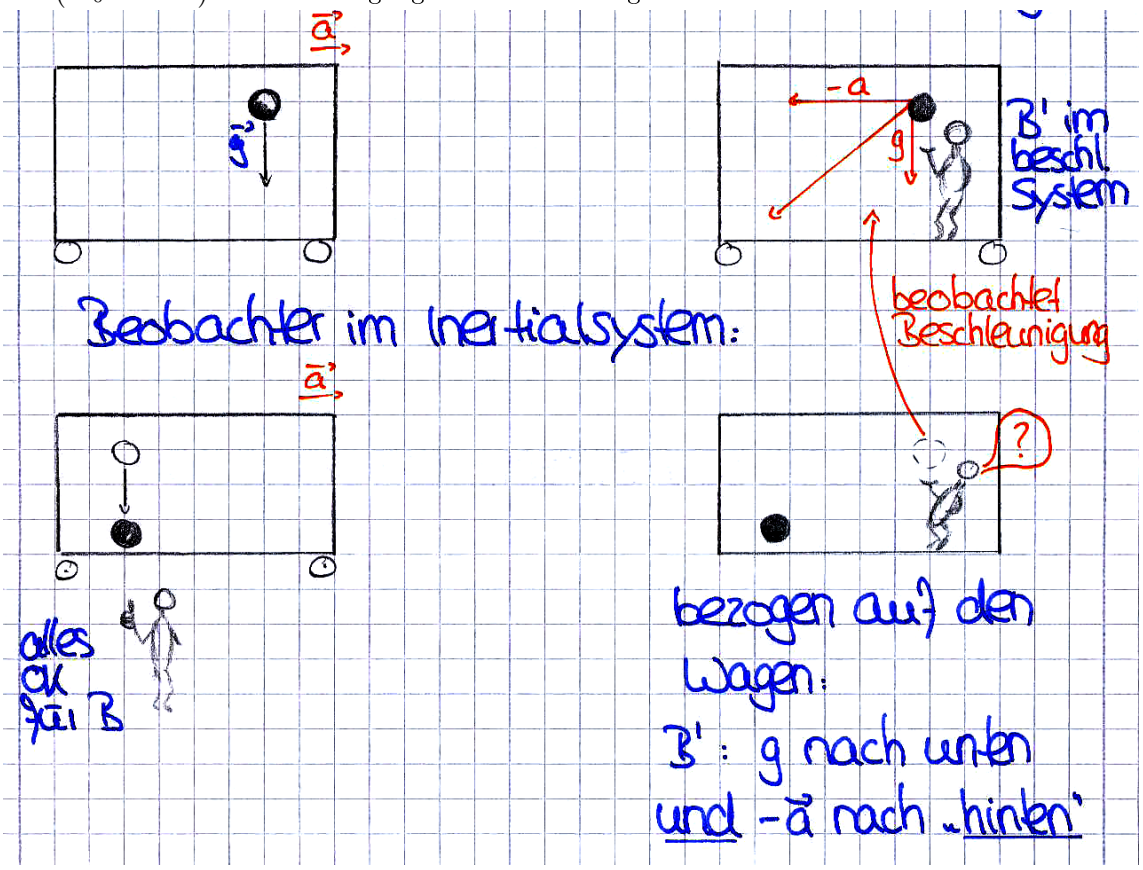
$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} = \frac{1}{M_{\mathrm{Sonne}}} = \frac{1}{C}$$

19 Trägheitskräfte, Scheinkräfte

treten in beschleunigten Bezugsystemen auf. Ursache ist die Trägheit der Körper. Zur Erinnerung: Newtons Gesetze gelten in Inertialsystemen mit $v = \mathrm{const}$.

19.1 Freier Fall im beschleunigten System

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ →Beschleunigung nur in x-Richtung

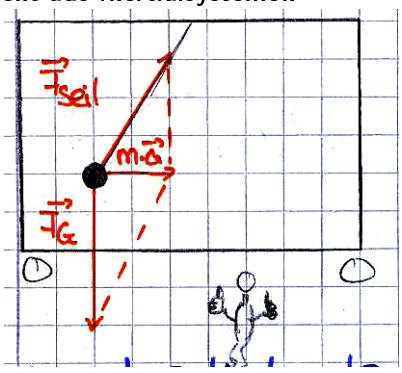


Bei Anwendung des Aktionsprinzips (2. Axiom) im beschleunigten System muss zur Beschreibung der Bewegung eine zusätzliche Kraft eingeführt werden - die Scheinkraft, Trägheitskraft.

Hier: $\vec{F}_{\mathrm{Schein}} = -m\vec{a}$

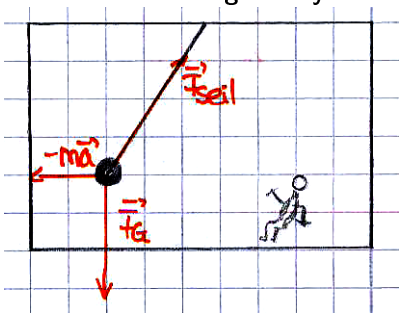
19.2 Beispiel: Fadenpendel

Sicht aus Inertialsystemen



Beschleunigung der Pendelmasse wird durch die horizontale Komponente der Scheinkraft aufgebracht.

Sicht aus beschleunigtem System



Pendel ist in Ruhe aber schief! $\vec{F}_{\text{Schein}} = -m\vec{a}$ nötig, damit $\sum_i \vec{F}_i = 0$

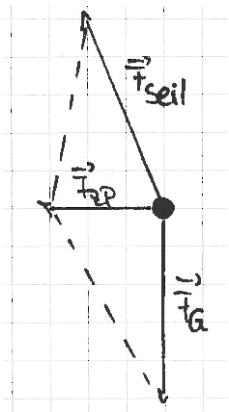
19.3 Scheinkräfte in rotierenden Nicht-Inertialsystemen

Wir beschränken uns auf $\omega = 0$, bei gleichmäßiger Kreisbewegung des Bezugsystems.

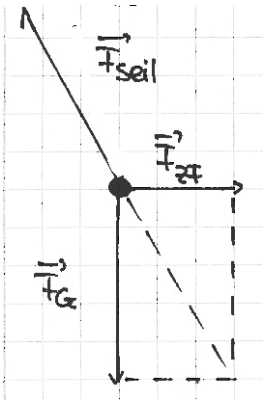
19.3.1 Zentrifugalkraft

Ruhendes Objekt im rotierenden System. $v' = 0$.

Sicht aus Inertialsystemen



Zentripetalkraft $\vec{F}_{ZP} = -m\omega^2\vec{r}$. Wird durch die horizontale Komponente der Seilkraft aufgebracht: $\vec{F}_{\text{Seil}} + \vec{F}_G = \vec{F}_{ZP}$



Sicht aus beschleunigtem System

Pendel ruht, aber schief! $\vec{F}_{ZF}$ so, dass $\sum_i \vec{F}_i = 0$. $\vec{F}_{ZF} = m\omega^2\vec{r}^2$ heißt *Zentrifugalkraft*

19.3.2 Corioliskraft

Bewegtes Objekt im rotierenden System ($v' \neq 0$) ⇒Zentrifugalkraft + *Corioliskraft*. Ablenkende Scheinkraft ohne Herleitung:

$$\begin{aligned} \vec{F}_C &= 2m\,(\vec{v}' \times \omega) \\ &= 2mv'\omega \sin\angle\,(\vec{v}', \vec{\omega}) \end{aligned}$$

TODO: Add Foucaultsches Pendel

20 Erhaltungssätze

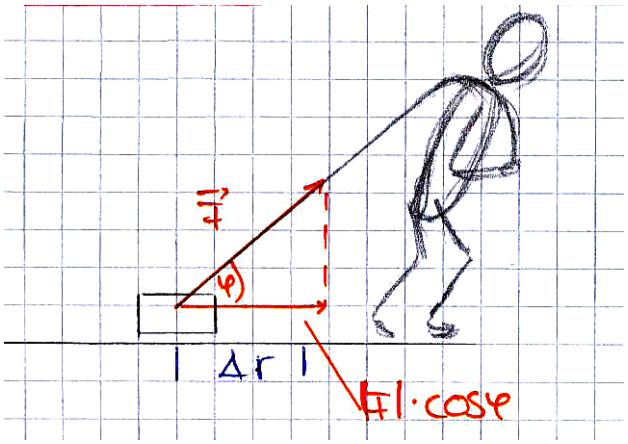
20.1 Arbeit

Definition 16. Arbeit (physikalische Definition). Wirkt eine Kraft $\vec{F}$ auf einen materiellen Punkt oder Körper und verschiebt ihn dabei um eine Weglänge $\Delta\vec{r}$, so hat die Kraft den *Zustand* des Körpers verändert, sie hat Arbeit verrichtet.

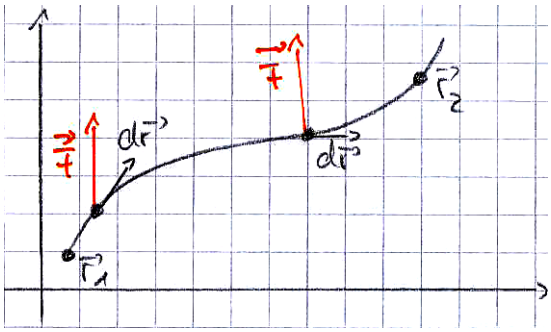
Definition 17. Arbeit (mechanische Definition).

$$\begin{aligned} \Delta W &= |\vec{F}| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot \cos\angle\left(\vec{F}, \Delta\vec{r}\right) \\ \mathrm{d}W &= \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \end{aligned}$$

20.1.1 Wegintegral



differentielle Formulierung ist nötig, wenn sich $\left|\vec{F}\right|$ oder Winkel zwischen Kraft und Weg sich ändern.



Arbeit eines Wegs von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}W \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \\ [W] &= \mathrm{Nm} = \tfrac{kg \cdot m^2}{s^2} = \mathrm{J} \end{aligned}$$

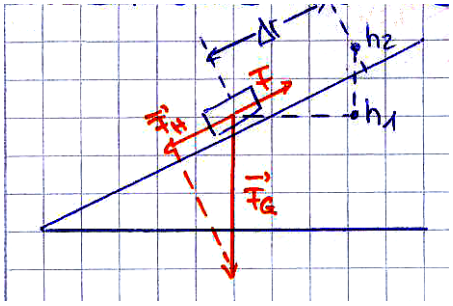
Dieses Integral wird auch als Wegintegral bezeichnet.

20.1.2 Hubarbeit gegen Gewichtskraft

Direktes lotrechtes Heben

$$\begin{aligned} F &= mg \\ h &= h_2 - h_1 \\ W_{12} &= \int_{h1}^{h2} mg\mathrm{d}h \\ &= mgh \end{aligned}$$

Heben auf reibungsfreier schiefen Ebene



$$\begin{aligned} F &= mg\sin\alpha \\ \Delta r &= \frac{h_2 - h_1}{\sin\alpha} \\ \Rightarrow W_{12} &= mgh \end{aligned}$$

Absichtlich komplizierter Weg im Halbkreis

Parametrisierung des Weges

$$\vec{r}(t) = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ 1-\cos t \end{pmatrix} \quad t = 0\ldots\pi$$

t ist hierbei nicht unbedingt die Zeit.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{2}\begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Definition 18. Parametrisches Wegintegral

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\,\mathrm{d}r = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

Aus der Definition des parametrischen Wegintegrals und $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & mg \end{pmatrix}$ folgt

$$\begin{aligned} W_{12} &= \frac{h}{2}mg\int_0^\pi \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{h}{2}mg\,[-\cos]_0^\pi \\ &= \frac{h}{2}mg\,(1-(-1)) \\ &= mgh \end{aligned}$$

Note 19. Das Arbeitsintegral ist *wegunabhängig* für *konservative Kraftfelder.*

Add Ortsunabhängige Kräfte wie Federrückstellkraft.

20.2 Leistung

Leistung ist definiert als Arbeit pro Zeiteinheit $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$.

Definition 20. Leistung

$$\begin{aligned} P &= \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v} \\ [P] &= \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}\ (\mathrm{Watt}) \end{aligned}$$

20.3 Kinetische Energie

Verknüpfung von Arbeit mit dem 2. Newtonschen Axiom. Massepunkt hat momentan am Ort $\vec{r}$ den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$. Kraft bewirkt Impulsänderung

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

Positionsänderung ist $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$. Eliminierung von $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{p} - \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} &= 0 \\ \frac{\vec{p}\cdot\mathrm{d}\vec{p}}{m} - \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} &= 0 \end{aligned}$$

mit $\mathrm{d}\left(\vec{p}\cdot\vec{p}\right) = \mathrm{d}\vec{p}\cdot\vec{p} + \vec{p}\mathrm{d}\vec{p} = 2\vec{p}\cdot\mathrm{d}p$ folgt

$$\mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2m}\right) - \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

Zwei differentielle Größen, deren Summe konstant bleibt.

Definition 21. Kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2$$

$\mathrm{d}E_{kin} = \mathrm{d}\left(\frac{p^2}{2m}\right)$ ist die Änderung der kinetischen Energie längs der Wegstrecke $\mathrm{d}\vec{r}$ bei Einwirkung der Kraft $\vec{F}$.

20.4 Potentielle Energie

Man könnte die bei obigen Beispielen eingesetzte Arbeit zur Beschleunigung einer Masse nutzen

Gespannte Feder kann die Arbeit $\int -Dx\,\mathrm{d}x$ verrichten

Angehobene Masse kann die Arbeit $\int -mg\,\mathrm{d}z$

Offenbar besitzen die beide Systeme durch die von außen an ihnen verrichtete Arbeit die Eigenschaft, selbst wieder Arbeit verrichten zu können. Diese Eigenschaft heißt *potentielle Energie*.

Angehobene Masse $E_{pot} = mgh$
gespannte Feder $E_{pot} = \frac{1}{2}Dx^2$

20.5 Energieerhaltungssatz

Die verschiedenen Energieformen können ineinander umgewandelt werden.

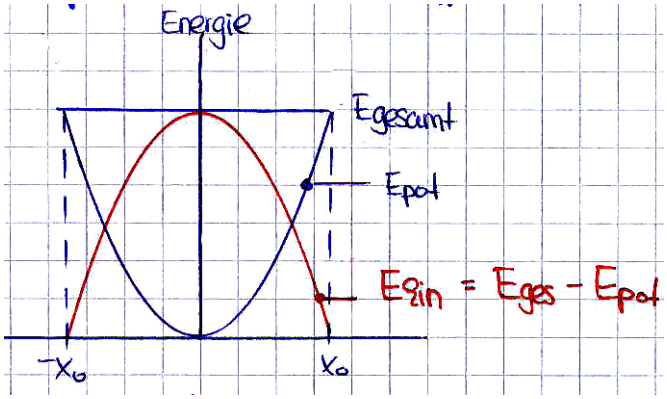
Definition 22. Energieerhaltungssatz der Mechanik

$$E_{kin} + E_{pot} = \mathrm{const.}$$

Verluste durch Reibung sind nicht berücksichtigt, bzw. in einem abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie eine Erhaltungsgröße. Dies schließt die durch Reibungsverluste entstehende Wärmeenergie mit ein.

Beispiel: harmonischer Oszillator

$$\begin{aligned} E_{pot} &= \frac{1}{2}Dx^2 \\ E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_{gesamt} &= E_{pot} + E_{kin} = \text{const.} \end{aligned}$$



x_0 ist die maximale Auslenkung (Amplitude)

$$E_{ges} = \frac{1}{2}Dx_0 = E_{pot,max} = E_{kin,max}$$

Energieerhaltungssatz ist ein *mächtiges Prinzip*, erlaubt oft erhebliche Vereinfachung bei Berechnung von Bewegungsabläufen.

Note 23. Energieerhaltung $\Leftrightarrow$konservative Kräfte $\Leftrightarrow \operatorname{rot}\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} E_{pot}$

Beispiel: Gewichtskraft

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -mg \end{pmatrix} \\ \operatorname{rot}\vec{F} &= 0 \\ \vec{F} &= -\operatorname{grad}(\underbrace{mgz}_{=E_{pot}}) \\ \rightarrow & \quad \text{konservatives Kraftfeld} \end{aligned}$$

Beispiel: Gravitationskraft Siehe mathematischen Einschub.

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\hat{r} \\ \operatorname{rot}\vec{F} &= 0 \\ \vec{F} &= -\operatorname{grad}(\underbrace{-\gamma\frac{m_1 m_2}{r}}_{=E_{pot}}) \\ \rightarrow & \quad \text{konservatives Kraftfeld} \end{aligned}$$

Beispiel: Reibungskraft ist nicht konservativ, hängt nicht in eindeutiger Weise vom Ort ab, lässt sich nicht als Gradientenfeld eines skalaren Potentials darstellen.

20.6 Mathematischer Einschub: Gradient, Rotation, Divergenz

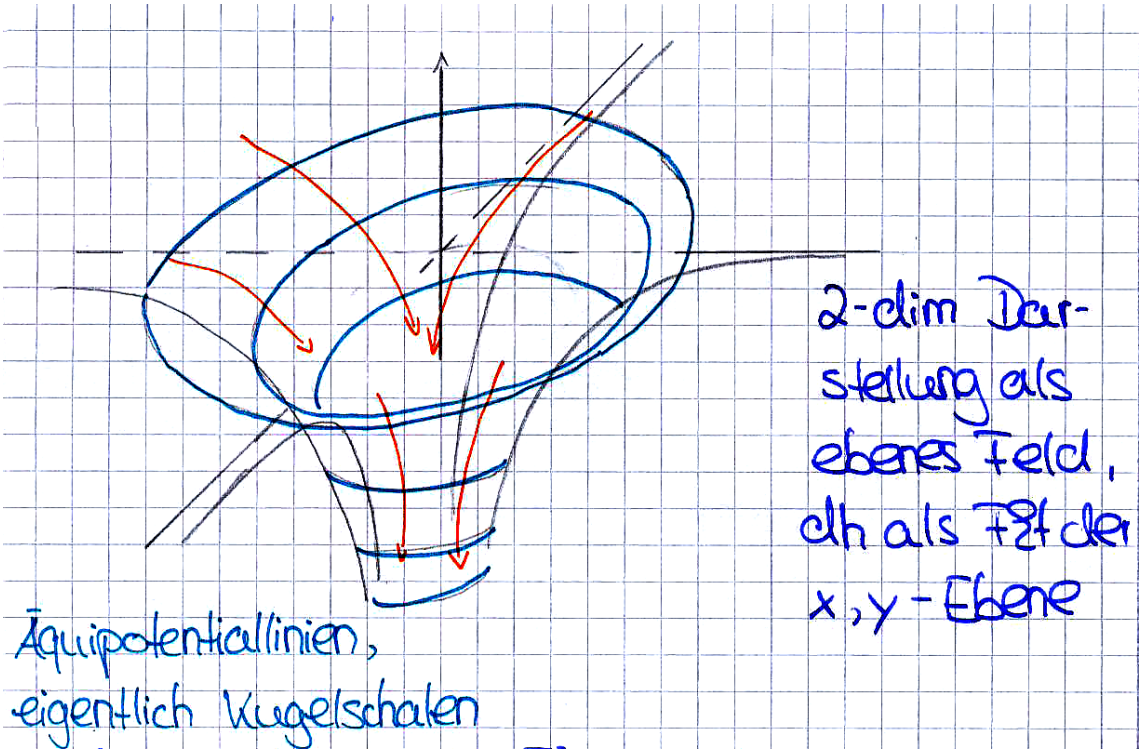
To be continued; momentarily please refer to the mighty Nolting :)

20.7 Äquipotentialflächen

Äquipotentialflächen bezeichnen Orte gleicher potentieller Energie. Definiert durch $E_{pot}(\vec{r}) = \text{const.}$

Beispiel: Gravitationspotential z.B. der Sonne (auch Coulomb-Potential)

$$\begin{aligned} E_{pot} &= -\gamma \frac{m_{Sonne} m_{Planet}}{r} \\ \phi_{Sonne} &= \frac{E_{pot}}{m_{Planet}} \\ &= -\gamma \frac{m_{Sonne}}{r} \\ \phi,\, E_{pot} &\propto -\frac{1}{r} \end{aligned}$$



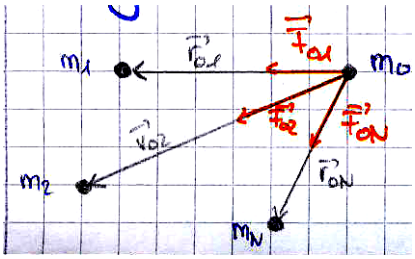
Richtung der Kraft $\vec{F} = -\text{grad}\, E_{pot}$ ist stets senkrecht zu den Äquipotentialflächen/-linien $\rightarrow$*Kraftlinien*

21 Gravitation II - ausgedehnte Masseverteilungen

Potentielle Energie einer Mase m_0 im Feld von N anderen Massen ist berechenbar als Arbeit, die verrichtet werden muss, um m_0 aus der Umgebung der N Massen nach Unendlich zu bringen.

Wegen $\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \cdots + \vec{F}_{0N}$ gilt:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{F}_{01}\,\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{F}_{02}\,\mathrm{d}\vec{r} + \ldots + \int_{\vec{r}_0}^{\infty} \vec{F}_{0N}\,\mathrm{d}\vec{r} \\ &= \gamma m_0 \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots + \frac{m_N}{r_N} \right) \\ E_{pot,m_0} &= -m_0 \gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{r_i} \end{aligned}$$



bei kontinuierlicher Massenverteilung (Massenelemente $\mathrm{d}m$ im Abstand r)

$$E_{pot,m_0} = -m_0 \gamma \int \frac{\mathrm{d}m}{r}$$

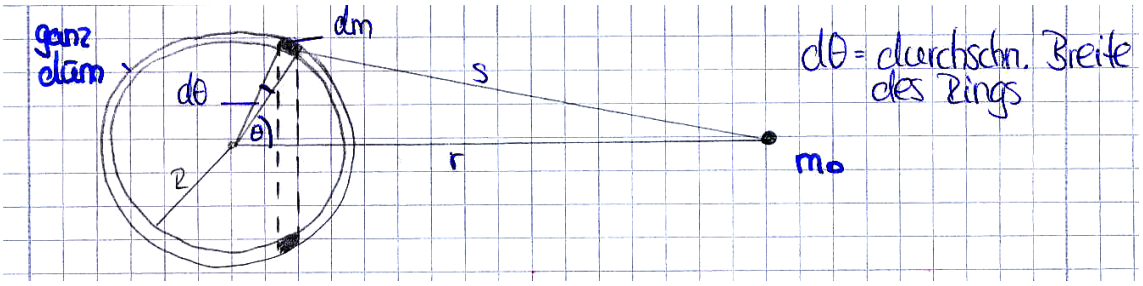
oder

Definition 24. Gravitationspotential der Massenverteilung $\rho(\vec{r})$

$$E_{pot,m_0} = -m_0 \gamma \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{r}\,\mathrm{d}V$$

Dichte $\rho(\vec{r})$ ist ortsabhängig. Auswertung eines solchen Integrals erfordert Computer. Analytisch geht es nur bei einfachen Geometrien.

21.1 Kugelschale der Masse M



Beitrag eines Ringes der Masse $\mathrm{d}m$ im Abstand von s von m_0

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_{pot} &= -\gamma \frac{m_0 \mathrm{d}m}{s} \\ \mathrm{d}m &= \frac{M}{F}\mathrm{d}F \end{aligned}$$

Fläche $\mathrm{d}F$ des Rings (Breite: Umfang)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= R\mathrm{d}\theta 2\pi R\sin\theta \\ &= 2\pi R^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$F = 4\pi R^2$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathrm{d}m &= \frac{M\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{2} \\ \rightarrow \mathrm{d}E_{pot} &= -\gamma\frac{m_0 M}{2}\cdot\frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{s} \end{aligned}$$

mit s variabel. Ganze Kugelschale

$$E_{pot} = -\gamma\frac{m_0 M}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\frac{\sin\theta}{s}\mathrm{d}\theta$$

mit Kosinussatz $s^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$ folgt mit differenzieren $2s\,\mathrm{d}s = 2Rr\sin\theta\mathrm{d}\theta$ und einsetzen

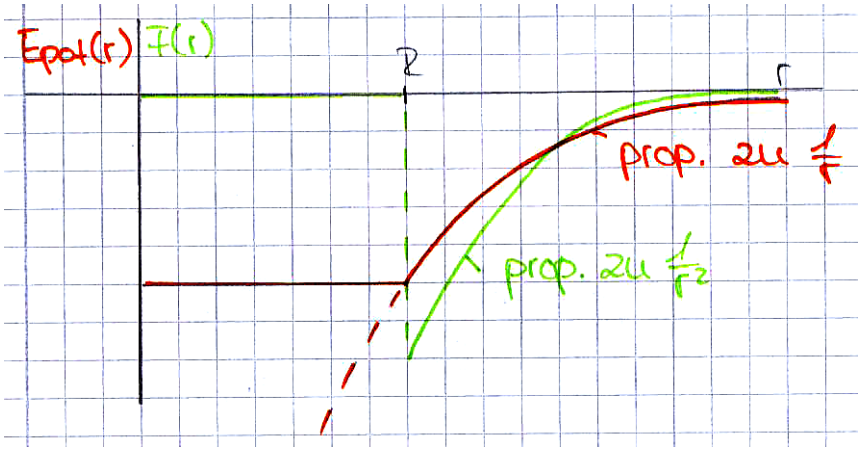
$$\begin{aligned} E_{pot} &= -\gamma\frac{m_0 M}{2Rr}\int_{s(\theta=0)}^{s(\theta=\pi)}\mathrm{d}s \\ &= -\gamma\frac{m_0 M}{2Rr}\left[s(\pi) - s(0)\right] \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

r>R: m_0 außerhalb der Kugelschale. $s(\pi) = r + R$ und $s(0) = r - R$. $E_{pot} = -\gamma\frac{m_0 M}{r}$. Dies ist so, als sei die gesamte Masse der Kugelschale im Mittelpunkt konzentriert worden.

r≤R: m_0 innerhalb der Kugelschale. $s(\pi) = r + R$ und $s(0) = R - r$. $E_{pot} = -\gamma\frac{m_0 M}{R}$. E_{pot} ist also unabhängig vom Ort! Es ist keine Arbeit erforderlich, um m_0 zu verschieben, das Innere ist *kräftefrei*. (grad $E_{pot} = 0$).

Ebenso: In einer geladenen Hohlkugel gibt es keine elektrischen Kräfte.

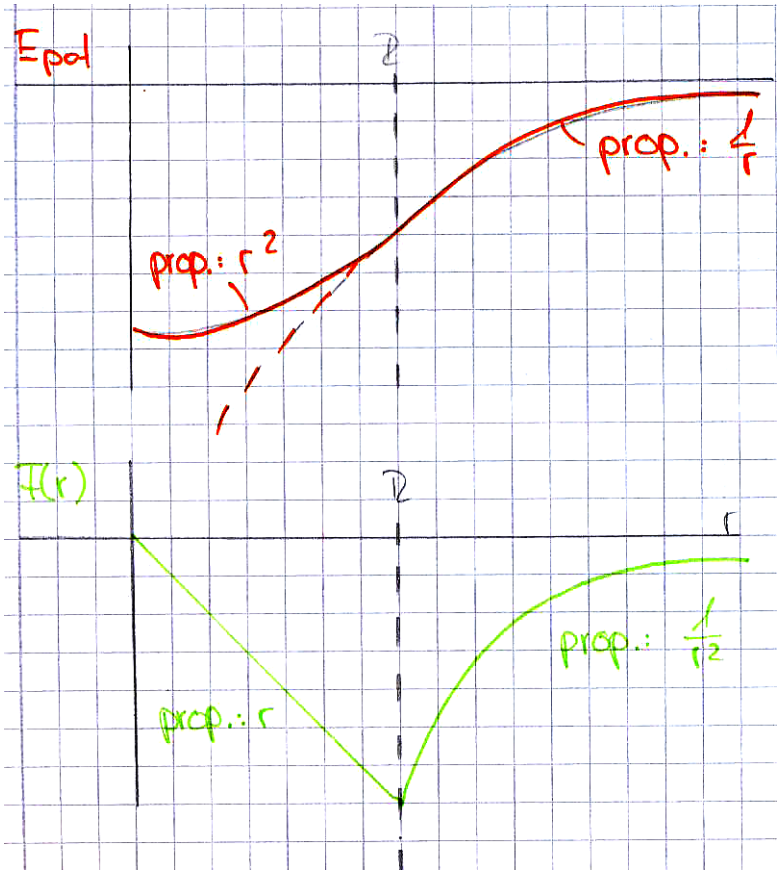


21.2 Vollkugel der Masse M

Vollkugel der Masse M mit $\rho = \text{const}$. Rechnung: Kugelschalen aufintegrieren.

r>R: $E_{pot} = -\gamma \frac{m_0 M}{r}$

r≤R: $E_{pot} = -\gamma \frac{m_0 M}{2R^3} \left(3R^2 - r^2\right)$



Zur Rechnung ist Gaußscher Integralsatz eine elegante Hilfe. (s. Elektrodynamik)

22 Impulserhaltung

Definition 25. In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße.

Eng verknüpft damit ist das 3. Newtonsche Axiom actio = reactio.

Beispiel: zwei Massepunkte Sei $\vec{F}_{21}$ die Kraft die m_1 auf m_2 ausübt. So ist $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ oder $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

Kräfte bedeuten Impulsänderungen

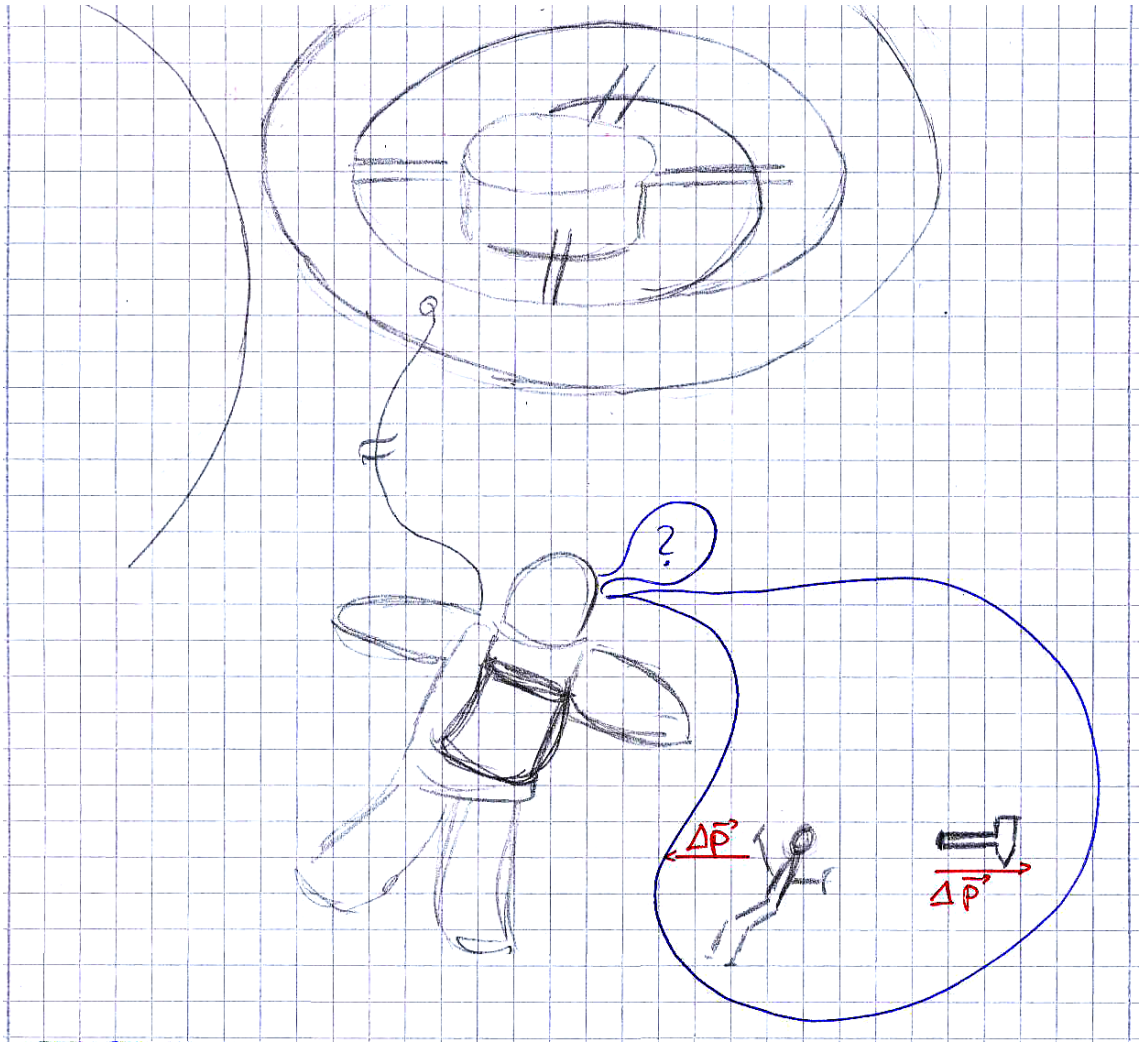
$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} &= \frac{\mathrm{d}\vec{p}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{p}_2}{\mathrm{d}t} = 0 \\ \text{(Integration)} & \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= \vec{p}_{ges} \end{aligned}$$

Wechselwirkung ist i.A. ein komplizierter Vorgang. $\vec{F} = \vec{F}(t)$ aus $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$.

Definition 26. Kraftstoß

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\vec{p_1}}^{\vec{p_2}} \mathrm{d}\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

Im einfachsten Fall ist F wärend Δt konstant. Der Impulserhaltungssatz ermöglicht die Bahndlung von Wechselwirkungen, auch wenn der genaue Verlauf der Kraftübertragung nicht bekannt ist.



22.1 Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt

Definition 27. Der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i\,(t)}{m} \quad \text{mit } m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$\vec{r}_i$ Ort des Massepunktes i

m Gesamtmasse

Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{r}_s(t)}{\mathrm{d}t} &= \vec{v}_s(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i(t)}{m} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i(t)}{m} \\ &= \frac{\vec{p}_s(t)}{m}\end{aligned}$$

Falls äußere Kräfte auf das System wirken ist die resultierende Kraft $\vec{F}_a = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ia}$.

Definition 28. Schwerpunktsatz $\vec{F}_a = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_s}{\mathrm{d}t}$

Massenmittelpunkt verhält sich so, als sei in ihm die Gesamtmasse des Systems vereint und als würden die äußeren Kräfte dort angreifen.

23 Stoßprozesse

Allgemein: Wechselwirkung zwischen Körpern mit Impulsaustausch.

Elastische Stöße Sowohl die mechanische Energie, als auch der Gesamtimpuls, bleibt erhalten. Beispiel zwei Stahlkugeln.

Inelastischer Stoß *Gesamt*energie bleibt auch hier erhalten, aber nicht die mechanische Energie. Gesamtimpuls bleibt erhalten. Beispiel: Kugeln aus Knetgummi.

23.1 Gerader, zentraler Stoß

v_1' und v_2' nach dem Stoß gesucht. Nach der Impulserhaltung folgt

$$\begin{aligned}m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \Leftrightarrow m_1 (v_1 - v_1') &= m_2 (v_2' - v_2)\end{aligned}$$

23.1.1 Elastischer Stoß

Es gilt zusätzlich die Energieerhaltung

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \\ m_1 \left(v_1^2 - v_1'^2\right) &= m_2 \left(v_2'^2 - v_2^2\right) \\ m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') &= m_2 (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)\end{aligned}$$

Durch teilen der letzten Aussage durch die Impulserhaltung folgt

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2$$

Mit einsetzen in Impulserhaltung

$$\begin{aligned}v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ v_1' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2\end{aligned}$$

Beispiele: Gegen ruhende Wand $m_1 \ll m_2$, $v_2 = 0$ folgt $v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{-m_2}{m_2} v_1 \approx -v_1$

23.1.2 Inelastischer Stoß

Energieerhaltung modifiziert $\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + \Delta W$. Dabei ist ΔW der Anteil der mechanischen Energie der in innere Freiheitsgrade der beteiligten Körper, z.B. Wärme übergeht. i.A. schwierig zu bestimmen.

23.1.3 Total inelastischer Stoß

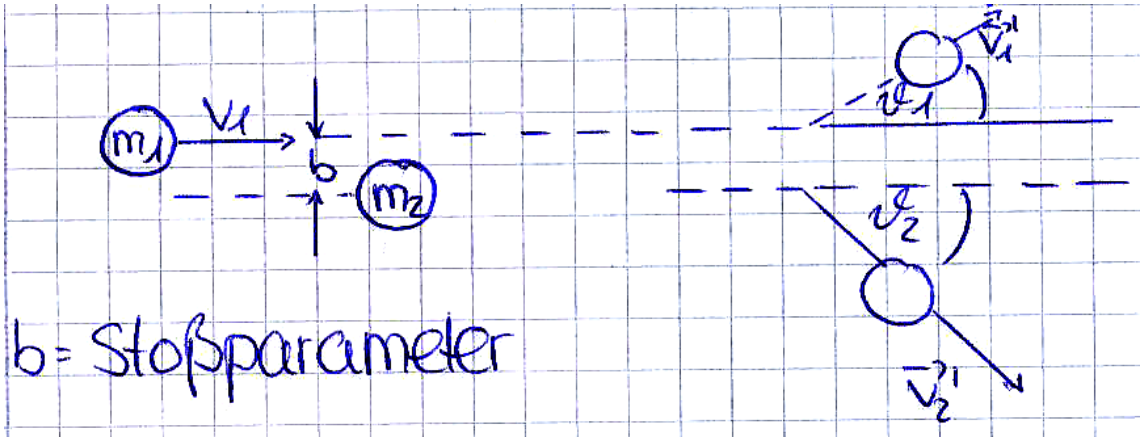
$v_1' = v_2' = v'$; aus Impulserhaltung $v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$ und $\Delta W = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 + v_2)^2$

Beispiel: $m_1 \ll m_2$ **und** $v_2 = 0$ z.B. Ei fällt auf Tischplatte. Vorher $E_{ges} = E_{kin,1}$. Nacher: $v' = 0$, $\Delta W = E_{ges}$

Beispiel: $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$ Vorher $E_{ges} = E_{kin,1}$. Nacher $v' = \frac{v_1}{2}$. $\Delta W = \frac{1}{4}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}E_{ges}$

Beispiel: ballistisches Pendel Ziel ist die Bestimmung von Geschossgeschwindikeiten. Es handelt sich um einen inelastischen Stoß, bei dem die kinetische Energie in potentielle Höhenenergie umgewandelt wird.

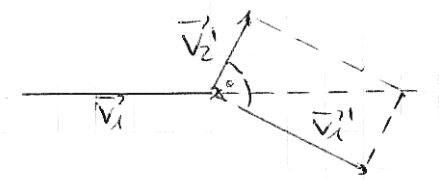
23.2 Nicht zentraler Stoß zweier elastischer Körper



Alle Geschwindigkeitsvektoren liegen in einer Ebene ⇒ Problem in 2 Dimensionen. 4 Unbekannte: : $v_{1x}', v_{1y}', v_{2x}', v_{2y}'$ oder $v_1', \vartheta_1, v_2', \vartheta_2$. 4 Gleichungen:

- Impulssatz, x-Richtung
- Impulssatz, y-Richtung
- Energieerhaltung
- Art der Kräfte, Stoßparameter

Beispiel $m_1 = m_2$ Impulserhaltung ($\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$) und Energieerhaltung $v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$ sind erfüllt, wenn Pythagoras gilt.

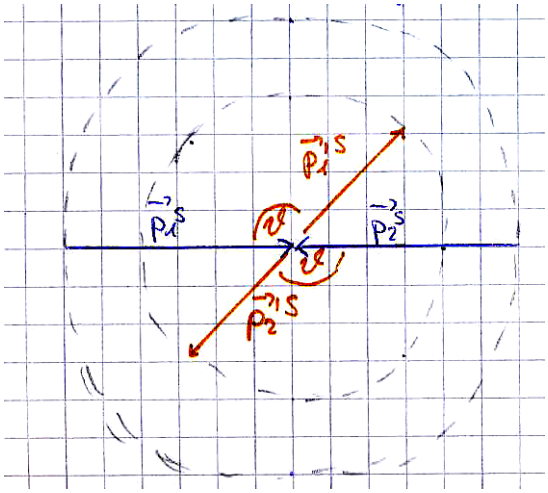


23.3 Stöße im Schwerpunktsystem

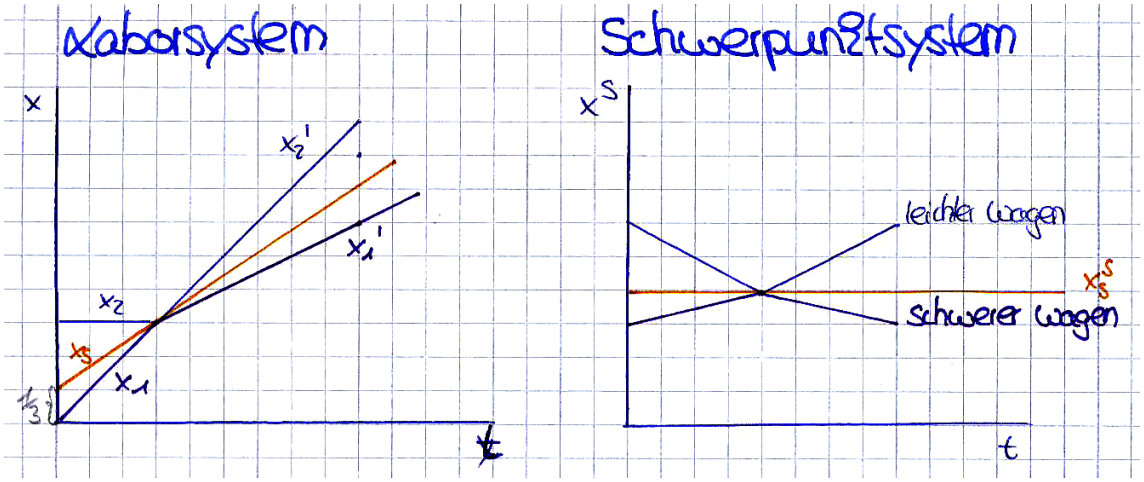
Wir betrachten zwei Massepunkte. Geschwindigkeit des Schwerpunktes im Laborsystem

$$\begin{aligned} \vec{v}_s &= \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{p}_s &= \text{const.} \end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem ruht der Schwerpunkt. $\vec{p}_S^{\,S} = 0$. Vor dem Stoß $\vec{p}_1^{\,S} = -\vec{p}_2^{\,S}$ und nach dem Stoß $\vec{p}_1'^{\,S} = -\vec{p}_2'^{\,S}$

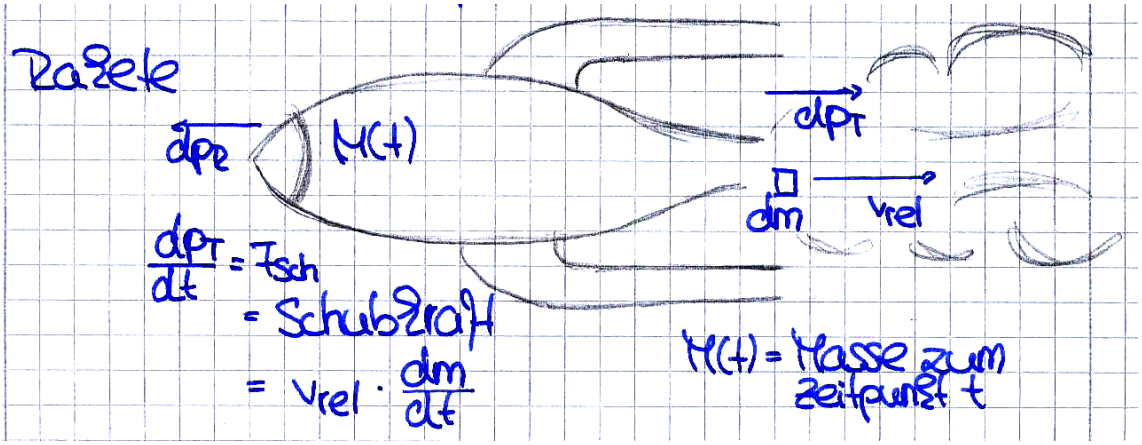


Impulse sind vor und nach dem Stoß entgegengesetzt gleich, beim elastischen Stoß sind die Beträge aller Impulse gleich. Der Streuwinkel ϑ



x_2' bewegt sich vom Schwerpunk aus gesehen mit der gleichen Geschwindigkeit wie x_2 nur in entgegengesetzter Richtung.

23.4 Kontinuierlicher Impulsaustausch



Treibstoffelement $\mathrm{d}m$ wird mit Relativgeschwindigeschwindigkeit v_{rel} ausgestoßen.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}p_T &= -\mathrm{d}p_R \\ v_{rel} \underbrace{\mathrm{d}m}_{=-\mathrm{d}M} &= -M(t)\,\mathrm{d}v \\ v_{rel}\frac{\mathrm{d}M}{M} &= \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Raketengeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \int_0^{v(t)} \mathrm{d}v &= v_{rel}\int_{M_0}^{M(t)} \frac{\mathrm{d}M'}{M'} \\ v(t) &= v_{rel}\ln\frac{M(t)}{M_0} \end{aligned}$$

Endgeschwindigkeit

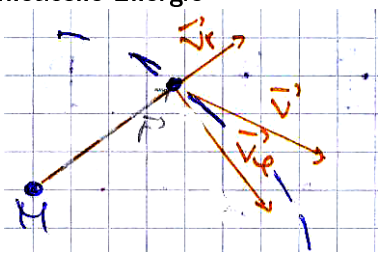
$$v_e = v_{rel}\ln\frac{M_e}{M_0}$$

Das, was die Rakete an Masse verliert, muss mit großer Geschwindigkeit ausgestoßen werden, damit v_e groß wird.

24 Energie- und Drehimpulserhaltung im Gravitationspotential

Potentielle Energie Masse m im Gravitationsfeld der Masse M. Dann ist die potentielle Energie $E_{pot} = -\gamma\frac{mM}{r} = -\gamma\frac{M}{r}M$ mit $\gamma\frac{M}{r}$ =Gravitationspotential $\varphi_g(r)$ des Körper mit der Masse M.

Kinetische Energie



Geschwindigkeit hat einen radialen und einen Winkelanteil. $v_r = \dot{r}$ und $v_\varphi = r\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2}_{\substack{=E_{rot} \\ \text{Rotations-} \\ \text{Bewegung}}} \end{aligned}$$

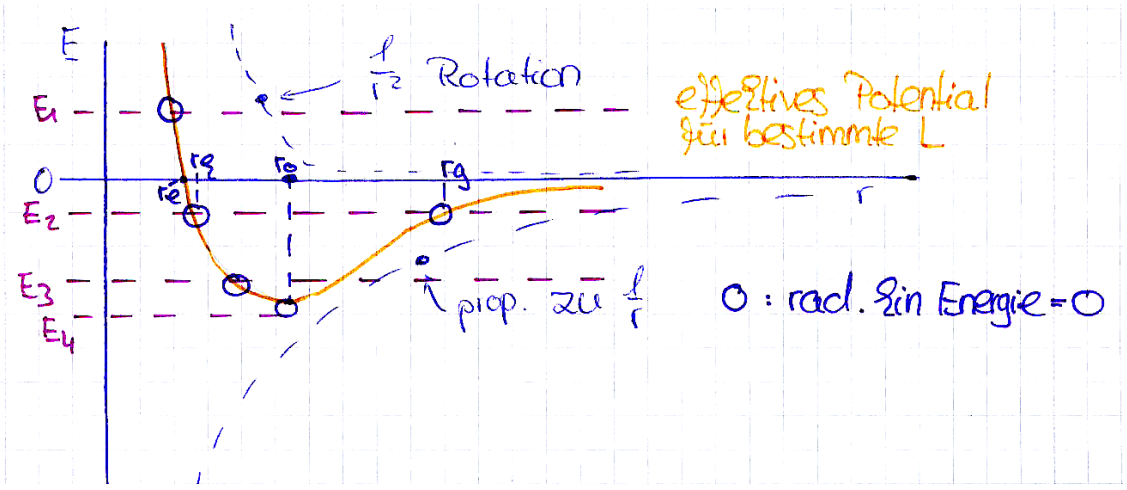
Drehimpuls Drehimpuls ist Erhaltungsgröße, weil kein äußeres Drehmoment angreift.

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ L &= mrv_\varphi \end{aligned}$$

damit $E_{rot} = \frac{1}{2}mr^2\frac{L^2}{m^2r^4} = \frac{L^2}{2mr^2}$. D.h. für gegebenen Drehimpuls ist E_{kin}-Anteil der Rotationsbewegung proportional zu $\frac{1}{r^2}$

Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2}_{\substack{=E_{rot} \\ \text{Rotations-} \\ \text{Bewegung}}} \end{aligned}$$



Zusammenfassung

$E > 0$ „freie“ Zustände. Hyperbelbahnen, Streuprozesse (auch bei Coulombfeld)

$E = 0$ Prabelbahn (gerade nicht mehr geschlossen)

$E < 0$ „gebundene“ Zustände (Ellipsenbahnen)

Teil IV
Mechanik starrer Körper

Bewegungen eines ausgedehnten starren Körpers ist aus Translation und Rotation zusammengesetzt.

Bisher hatten wir nur Massepunkte betrachtet mit der Ausdehnung Null. Dabei haben wir gelernt:

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = \Theta\vec{\omega}$

Trägheitsmoment $\Theta = mr^2$

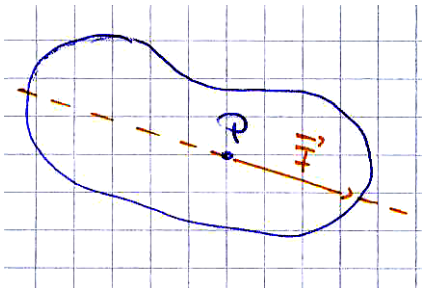
Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$

Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Dynamik $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$

Jetzt „viele“ Massepunkte, die starr verbunden sind, Form ändert sich nicht unter Einfluss der Kräfte.

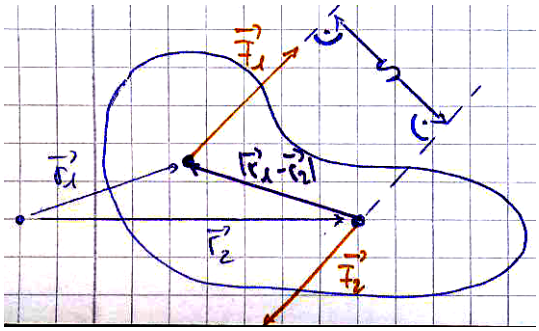
25 Kräfte am starren Körper



Der Angriffspunkt P einer Kraft F kann beliebig entlang ihrer „Wirkungslinie“ verschoben werden.

Fact 29. *Kräfte, die am starren Körper angreifen, sind linienflüchtig.*

25.1 Kräftepaare



$\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ mit $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Kräftepaar erzeugt *keine* Translationsbewegung, da $\sum_i \vec{F}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = 0$, übt aber ein *Drehmoment* aus.

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{M}_1 & = & \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ \vec{M}_2 & = & \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \end{array}\right\} \text{bezüglich beliebigen Nullpunkt}$$

mit $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$

$$\begin{aligned} M &= \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 \end{aligned}$$

$$M = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

Die Richtung von M zeigt in die Zeichenebene hinein. Betrag $M = F \cdot s$ mit s =Abstand der beiden Wirkungslinien

Fact 30. *Das Kräftepaar darf am starren Körper beliebig verschoben werden. Das Drehmoment und seine Wirkung ändern sich dabei nicht.*

- $\vec{M}$ ist nicht an einen bestimmten Punkt gebunden
- $\vec{M}$ ist ein „freier“ Vektor
- $\vec{F}$, linienflüchtig, ist ein gebundener Vektor
- $\vec{M}$ bewirkt eine Winkelbeschleunigung des Körpers um seinen Schwerpunkt.

25.2 Gleichgewichtsbedingung der Statik

Definition 31. Resultierende äußere Kraft und resultierendes „Drehmoment“ müssen Null sein.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_a &= 0 \\ \sum \vec{M}_a &= 0 \end{aligned}$$

25.3 Mechanische Energie eines starren Körpers

Schwerpunkt $\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$, Massenelemente m_i bei kontinuierlicher Massenverteilung

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{\iiint \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{m} \\ m &= \iiint \rho(\vec{r})\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \quad \text{(Körper)} \end{aligned}$$

falls Dichte homogen $\rho(\vec{r}) = \rho$

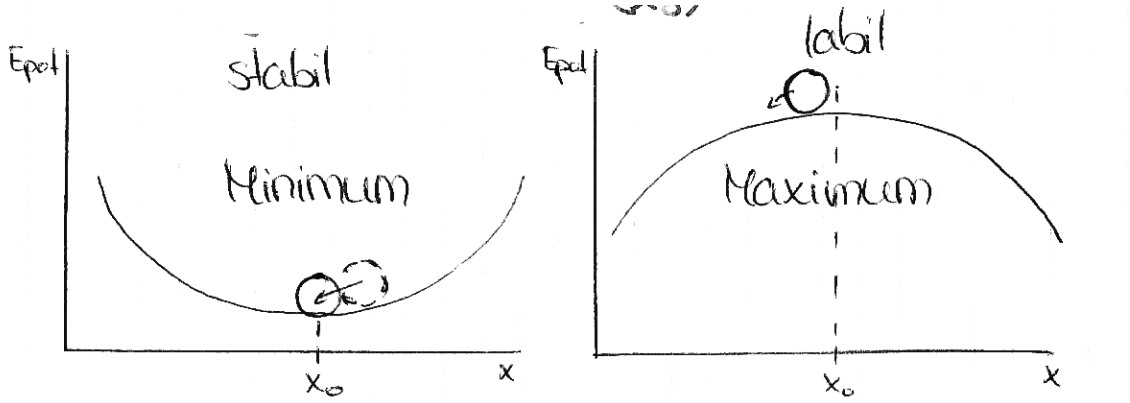
$$\vec{r}_s = \frac{1}{V}\int_v \vec{r}\,\mathrm{d}V \quad \left(\int \mathrm{d}V = \iiint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int \mathrm{d}^3x\right)$$

25.4 Potentielle Energie bezgl. Erdanziehung

Lageenergie bezüglich des Schwerpunkts S

$$E_{pot} = \sum_i m_i g z_i = m g z_s$$

25.5 Gleichgewichtslagen (x_0)



Bei kleinen Auslenkungen

Stabile Lage Körper kehrt zurück, S wird angehoben.

Labile Lage Körper entfernt sich weiter, S senkt sich.

26 Kinetische Energie

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{v}_s + \vec{v}_i' \end{aligned}$$

$$\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t}$$

Die Geschwindigkeit eines Massepunkts m_i setzt sich also aus der Bewegung des Schwerpunkts r_s und der Relativgeschwindigeschwindigkeit des Massepunkts m_i zu diesem zusammen.

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \sum_i m_i + \frac{1}{2}\sum_i m_i \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{r}_s}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i'}{\mathrm{d}t}}_{=0 \text{ nach Def. von S}}
\end{aligned}
$$

$$
E_{kin} = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2
$$

$$
E_{kin} = E_{kin}^{trans} + E_{kin}^{rot}
$$

26.1 Berechnung der Rotationsenergie

Massepunkte m_i drehen sich um eine Achse durch P mit gleicher Winkelgeschwindigkeit ω d.h. $v_{iP} = \omega r_{iP}$ damit $M_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_{iP}^2\right)\omega^2$ mit (Massen-) *Trägheitsmoment* Θ_P des Körpers bezüglich der Drehachse

$$
\begin{aligned}
\Theta_P &= \sum_i m_i r_{iP}^2 \\
&= \int r_P^2 \mathrm{d}m = \int_V \rho\left(\vec{r}\right) r_p^2 \,\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

$$
E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2}\vartheta_P \omega^2
$$

Das Trägheitsmoment Θ gibt die Massenverteilung des Körpers bzgl. einer Drehachse an und damit die Trägheit gegenüber der Winkelbeschleunigung.

Θkann in dynamischen Experimenten bestimmt werden gemäß der Bewegungsgleichung

$$
M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta\omega, \quad \vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}
$$

$$
M = \Theta\dot{\omega} = \Theta\ddot{\varphi}
$$

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
M &= \text{const.} \\
\ddot{\varphi} &= \text{const.} = \alpha \\
\varphi &= \frac{1}{2}\alpha t^2
\end{aligned}
$$

$$
\Theta = \frac{M}{\alpha}
$$

Beispiel Schneckenfeder bei Hookeschem Gesetz →rückstellendes Moment.

$$
M = -D^*\varphi
$$

D^* ist Winkelrichtgröße

Definition 32. Drehschwingung

$$
\rightarrow D^*\varphi = \Theta\ddot{\varphi}
$$

26.2 Harmonischer Oszillator für Drehbewegungen

Lösung der Differentialgleichung für die Drehschwingung

$$-D^*\varphi = \Theta\ddot{\varphi}$$

ergibt die Lösungen:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \ldots) \\ \varphi &= \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \ldots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{D^*}{\Theta}} \\ T &= 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^*}} \end{aligned}$$

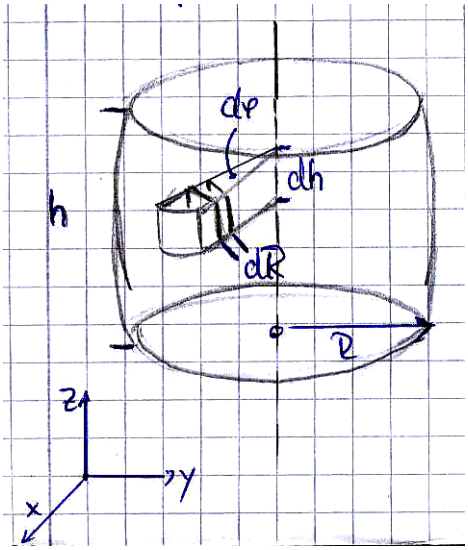
Hantelform →siehe Übungen

Kreisschreibenform Finish this small part...

27 Beispiele von Trägheitsmomenten einfacher Körper

27.1 Vollzylinder

27.1.1 Symmetrieachse

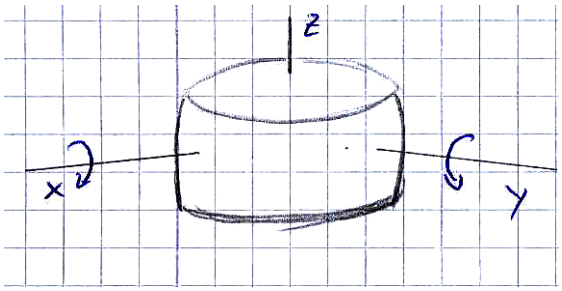


$$\begin{aligned}
\Theta &= \int r^2 \,\mathrm{d}m \\
&= \int r^2 \rho \,\mathrm{d}V \quad (\rho \text{ homogen}) \\
&= \rho \int r^2 \,\mathrm{d}V \\
\mathrm{d}V &= r\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r \mathrm{d}h \text{ (Zylinderkoordinaten)} \\
\Theta &= \rho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}z \\
&= \rho 2\pi h \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \\
&= \rho 2\pi h \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R \\
&= \rho 2\pi h \frac{1}{4} R^4
\end{aligned}$$

mit $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$

$$\Theta_{\text{Vollzylinder,z}} = \frac{1}{2} m R^2 = \Theta_{\text{Kreisscheibe,z}}$$

27.1.2 Restliche Achsen



(Ohne Rechnung)

$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{2} m h^2$$

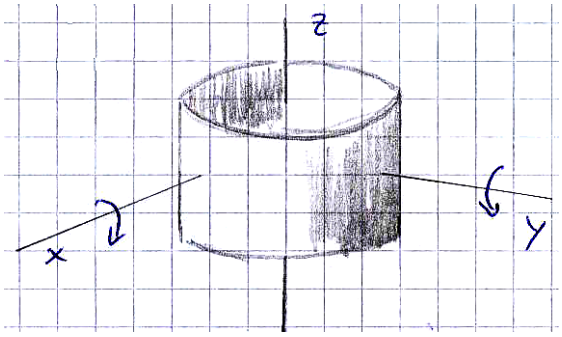
Experimentell: Kreisscheibe

$$\frac{\Theta_z}{\Theta_x} = 2 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{2} = 1,41$$

27.2 Rohr

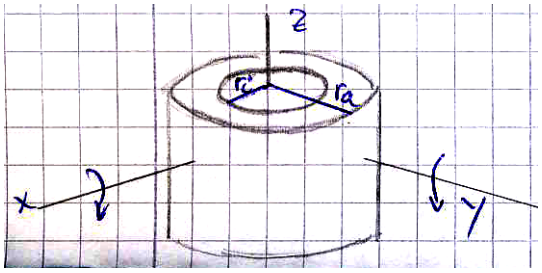
(Vgl. Metallwalze, hohl)

$$\Theta_z = m R^2$$



$$\Theta_x = \Theta_y = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{1}{2}mh^2$$

27.3 Hohlzylinder



$$\begin{aligned} \Theta_z &= \frac{1}{2}m\left(r_a - r_i\right)^2 \\ \Theta_x = \Theta_y &= \frac{1}{4}m\left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3}h^2\right) \end{aligned}$$

27.4 Kugel

27.4.1 Vollkugel

Diese Rechnung ist von mir vom Übungsblatt 10

$$\Theta = \rho \int_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}V$$

Einsetzen der Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

und der Funktionsdeterminaten

$$\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

einsetzen in $x^2 + y^2$ ergibt

$$r^2\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\vartheta\sin^2\varphi = r^2\sin^2\vartheta$$

daher gilt für das Integral

$$\begin{aligned}\Theta &= \rho \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{R^5}{5}\rho \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2}{5}\pi\rho R^5 \int_0^\pi \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta\end{aligned}$$

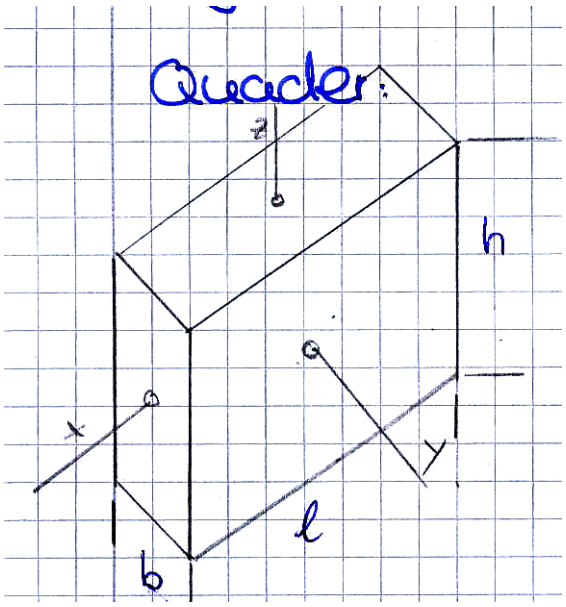
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 x \,\mathrm{d}x &= \left[\left(-\frac{\sin^2(x)}{3} - \frac{2}{3}\right)\cos x\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta &= \frac{2}{5}\pi\rho R^5 \int_0^\pi \sin^3\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\ &= \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5}\rho V R^2 = \frac{2}{5}mR^2\end{aligned}$$

27.4.2 Kugelschale

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_z = \frac{2}{5}mR^2$$

27.5 Quader



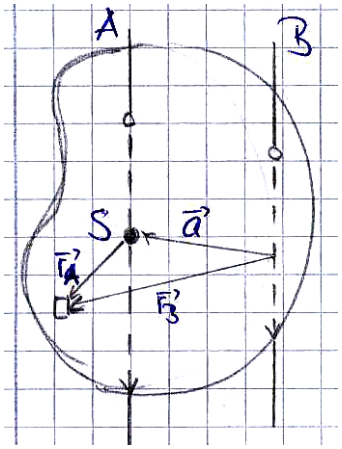
Rechnung folgt später.

$$
\begin{aligned}
\Theta_x &= \frac{1}{12} m \left(b^2 + h^2\right) \\
\Theta_y &= \frac{1}{12} m \left(l^2 + h^2\right) \\
\Theta_z &= \frac{1}{12} m \left(l^2 + b^2\right)
\end{aligned}
$$

28 Satz von Steiner

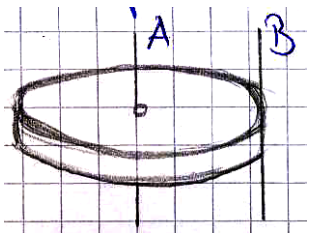
Definition 33. Satz von Steiner

Ist Θ_s das Trägheitsmoment eines Körpers bezüglich einer Achse A durch seinen Schwerpunkt s, so ist das Trägheitsmoment Θ_B bezüglich einer dazu parallel liegenden Achse B die Summe Θ_s plus dem Trägheitsmoment der in S vereinten Gesamtmasse bezüglich B.



$$
\begin{aligned}
\Theta_B &= \int \vec{r}_B^{\,2} \, \mathrm{d}m \\
&= \int \left(\vec{r}_A + \vec{a}\right)^2 \, \mathrm{d}m \\
&= \int \vec{r}_A^{\,2} \, \mathrm{d}m + 2 \int \vec{r}_A \vec{a} \, \mathrm{d}m + \int a^2 \, \mathrm{d}m \\
&= \Theta_s + \underbrace{2\vec{a} \int r_A \, \mathrm{d}m}_{=0 \text{ def. S.P.}} + a^2 m \\
\Theta_B &= \Theta_S + ma^2
\end{aligned}
$$

28.1 Beispiel: Kreisscheibe



$$\begin{aligned}\Theta_s &= \frac{1}{2}mR^2 \\ \Theta_B &= \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 \\ &= \frac{3}{2}mR^3 + 3\Theta_s\end{aligned}$$

29 Trägheitstensor

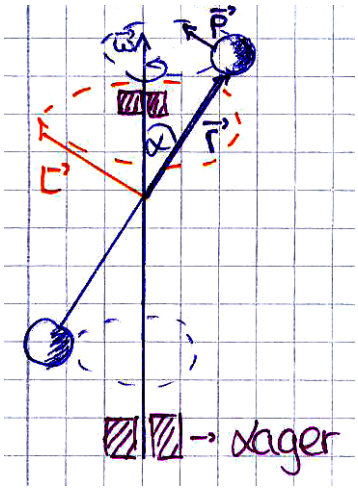
Bei Drehbewegungen von Massepunkten oder bei rotationssymmetrischen Körpern gilt

$$\vec{L} = \Theta\vec{\omega} \quad , \Theta = mr^2$$

oder

$$\Theta = \int_V \rho\left(\vec{r}\right) r^2 \, \mathrm{d}V$$

d.h. $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind parallel (bei geeigneter Wahl des Koordinatenssytems). Dies ist im Allgemeinen *nicht* der Fall.



z.B. schiefe Hantel, rotiert mit Winkel α gekippt gegen $\vec{\omega}$-Vektor

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

$\vec{L}$ läuft auf einem Kegel um $\vec{\omega}$. $\vec{L}$ ist somit nicht konstant, dies erfordert entsprechende Lagerkräfte, bzw. Drehmomente.

Der Trägheitstensor beschreibt die Körperträgheit so, dass sein Drehimpuls für beliebige Rotationsachsen berechnet werden kann.

29.1 Starre Körper aus m_i Massepunkten

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \text{mit } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \\
&= \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \\
&= \sum_i m_i \left(\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{\text{i.A.} \neq 0} \right)
\end{aligned}$$

29.2 Starrer, kontinuierlicher Körper

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \int_{Körper} \left(r^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \right) \, \mathrm{d}m \quad \mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V \\
\vec{L}_x &= \int \left[r^2 \vec{\omega}_x - x \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z \right) \right] \, \mathrm{d}m \\
&= \int \underbrace{\left(r^2 - x^2 \right)}_{y^2 - z^2} \mathrm{d}m \cdot \omega_x - \int xy \, \mathrm{d}m \cdot \omega_y - \int xz \, \mathrm{d}m \cdot \omega_z \\
&= \Theta_{xx}\omega_x + \Theta_{xy}\omega_y + \Theta_{xz}\omega_z \\
\\
\vec{L}_y &= \int \left[r^2 \vec{\omega}_y - y \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z \right) \right] \, \mathrm{d}m \\
&= \int \underbrace{\left(r^2 - y^2 \right)}_{x^2 + z^2} \mathrm{d}m \cdot \omega_y - \int xy \, \mathrm{d}m \cdot \omega_x - \int y^2 \, \mathrm{d}m \cdot \omega_z \\
&= \Theta_{yy}\omega_y + \Theta_{yx}\omega_x + \Theta_{yz}\omega_z \\
\\
\vec{L}_z &= \int \left[r^2 \vec{\omega}_z - z \left(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z \right) \right] \, \mathrm{d}m \\
&= \int \underbrace{\left(r^2 - z^2 \right)}_{x^2 + y^2} \mathrm{d}m \cdot \omega_z - \int zx \, \mathrm{d}m \cdot \omega_x - \int zy \, \mathrm{d}m \cdot \omega_y \\
&= \Theta_{zz}\omega_z + \Theta_{zx}\omega_y + \Theta_{zy}\omega_z
\end{aligned}$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{\Theta}} (\text{Trägheitstensor})} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ ist eine 3x3 Matrix mit axialen Trägheitsmomenten (Diagonalelemente)

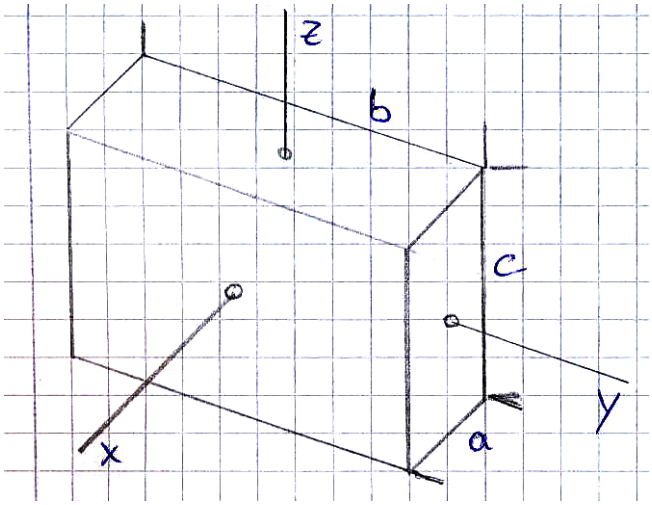
$$\Theta_{xx}, \Theta_{yy}, \Theta_{zz}$$

und Deviationsmomenten

$$\begin{aligned}\Theta_{xy} &= \Theta_{yx}\\ \Theta_{yz} &= \Theta_{zy}\\ \Theta_{xz} &= \Theta_{zx}\end{aligned}$$

Θ ist eine *symmetrische* Matrix, kann durch „Hauptachsentransformation“ in „Diagonalform[1]“ gebracht werden.

29.3 Trägheitsmoment eines Quaders



Achsen durch den Schwerpunkt

$$\begin{aligned}\Theta_{xx} &= \rho\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(y^2+z^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \rho a\left(\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\cdot c + b\left[\frac{1}{2}z^3\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\right)\\ &= \frac{m}{V}a\left(\frac{c}{3}\left(\left(\frac{b}{2}\right)^3-\left(-\frac{b}{3}\right)^3\right)+\frac{c}{3}\left(\left(\frac{c}{2}\right)^3-\left(-\frac{c}{2}\right)^3\right)\right)\\ &= \frac{m}{abc}a\left(\frac{c}{3}\frac{2}{2^3}b^3+\frac{b}{3}\frac{2}{2^3}c^3\right)\\ &= \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta_{xy} &= -\rho\iiint xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= -\frac{m}{V}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}}\\ &= -\frac{m}{abc}\frac{1}{2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{-a}{2}\right)^2\right)\cdots\\ &= 0\end{aligned}$$

[1] Nichtdiagonalelemente = 0

bei der Wahl des Koordinatensystems der Achsen wird der Trägheitstensor diagonal

$$\underline{\underline{\Theta}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} b^2+c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+c^2 \end{pmatrix}$$

Die gewählten Achsen sind Hauptträgheitsachen. Für Rotation um Hauptträgheitsachsen gilt

$$\vec{L} = \underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega}, \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}$$

und diese $\vec{\omega}$ sind „Eigenvektoren“ von $\underline{\underline{\Theta}}$ z.B. $\vec{\omega}$ in y-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_y &= \begin{pmatrix} 0 \\ \omega y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{L} &= \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right)\vec{\omega} \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega} \end{aligned}$$

Für Körper mit $a > b > c$ gilt

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \frac{m}{12}\left(b^2+c^2\right) = \Theta_{min} \\ \Theta_{yy} &= \frac{m}{12}\left(a^2+c^2\right) \\ \Theta_{zz} &= \frac{m}{12}\left(a^2+b^2\right) = \Theta_{max} \end{aligned}$$

$$\Theta_{zz} > \Theta_{yy} > \Theta_{xx}$$

Stabile, freie Rotation ist nur möglich um die Achse des größten oder kleinsten Trägheitsmoment.

29.3.1 Experiment: Schuhkarton in freier Rotation

Finish experiments

29.4 Wahl beliebiger Achsen

Der Trägheitstensor hängt von der Wahl der Achsen ab:

$$\begin{aligned} \Theta_{xx} &= \rho\int_0^a\int_0^b \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{m}{V}\left(\frac{b^3}{3}ac + \frac{c^3}{3}ab\right) \\ &= \frac{m}{3}\frac{abc}{abc}\left(b^2+c^2\right) \end{aligned}$$

Satz von Steiner, zur Übung

$$
\begin{aligned}
\Theta_{xy} &= -\rho \iiint xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{m}{abc}\frac{1}{2}a^2\frac{1}{2}b^2c \\
&= -\frac{m}{4}ab \\
&\vdots \\
\underline{\underline{\Theta}} &= \begin{pmatrix} \frac{b^2+c^2}{3} & -\frac{ab}{4} & -\frac{ac}{4} \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2+c^2}{3} & -\frac{bc}{4} \\ -\frac{ac}{4} & -\frac{bc}{4} & \frac{b^2+a^2}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\underline{\underline{\Theta}}$ ist hier nicht diagonalisiert, aber symmetrisch, lässt sich daher diagonalisieren.

Fact 34. *Der Trägheitstensor eines beliebig geformten, starren Körpers lässt sich diagonalisieren und besitzt drei aufeinander senkrechte Hauptachsen.*

30 Rotationsenergie

$$
\begin{aligned}
E_{kin}^{rot} &= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{v}_i^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_i m_1 \left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)^2 \mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\int \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}^2 \mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\int \left[\left(\omega_y z - \omega_z y\right)^2 + \left(\omega_z x - \omega_x z\right)^2 + \left(\omega_x y - \omega_y x\right)^2\right] \mathrm{d}m \\
&= \frac{1}{2}\left[\Theta_{xx}\omega_x^2 + \Theta_{yy}\omega_y^2 + \Theta_{zz}\omega_z^2 - 2\Theta_{xy}\omega_x\omega_y - 2\Theta_{yz}\omega_y\omega_z - 2\Theta_{xz}\omega_x\omega_z\right] \\
&= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} \text{ mit } \underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} = \vec{L} \\
E_{kin}^{rot} &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega}
\end{aligned}
$$

Die Flächen konstanter Energie E_{kin}^{rot} dargestellt im $\vec{\omega}$-Raum sind Ellipsoide. Dies ist besonders klar, falls $\underline{\underline{\Theta}}$ diagonal.

$$
\begin{aligned}
E_{kin}^{rot} &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{\underline{\Theta}}\vec{\omega} \\
&= \frac{1}{2}\left(\Theta_a\omega_a^2 + \Theta_b\omega_b^2 + \Theta_c\omega_c^2\right)
\end{aligned}
$$

Durch die Hauptträgheitsmomente Θ_a, Θ_b, Θ_c (Trägheitsellipsoid) sind die Rotationseigenschaften eines Körpers vollständig beschreiben.

Es kann zwischen drei Fällen unterschieden werden:

1. Falls$\Theta_a \neq \Theta_b \neq \Theta_c$ handelt es sich um einen unsymetrischen Körper
2. zwei Hauptachsenmomente sind gleich $\Rightarrow$ Körper hat „Figurenachsen“. Besitzt eine ausgezeichnete Haupträgheitsachse.
3. Falls $\Theta_a = \Theta_b = \Theta_c$ handelt es sich um einen bezüglich der Drehbewegung kugelssymmetrischen Körper. Jede Achse durch seinen Schwerpunkt ist Hauptträgheitsachse.

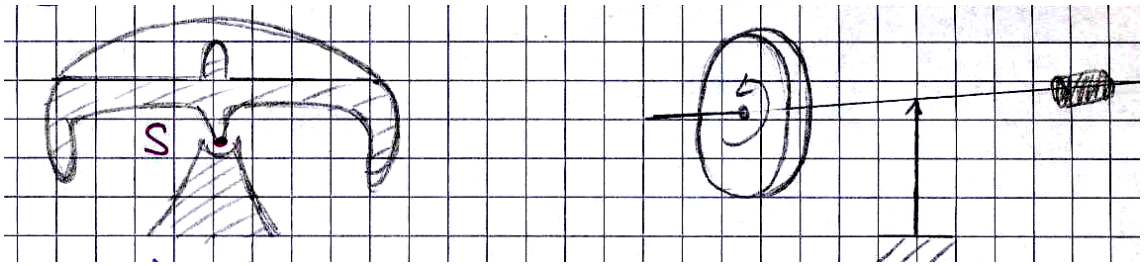
31 Kreiselbewegung

Wir betrachten Drehbewegungen, bei denen sich die Drehachse frei bewegen kann. Hier nur *symmetrische* Kreisel. Figurenachse sei $\vec{c}$-Achse.

$$\underline{\underline{\Theta}} = \begin{pmatrix} \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_b & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_c \end{pmatrix}$$

31.1 Kräftefreier Kreisel

bei Unterstützung *im* Schwerpunkt S treten keine Drehmomente auf.



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

31.1.1 Spezialfall paralleler Drehimpuls und Achse

Figurenachse $\vec{c} \parallel \vec{L}$ oder $\vec{c} \parallel \vec{\omega}$

Anwendungfall zum Beispiel im Kreiselkompass.

Im allgemeiner Fall sind $\vec{\omega}$ nicht nicht parallel zu $\vec{c}$ $\rightarrow \vec{c}$ und $\vec{\omega}$ zeigt dasssind nicht raumfest. Es gilt aber: $\vec{L} = \text{const.}$, $E_{rot} = \text{const.}$

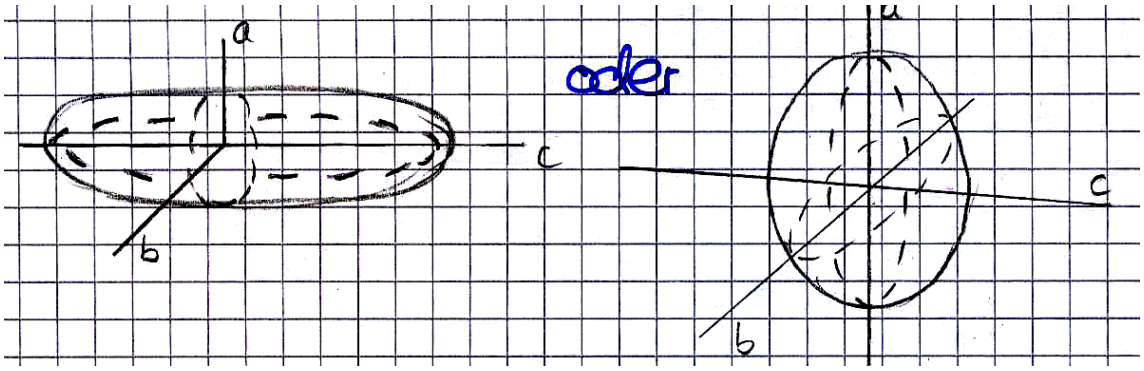
Spezialfall: $\vec{\omega}$ und $\vec{c}$ rotieren um feste $\vec{L}$-Achse $\rightarrow$Nutation („Taumelbewegung“)

31.2 Nutation

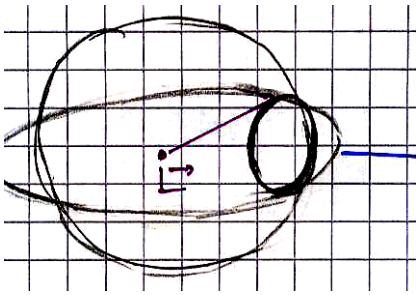
Kräftefreier Kreisel, $M = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const.}$

$\vec{L} = \text{const.}$ $\rightarrow$Daher $\left|\vec{L}\right|^2 = \text{const.}$ und $L_a^2 + L_b^2 + L_c^2 = \text{const}$

Drehimpulskugel $E_{pot} = \text{const.}$ Energieellipsoid.



$\vec{L}$ muss beide Figuren gleichzeitig erfüllen. $\vec{L}$ liegt auf Schnittkurve.

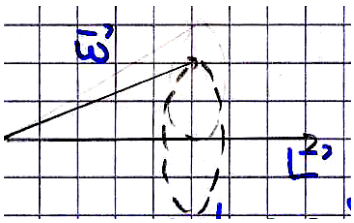


Energieellipsoid im Hauptachsensystem des Kreisels. $\vec{L}$ ist fest, also muss der Kreisel so rotieren, dass der Trägheitstensor und damit die Figurenachse $\vec{c}$ *um* $\vec{L}$ *rotiert.*

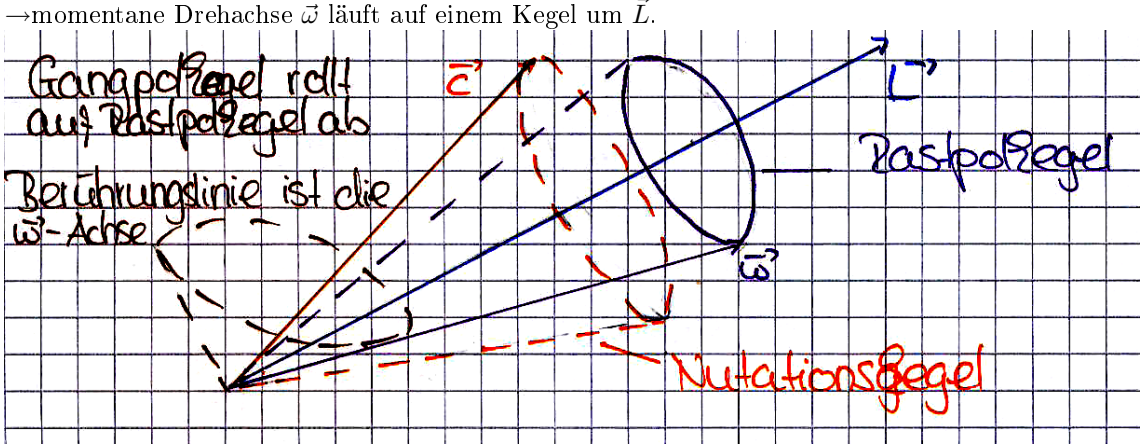
Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\begin{aligned} E_{rot} &= \text{const.} \\ &= \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} \end{aligned}$$

Skalarprodukt: Projektion von $\vec{\omega}$ auf $\vec{L}$, wobei Richtung von $\vec{L}$ konstant ist.



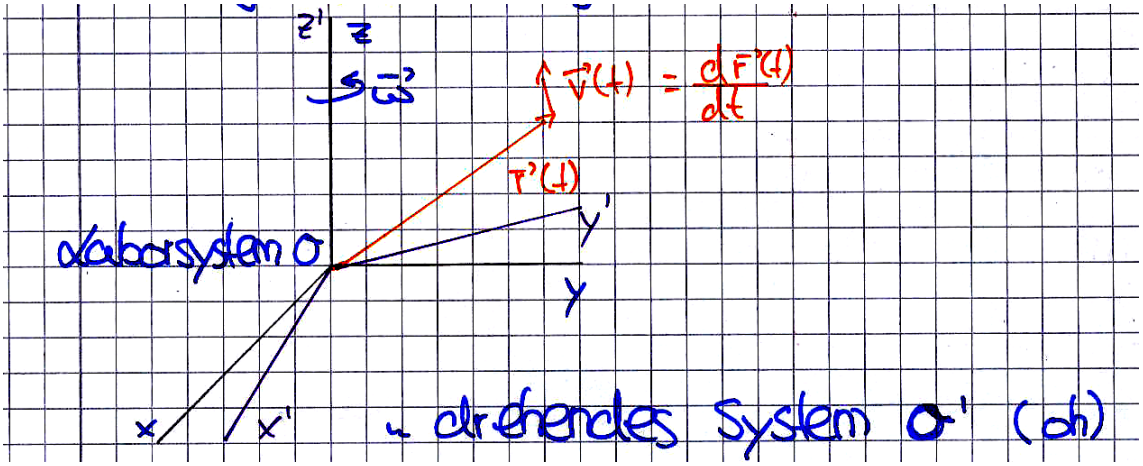
→momentane Drehachse $\vec{\omega}$ läuft auf einem Kegel um $\vec{L}$.



Gangpolkegel, rollt auf Rastpolkegel ab. Berührungslinie ist $\vec{\omega}$-Achse. Rotation der Figurenachse um den festen Drehimpulsvektor $\vec{L}$ heißt *Nutation*.

31.3 Kreiselbewegung im rotierenden Bezugsystem

Im Inertialsystem war die Bewegunsgleichung $\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{M}$. Bewegungsgleichung im Kreiselsystem?



31.3.1 Transformation

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

analog:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t} + \vec{\omega} \times \vec{L} \\ \vec{M} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{\underline{\Theta}}'\vec{\omega}\right) + \vec{\omega} \times \left(\underline{\underline{\Theta}}'\vec{\omega}\right) \end{aligned}$$

Definition 35. In Komponenten, Eulersche Kreiselgleichung

$$\begin{aligned} M_a &= \Theta_a\dot{\omega}_a + (\Theta_c - \Theta_b)\,\omega_b\omega_c \\ M_b &= \Theta_b\dot{\omega}_b + (\Theta_a - \Theta_c)\,\omega_a\omega_c \\ M_c &= \Theta_c\dot{\omega}_c + (\Theta_b - \Theta_a)\,\omega_a\omega_b \end{aligned}$$

Drehmomentfreier, symmetrischer Kreisel

$$\begin{aligned} \vec{M} &= 0 \\ \Theta_a &= \Theta_b \\ \dot{\omega}_a &= \left(1 - \frac{\Theta_c}{\Theta_a}\right)\omega_b\omega_c \\ \dot{\omega}_b &= \left(\frac{\Theta_c}{\Theta_a} - 1\right)\omega_c\omega_a \\ \dot{\omega}_c &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \omega_c = \text{const.!}$$

mit Abkürzung $\Omega \equiv \left(\frac{\Theta_c}{\Theta_a} - 1\right) \omega_c$

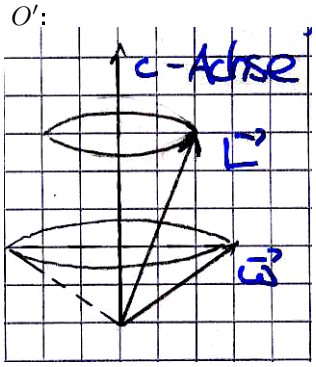
$$\begin{aligned} \dot{\omega}_a &= -\Omega\omega_b \\ \dot{\omega}_b &= \Omega\omega_a \\ \dot{\omega}_c &= 0 \end{aligned}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen. Ansatz mit

$$\begin{aligned} \omega_a &= A\cos\Omega t \\ \omega_b &= A\sin\Omega t \\ \omega_c &= c \end{aligned}$$

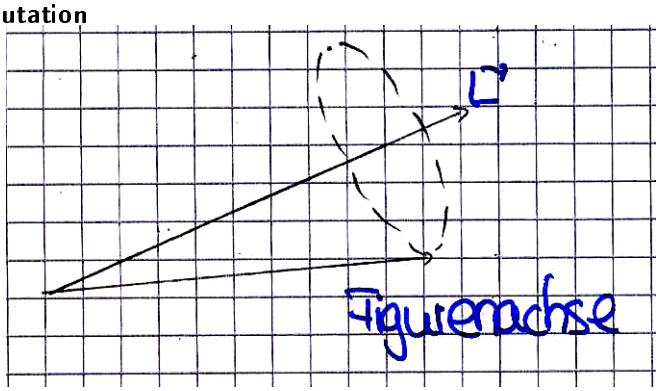
Einsetzen zeigt, dass dies eine Lösung ist. Im rotierenden Bewegungssystem, vom Kreisel aus gesehen, dreht sich $\vec{\omega}$ und $\vec{L}$ um die c-Achse, also um die Figurenachse. Da $\omega_c = \text{const.}$, müssen $\vec{\omega}$ und $\vec{c}$ relativ zueinander fest stehen.

In O':



Im Inertialsystem ist $\vec{L} = \text{const.}$ $\vec{\omega}$ und $\vec{c}$ drehen sich gemeinsam um $\vec{L}$

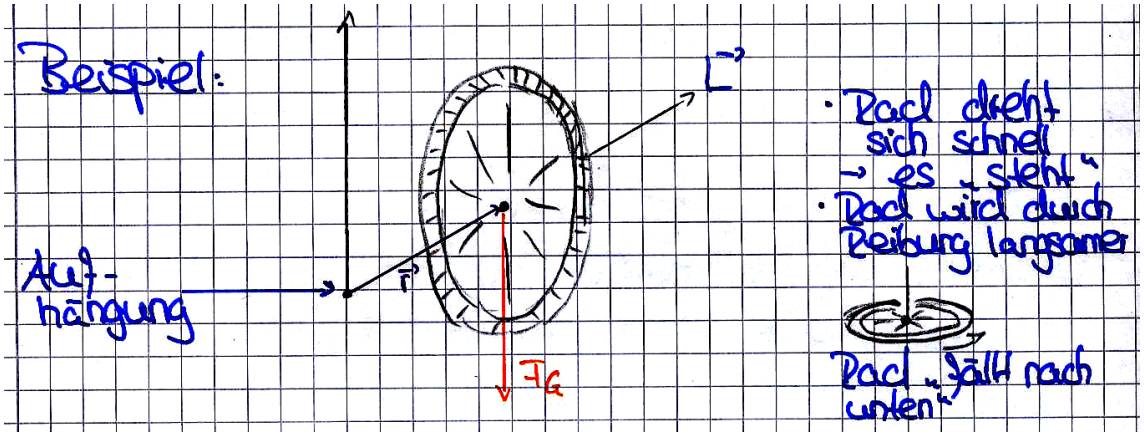
Nutation



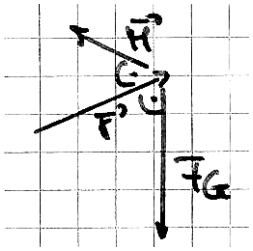
31.4 Kreisel mit äußerem Drehmoment, Präzession

$\vec{M} \neq 0 \rightarrow \vec{L}$ nicht konstant. Insbesondere durch Gravitation.

Beispiel Rad

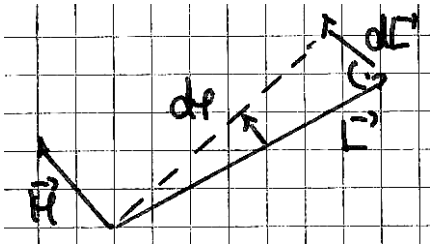


Drehmoment durch einseitige Aufhängung



$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F}_G \\ \vec{M} &\perp \vec{L} \\ \left|\vec{L}\right| &= \text{const.} \end{aligned}$$

aber Richtung von $\vec{L}$ ändert sich.



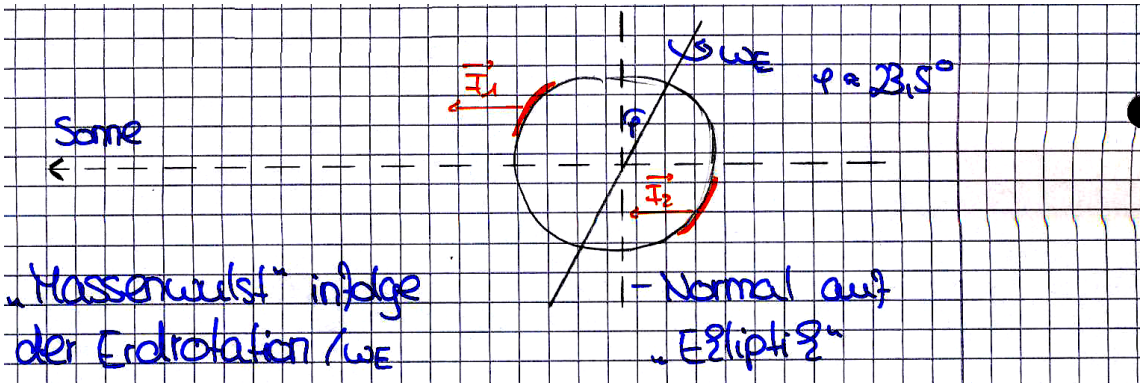
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{L} &= \mathrm{d}\varphi \\ \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{L} &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega p \end{aligned}$$

Präzessionsfrequenz

$$\omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{\Theta\omega}$$

$$\vec{M} = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$$

31.4.1 Präzession der Erde



"Massewulst" infolge von ω_E. Wegen $F_1 > F_2$ resultiert ein Drehmoment, das die Erdoberfläche ausrichten will. $\curvearrowright$ Präzession mit $\frac{\omega}{2\pi} \approx 26000\,\text{a} \rightarrow$ verschiebt den Frühlingspunkt. Schon verschoben sind die Sternbilder der Tierkreiszeichen. Seit der Benennung vor $\approx 2000\,\text{a}$ um $\frac{2000}{26000} \approx \frac{1}{13} \approx 1\,\text{Monat}$. Problem für Astrologen?

31.5 Die kleinste Einheit des Drehimpulses in der Natur

Drehimpuls treten nur in halb- oder ganzahligen Vielfachen der Einheit $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054{\cdot}10^{-34}\,\text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. Drehimpulsquantisierung, h = Planck'sche Konstante/Wirkungsquantum.

Beispiel Molekülrotation (ganzzahlige $\hbar$).

31.5.1 Bahnimpuls des Elektrons im Atom.

Ganzzahlige Vielfache von $\hbar$.

Finish...

31.5.2 Eigenimpuls von Elementarteilchen, Spin

Proton, Elektron, Neutron, ... $\rightarrow$ halbzahlig: $|s_z| = \frac{1}{2}\hbar$. Einstellungen: $\frac{1}{2}\hbar$ oder $-\frac{1}{2}\hbar$

31.5.3 Drehimpulsänderung

sind nur in Einheiten von $\hbar$ möglich! Durch Einstrahlung von elektromagnetischen Wellen (Licht, Mikrowelle), das Strahlungselementarteilchen Proton hat Drehimpuls $1\hbar$.

In abgeschlossenen Systemen ist der Drehimpuls eine Erhaltungsgröße.

In der Mikrowelt z.B. β-Zerfall des Neutrons.

$$\begin{array}{rcl} n & \rightarrow & p + e^- + \text{Neutrino} \\ \text{Drehimpuls} & & \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \end{array}$$

Teil V
Mechanik deformierbarer Körper

32 Generelle Eigenschaften

32.1 Festkörper

makroskopisch Volumen und Form eines Festkörpers bestimmt. Volumen- und formelastisch bei kleinen Kräften.

mikroskopisch Atom, Ionen sind dicht gepackt und meist regelmäßig angeordnet. d.h. kristalline Festkörper. z.B. Metalle, Ionenkristalle oder Quarz (SiO_2).

Unregelmäßige Anordnung: Amorphe Festkörper z.B. Gläser (SiO_2) auch metallische (z.B. $Zr_{59}Ti_3Cu_{20}Ni_8Al_{10}$ oder $Pd_{30}Zr_{70}$)

32.2 Flüssigkeiten

makroskopisch bestimmtes Volumen, Form unbestimmt. Volumenelastisch, aber kann keine Scherkräfte aufnehmen.

mikroskopisch Atome, Moleküle sind unregelmäßig angeordnet, häufige Platzwechsel, fast so dicht wie Festkörper.

32.3 Gase

makroskopisch "kein" Eigenvolumen, keine Form, stark kompressibel.

mikroskopisch Atome, Moleküle haben sehr große Abstände und hohe Geschwindigkeiten

32.4 Kristaline Festkörper

sind aus geometrisch regelmetrisch angeordneten Bausteinen aufgebaut. Sogenannte "*Elementarzellen*"

Bild 13, Elementarzelle 3-diemensional regelmäßig fortgesetzt.

je nach Symmetrie unterscheidet man 7 Kristallsysteme (s. Übung)

- kubisch ($a = b = c$, $\alpha = \beta = \gamma = 90°$)
- tetragonal
- orthorhombisch
- hexagonal ($a = b$, $\alpha = \beta = 90°$, $\gamma = 60°$)
- monoklin
- trigonal (rhomboedrisch)
- triklin

Elementarzellen enthalten

wenige (1...

einige (5...20)

viele (1000...

Atome. Anordnung kann weitere Symmetrieelemente enthalten (Drehungen, Spiegelungen...). Insgesamt 230 verschiedene Kombinationen - die 230 "Raumgruppen"

32.5 Eigenschaften

(Elektrisch, dielektrisch, magnetisch, optisch, thermische und elektrische Leitfähigkeit)

einkristalline Festkörper sind anisotrop.

meistens sind Festkörper aus vielen kleinen Kristalliten aufgebaut mit unterscheidlichen Orientierungen.

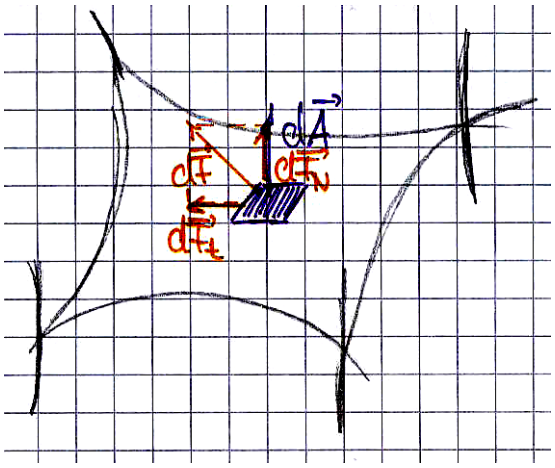
Makroskopische Eigenschaften von *polykristallinen Festkörpern* oder *amorphen* Festkörpern sind *isotrop*.

33 Spannung und Drehnung

Kurzer Ausflug in die Kontinuumsmechanik.

33.1 Spannung

Spannung = $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$, mit Beachtung der Richtungen



Normalkomponenten $\mathrm{d}F_n$ ergibt Normalpannung

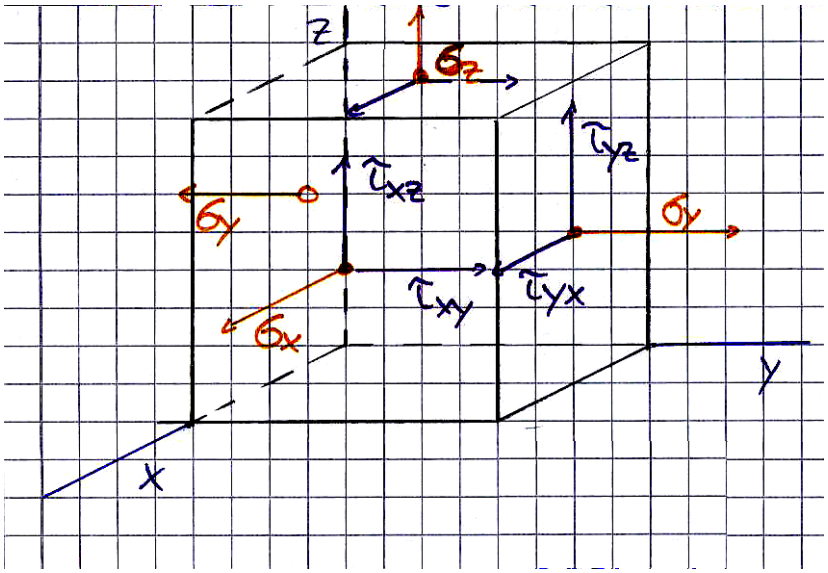
$$\sigma = \frac{\mathrm{d}F_n}{\mathrm{d}A}$$

Tangentialkomponente $\mathrm{d}F_z$ ergibt Tangentialspannung/Schubspannung

$$\tau = \frac{\mathrm{d}F_t}{\mathrm{d}A}$$

33.1.1 3-dimensionaler Festkörper

Würfelförmiges Körperelement

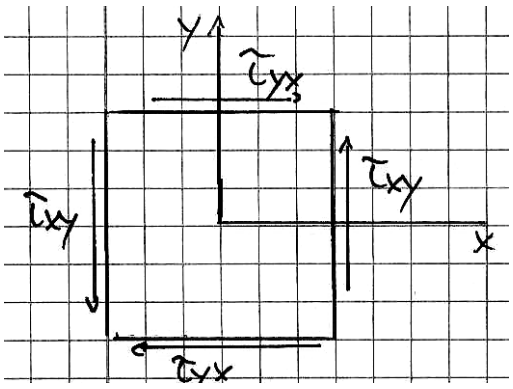


Drei Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ auch gegeüberliegende $\rightsquigarrow F$ alleine bringt nichts, erst $F \nleftrightsquigarrow F$).
Sechs Schubspannungen $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ auch gegenüberliegenend.

Erster Index: Schnittebene

Zweiter Index: Wirkungsrichtung

damit der Würfel nicht rotiert, muss das resultierende Drehmoment verschwinden.



$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \end{aligned}$$

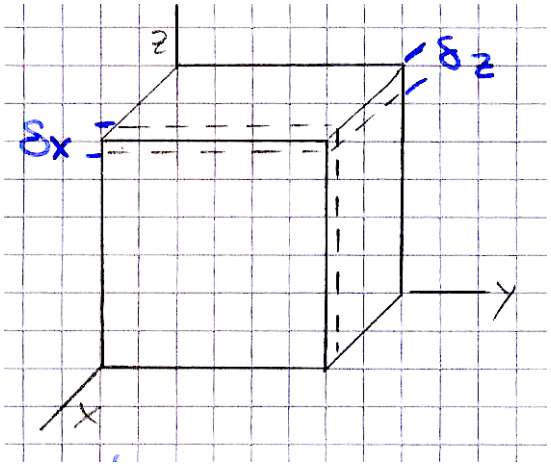
Spannungszustand als Matrix geschrieben

$$\underline{\underline{S}} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Dies ist der Spannungstensor (symmetrisch) (eng. stress-tensor). Aus Schreibsymmetrie:

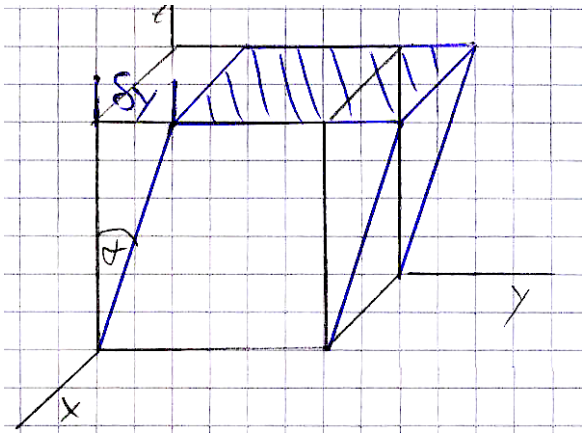
$$\begin{aligned} \tau_{xy} &\rightarrow \sigma_{xy} \text{ usw} \\ \sigma_x &\rightarrow \sigma_{xx} \text{ usw} \end{aligned}$$

33.2 Drehung



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\delta x}{x}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\delta z}{z}$$

33.3 Scherung



z.B. Verschiebung der z-ortientierten Fläche um δy

$$\varepsilon_{zy} = \frac{\delta y}{z} = \tan\alpha \approx \alpha$$

reltative Größe, dimensionslos.

33.4 Verzerrungs- oder Deformationstensor

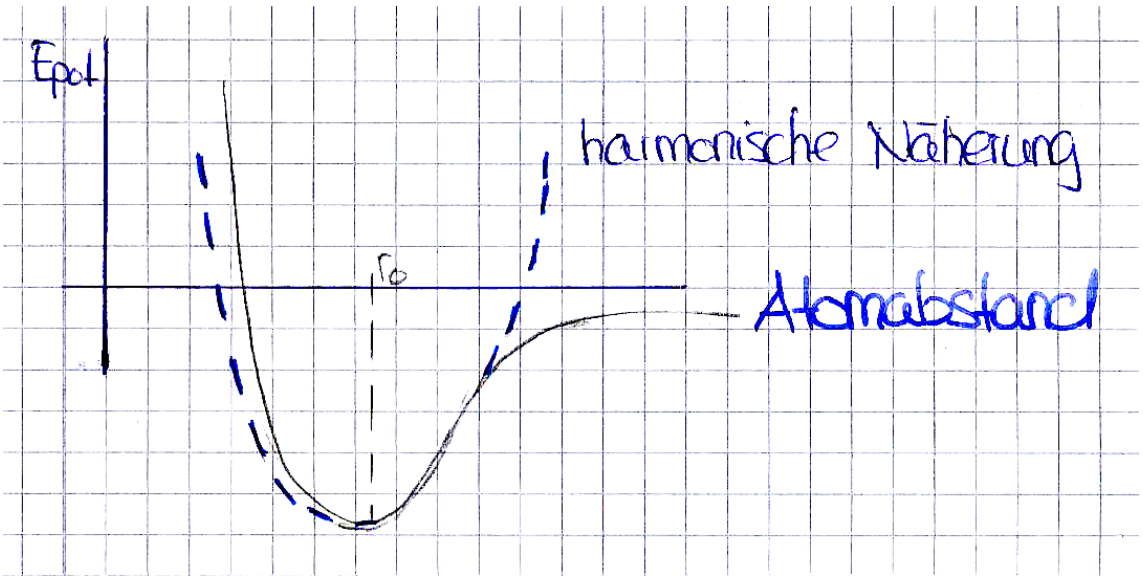
Deformationszustand als Matrix geschrieben:

$$\varepsilon_{kl} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

(Symmetrisch $\Leftrightarrow$ ohne starre Rotation oder Verschiebung) (eng. strain-tensor)

33.5 Verknüpfung von Spannung und Deformation

im lineraren Bereich, d.h. interatomares Potential ist harmonisch.



33.5.1 Hookesches Gesetz

$$\begin{aligned} \text{Spannung} &= \text{Elastizitätsmodule} \cdot \text{Deformation} \\ &\quad (\textit{Stetigkeit}) \\ \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

C ist Tensor 4. Stufe, $81 = 9 \times 9$ Elemente

rechte Seite Einsteinsche Summenkonvention: Über doppelt auftretende Indizes wird summiert. z.B. $\sigma_{12} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} C_{12kl} \varepsilon_{kl}$.

σ_{ij} und ε_{kl} sind symmetrische Tensoren (2. Stufe)

- $\rightarrow$ jeweils 6 verschiedene Elemente
- $\rightarrow C_{ijkl}$ lässt sich als 6×6 Matrix darstellen, die wiederum symmetrisch ist (Voigt'sche Notation)
- $\rightarrow C_{ijkl}$ kann 21 verschiedene Moduln haben. Nötig für *trikline* Festkörper.

Reduktion durch Symmetrie auf

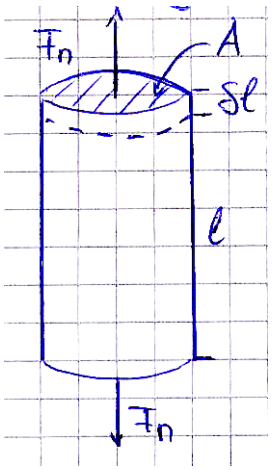
- 3 verschiedene Elastizitätsmodul bei kubischen Kristallen.
- 2 verschiedene bei *isotropen* Festkörpern

34 In der Praxis

In der *Praxis* (Werkstoffkunde) unterscheidet man folgende Verformungsarten: Dehnung, Querdehnung, allseitige Komposition, Scherung.

Werkstoffeigenschaften sind im Allgemeinen isotrop, d.h. 2 unabhängige elastische Module.

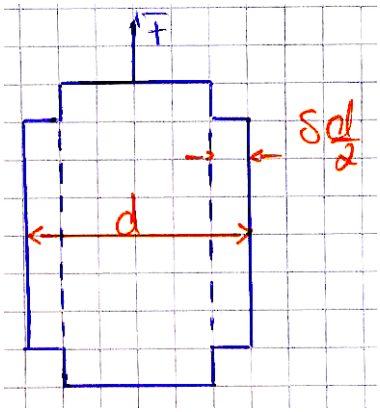
34.1 Dehnung



$$\sigma = \frac{F_n}{A}$$
$$\epsilon = \frac{\delta l}{l}$$
$$\sigma = E\varepsilon$$

E ist der Elastizitätsmodul oder E-Modul (eng. Young's modulus). Größenordnung: $E = 10^{10} \cdots 10^{11} \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

34.1.1 Querdehnung



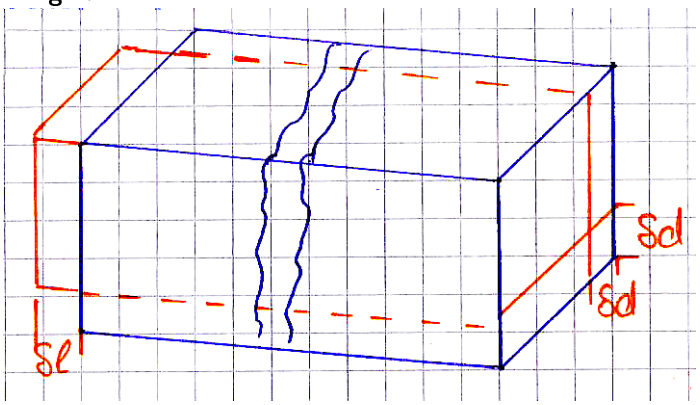
$$\epsilon_q = \frac{\delta d}{d}$$

relative Dickenänderung, ist proportional zur Dehnung

$$\epsilon_q = -\mu\epsilon$$

μ ist Querdehnungs- oder Poisson-Zahl. μ ist positiv und < 0.5. Im E-Modul ist Querdehnung "enthalten".

Betrachte Volumenänderung δV eines Stabs mit quadratischem Querschnitt $(d \times d)$ und Länge l



$$\begin{aligned}\delta V &= (d-\delta d)^2 \cdot (l+\delta l) - d^2 l \\ &= \left(d^2 - 2d\delta d + \underbrace{(\delta d)^2}_{\approx 0}\right) \cdot (l+\delta l) - d^2 l \\ &= d^2\delta l - 2dl\delta d - \underbrace{2d\delta d\delta l}_{\approx 0}\end{aligned}$$

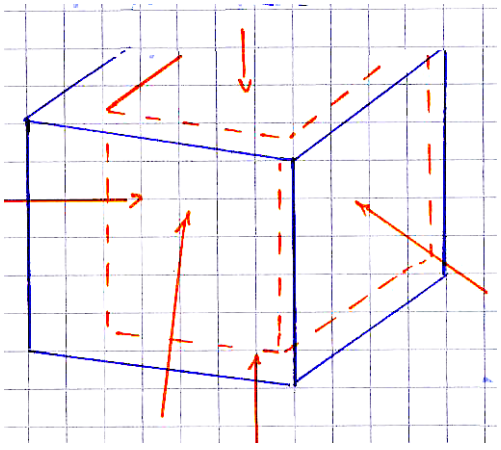
Relative Volumenänderung

$$\begin{aligned}\frac{\delta V}{V} &= \frac{\delta V}{d^2 l} = \frac{\delta l}{l} - 2\frac{\delta d}{d} \\ &= \frac{\delta l}{l}\left(1 - 2\frac{\delta d}{d}\frac{l}{\delta l}\right) \\ &= \varepsilon\,(2-2\mu)\end{aligned}$$

damit $\frac{\delta V}{V} \geq 0$ bei Zugspannung, muss $\mu \leq 0,5$ sein.

34.2 Allseitige Kompression

(auch für Flüssigkeiten und Gase)



Isotrope Druckbeanspruchung

$$\sigma = -\delta p$$

aus

$$\frac{\delta V}{V} = 3\epsilon\,(1-2\mu)$$

folgt mit $\epsilon = \frac{\sigma}{E} = -\frac{\delta p}{E}$

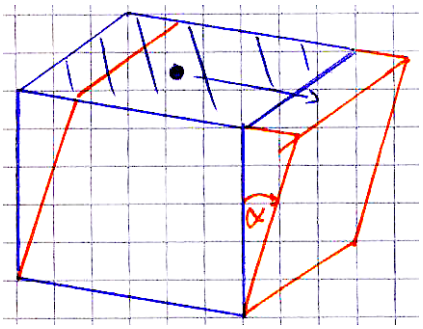
$$\begin{aligned}\frac{\delta V}{V} &= -\frac{3\,(1-2\mu)}{\epsilon}\delta p \\ &= -\frac{1}{K}\delta p \\ &= -\kappa\delta p\end{aligned}$$

$$\delta p = -K\frac{\delta V}{V}$$

Dies ist das Hookesche Gesetz

K	Kompressionsmodul, beschreibt Druckänderung δp, die für eine relative Volumenänderung $-\frac{\delta V}{V}$ nötig ist.
κ	$= \frac{1}{K}$

34.3 Scherung



Schubspannung $\tau = \frac{F_t}{A}$

Scherwinkel α (im Bogenmaß)

Hookes Gesetz

$$\tau = G\alpha$$

Es gilt

$$G = \frac{E}{2\,(1+\mu)}$$

mit $0 < \mu < 0,5$ folgt

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

Die elastischen Moduln (E, G, ...) und Festigkeitskennzahlen (σ_B, ϵ_B,...) sind materialspezifisch und hängen im Allgemeinen von der Vorbehandlung des Werkstoffs ab.

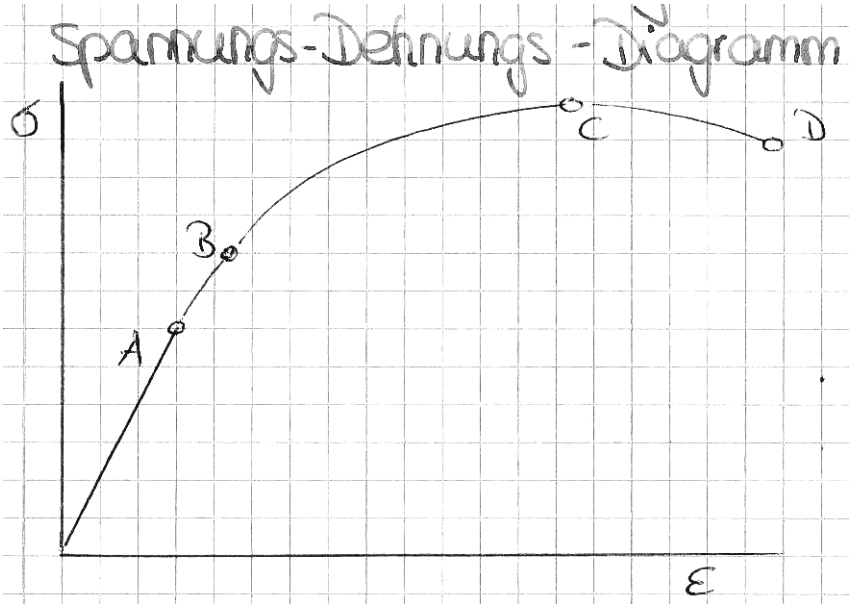
Beispiele

	E	μ	K	G	${\varepsilon_B}^2$	${\sigma_B}^3$
Einheiten	GN/m		GN/m^2	GN/m^2		GN/m^2
Al (rein)	72	0,34	75	27	0,5	0.013
Messing	100	0,38	125	36	0,05	0,55
V2A Stahl	195	0,28	170	80	0,45	0,7

E, μ, K, G sind angegeben bei Gültigkeit des Hookschen Gesetzes

34.4 Plastische Verformung

Spannungs-Dehnungs-Diagramm



A Proportionalitätsgrenze, bis dahin gilt Hooksches Gesetz, Steigung $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E$

A-B nichtlinearer, elastischer Bereich

B Elastizitätsgrenze

B-C plastischer Bereich, nach Entlastung bleibt Dehnung näherungsweise erhalten.

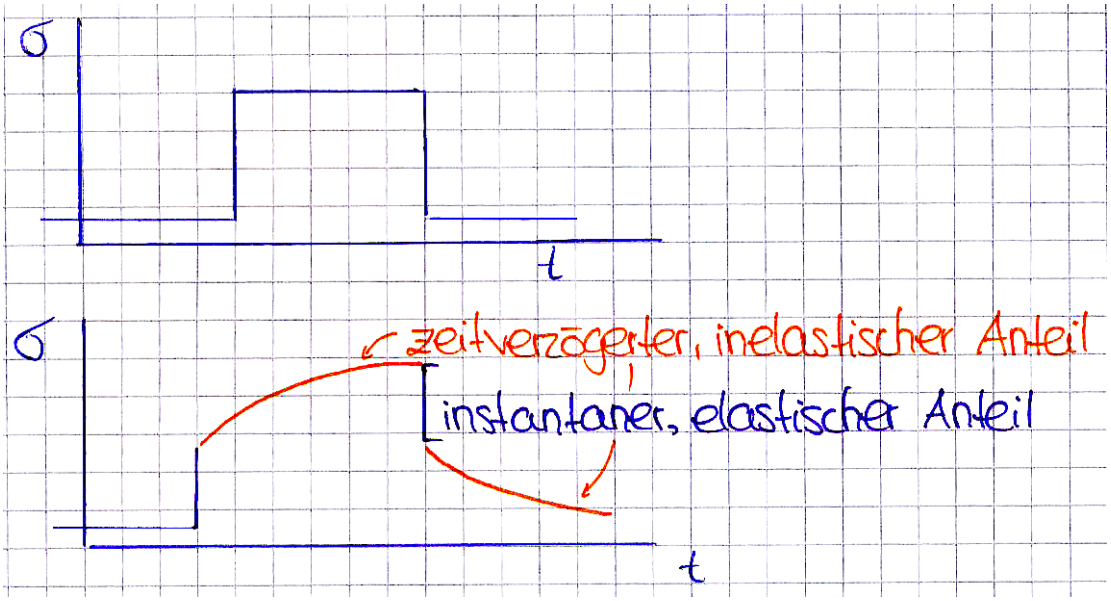
C Streckgrenze. Maximal erreichbare Spannung heißt "Zugfestigkeit" σ_G (danach geht's bergab)

D Bruch, "Bruchdehnung" ε_B

plastische Verformung erfolgt ohne Volumenänderung. Mechanismus: Wandern bestimmter Gitterdefekte, sog. Versetzungen.

34.4.1 Relaxation

anelastischer Effekt durch "Nachwirkung" innerer Freiheitsgrade. z.B. Nylonfaden.



Relaxation lässt sich im einfachten Fall durch Anteil $\epsilon_{rel} \propto \mathrm{e}^{-t/\tau}$ beschreiben mit Zeitkonstanten τ

Ursache Umorientierung von Atomen, Molekülen. τ ist i.A. stark temperaturabhängig. z.B. "thermisch aktivierter" Prozess

$$\tau = \tau_0 \mathrm{e}^{E_A/(k_b T)}$$

E_A	Aktivierungsenergie
$k_b T$	thermische Energie
k_b	Boltzmann-Konstante

34.5 Elastische Energie

z.B. bei Drehung Arbeit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= F \cdot \mathrm{d}l \\ &= \sigma A l \mathrm{d}\varepsilon \end{aligned}$$

allgemein

$$W = V \int \mathrm{d}\varepsilon \sigma$$

→für die gespeicherte elastische Energie pro Volumen im Hookschen Bereich gilt $\sigma = E\varepsilon$

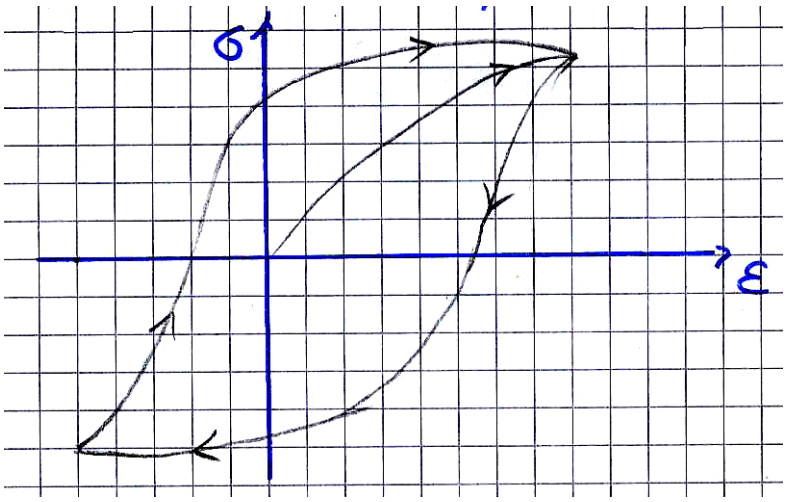
$$\frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} E \varepsilon^2$$

oder bei Scherung

$$\frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} G \alpha^2$$

34.6 Mechanische Hysterese

bei platischer Verformung oder Relaxation



Energieverlust pro Zyklus

$$W = \oint \sigma \mathrm{d}\varepsilon$$

i.A. frequenzabhängig.

34.7 Spezielle Geometrien

34.7.1 Verbiegung eines Stabes

Verbiegung eines Stabes mit der Länge h, Dicke d, Breite b

Doller Stab mit Zugspannung

Oberseite Zugspannung

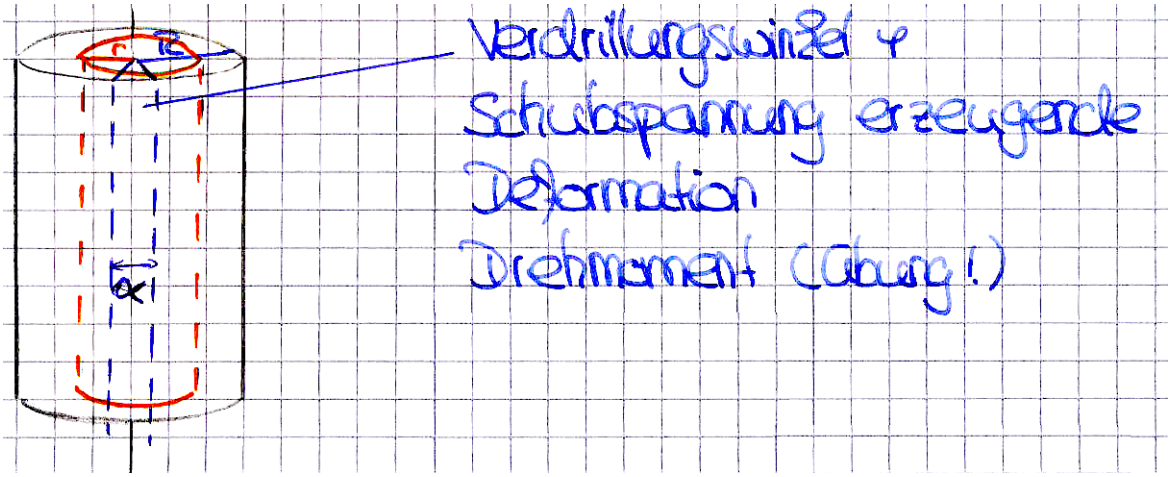
Unterseite Druckspannung

E-Modul ist maßgeblich (ohne Rechnung):

$$F = \underbrace{\frac{E}{4} \cdot \frac{d^3 b}{L^3}}_{=\text{Federk. d. Geometrie}} \cdot x_L$$

Dies ist auch das Hooksche Gesetz.

34.7.2 Torsion eines runden Stabes



Schubspannung erzeugende Deformation. Drehmoment (Siehe Übung)

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \varphi$$

$\frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l}$ $= D^*$ Winkelrichtgröße

$$D \propto G \cdot R^4$$

⇒Torsion abhängig vom Radius.

Experiment Kupferstäbchen mit Radius 3 mm und 4 mm

$$\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^4 = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3,2$$

35 Ruhende Flüssigkeiten und Gase

Hydrostatik und Aerostatik. Flüssigkeiten und Gase besitzen keine Schersteifigkeit (bei ausreichend langsamen Vorgängen), nur Normalspannung, genannt Druck p

$$\begin{aligned} p &= \frac{F_n}{A} \\ [p] &= \frac{N}{m^2} = Pa \text{ (Pascal)} \end{aligned}$$

Kraft steht senkrecht auf allen Oberfläche (z.B. auf Gefäßwänden). Entsprechend gibt es nur noch eine elastische Konstante: Kompressionsmodul K

Näherungsweise: relative Volumenänderung $\frac{\delta V}{V}$ proportional zur Druckänderung δp:

$$\frac{\delta V}{V} = -\kappa \delta p = \frac{1}{K} \delta p$$

κ	Kompressivität
K	Kompressionsmodul

Zahlenbeispiel

	K
Cu	140
Hg	27
Wasser	2
Ethanol	0,9

Flüssigkeiten lassen sich bei gleichem Druck um Faktor 10 bis 100 stärker zusammendrücken.

Gase K ist typischerweise 10^3 bis 10^x kleiner als bei Flüssigkeiten, hängt stark von der Temperatur und Druck ab.

35.1 Hydrostatik

Wegen fehlender Schersteifigkeit und der geringen Kompressivität werden Flüssigkeiten zur räumlichen Kraftübertragung verwendet, z.B. Hebebühne.

Elitäre Hebebühne

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Um eine Last F_2 eine Höhe Δx_2 anzuheben, ist

$$W = F_2 \Delta x_2 = F_1 \Delta x_1$$

nötig, daher

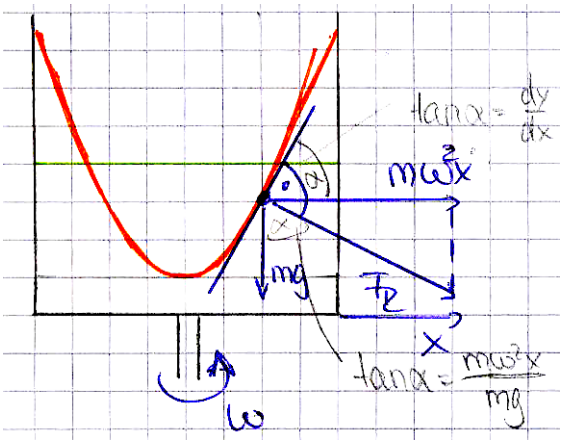
$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

die geringere Kraft F_1 muss über einen längeren Weg ausgeübt werden, so dass das verschobene Flüssigkeitsvolumen

$$\Delta x_1 A_1 = \Delta x_2 A_2$$

35.2 Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit

Die Oberfläche einer rotierenden Flüssigkeit ist ein Rotationsparabolid. Wegen fehlender Schersteifigkeit steht die Oberfläche einer Flüssigkeit immer senkrecht zu der an den Molekülen angreifenden Kraft. (Stehende Flüssigkeit hat eine horizontale Oberfläche, senkrecht zur Graviation.)



Zentrifugalkraft und die Gewichtskraft wirken auf Teilchen der Masse an der Oberfläche. Gleichgewicht ist dann erreicht, wenn die Oberfläche senkrecht zur resultierenden Kräft steht.

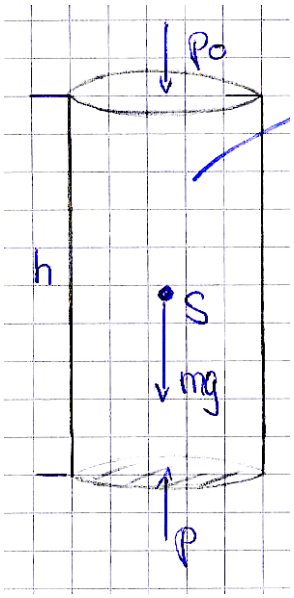
Tangente an der Oberfläche

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{m\omega^2 x}{mg} \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2 \end{aligned}$$

Anwendung als Hg-Spiegel für die Astronomie.

35.3 Schweredruck in Flüssigkeiten

Druck aufgrund des Eigengewichts



Flüssigkeitssäule der Höhe h, Querschnittsfläche A und der Dichte $\rho = \frac{m}{V}$; Kompressibilität wird vernachlässigt.

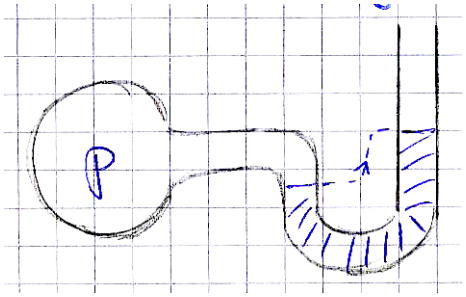
Kraft auf Boden

$$\begin{aligned} F &= pA = p_0 A + mg \\ &= p_0 A + \rho A h g \\ \Rightarrow p &= p_0 + \rho g h \end{aligned}$$

Linear mit Höhe abhängig.

Anwendung

offenes Flüssigkeitsmanometer Druckdifferenz $p - p_0 = \rho g h$ mit ρ gleich der Dichte der Flüssigkeit im U-Rohr.



- geschlossenes Flüssigkeitsbarometer, zur Messung des Absolutdruckes z.B. der Atmosphäre
Finish

36 Schweredruck in Gasen

Kompressibilität ist groß, darf nicht vernachlässigt werden. Für eine feste Gasmenge gilt

$$V \propto \frac{1}{p}$$

oder

$$V \cdot p = \text{const.}$$

Dies ist das Boyle-Mariottesches Gesetz.

Gültig bei konstanter Temperatur und exakt nur für ideale Gase. Aus

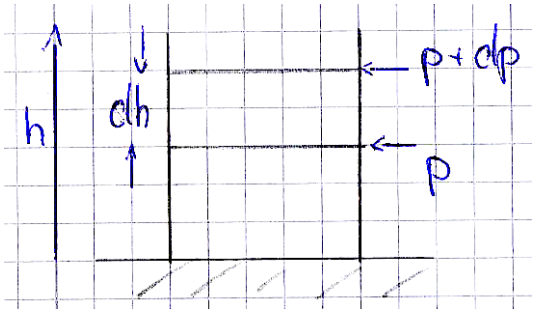
$$\begin{aligned} V &= \frac{\text{const.}}{p} \\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} &= -\frac{\text{const.}}{p^2} = -\frac{V}{p} \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{V} &= -\frac{1}{p}\mathrm{d}p \\ \kappa &= \frac{1}{K} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

aus $V \propto \frac{1}{p}$ mit $\rho = \frac{m}{V}$

$$\rho \propto p$$

$\frac{p}{\rho} = \text{const.} = \frac{p_0}{\rho_0}$ Referenzwert

Unter dem Einfluss der Schwerkraft ist die Dichte proportional zum Druck durch die darüber stehende Luftsäule und nimmt daher mit zunehmender Höhe ab.



$$\mathrm{d}p = -\rho \cdot g \cdot \mathrm{d}h$$

mit

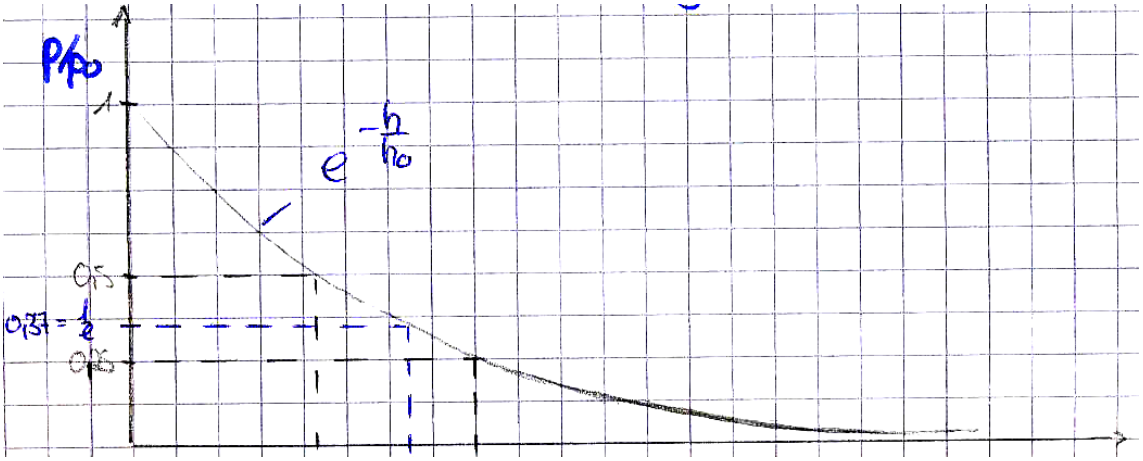
$$\rho = \left(\frac{\rho_0}{p_0}\right) \cdot p$$

$\Rightarrow \mathrm{d}p = -\frac{\rho_0}{p_0} g p \,\mathrm{d}h \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g p$

Lösung dieser Differentialgleichung ist eine e-Funktion. Barometrische Höhenformel

$$\begin{aligned} p &= p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h} \\ \rho &= \rho_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} h} \end{aligned}$$

Für Normatmosphäre bei $288,15\,\mathrm{K}$ (entspricht $15\,^\circ\mathrm{C}$): $\rho_0 = 1,293\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$ und $p_0 = 10,325\,\mathrm{Pa}$ erhält man als Höhe $h_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} = 7,962\,\mathrm{km}$.



Barometrische Höhenformel mit Temperaturkorrektur:

$$p = 1,013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\left(1 - \frac{6,5}{288\,\mathrm{km}} \cdot h\right)^{5,255}$$

Kleiner aber feiner Zusatz: Boltzmann-Faktor nochmal zum Exponenten $\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot h$ mit dem idealen Gasgesetz: (Physik III)

$$p \cdot V = m \cdot RT$$

n	Stoffmenge
R	universelle Gaskonstante $R = 8,31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol}}\mathrm{K}$

für $n = 1\,\mathrm{mol}$

$$\begin{aligned} pV_{mol} &= RT \\ p\frac{m_{mol}}{\rho} &= RT \end{aligned}$$

mit $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ (Avogadro-Konstante), erhält man die Bolzmann-Konstante

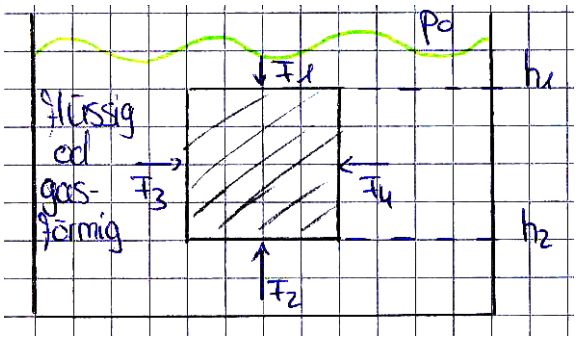
$$\begin{aligned} k_B &= \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \\ \frac{p m_{molekül}}{\rho} &= k_B T \end{aligned}$$

$\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{\rho}{p} = \frac{m_{Molekül}}{k_B T} \Rightarrow \rho = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{m_{molekül} \cdot gh}{k_B T}}$ mit $\frac{m_{molekül} \cdot gh}{k_B T} = \frac{\Delta E}{k_B T}$ (Boltzmann-Faktor)

Der Boltzmann-Faktor gibt den Bruchteil von Molekülen an, die im Gleichgewicht mit der thermischen Energie $k_B T$ einen energetisch höheren Zustand einnehmen.

37 Auftrieb

$\equiv F_A$ auf einen in Flüssigkeiten oder Gas eingetauchten Körper (V_K,ρ_K)



F_3 und F_4 kompensieren sich gegenseitig.

$$F_A = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A$$

p_0 fällt raus

$$F_A = \rho_{fl} \cdot g \underbrace{(h_2 - h_1) \cdot A}_{V_k}$$

Auftriebskraft=Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit.

$$\Rightarrow \text{Archimedisches Prinzip}$$

Gesamtkraft auf den Körper

$$F_G - F_A = g\left(\rho_K - \rho_{fl}\right) V_K$$

bei $F_G > F_A$ sinkt der Körper. Bei $F_G < F_A$ steigt der Körper bis $g \cdot \rho_k V_K = g \cdot \rho_{fl} V_{verträngt}$

Schweben: Vorsicht, wenn das Fluid Gas ist: ρ_{fl} hängt von der Höhe ab!

38 Grenzflächenphänomene

38.1 Oberflächenspannung

Grenzfläche Flüssigkeit/Gas

Moleküle an der der Oberfläche haben wenige Nachbarn, sind schwächer gebunden und haben höhere potentielle Energie.

⇒Arbeit erforderlich um die Oberfläche zu vergrößern.

⇒Flüssigkeitsoberflächen sind Minimalflächen, z.B. ist eine Kugelform bei gegebenem Volumen energetisch am günstigen.

Die Zahl der Oberflächenmoleküle wächst linear mit der Oberfläche:

$$\mathrm{d}W \propto \mathrm{d}A$$

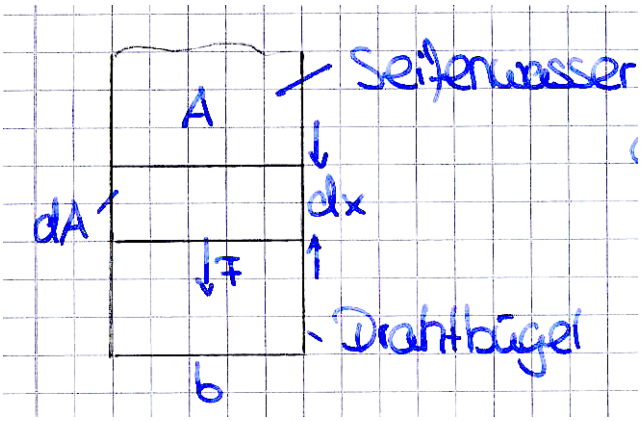
$\mathrm{d}A$ ist Oberflächenvergrößerung.

Definition 36. Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}A}$$
$$[\sigma] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

z.B. Wasser $\sigma \approx 0,07\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, Quecksilber $\sigma \approx 0,5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Hängt stark von Reinheit und Temperatur ab.

σ ist unabhängig von der Fläche $A \Rightarrow$ Unterschied zur elasatischen Membran.



$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= \sigma \cdot \mathrm{d}A \\ &= \underbrace{\sigma \cdot 2b}_{F} \cdot \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Messmethode für σ, Rückstellkraft F ist unabhängig von A.

Beispiel Oberflächendruck einer Flüssigkeitskugel oder Gaskugel in Flüssigkeit. Um Kugel zu vergrößern, ist *Volumenarbeit* erforderlich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_v &= p\mathrm{d}V \\ V &= \frac{4}{3}\pi r^2 \\ \mathrm{d}W &= p\frac{4}{3}\pi r^2 \mathrm{d}r \end{aligned}$$

Die Arbeit dient zur Vergrößerung der Oberfläche

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{OF} &= \sigma \mathrm{d}A \\ A &= 4\pi r^2 \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} &= 8\pi r \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}W_{OF} = \sigma 8\pi r \mathrm{d}r$$

$$p = \frac{2\sigma}{r}$$

"Oberflächendruck" $\propto \frac{1}{r}$, durch Oberflächenspannung verursacht.

Seifenblase 2 Oberflächen: $p = \frac{4\sigma}{r}$

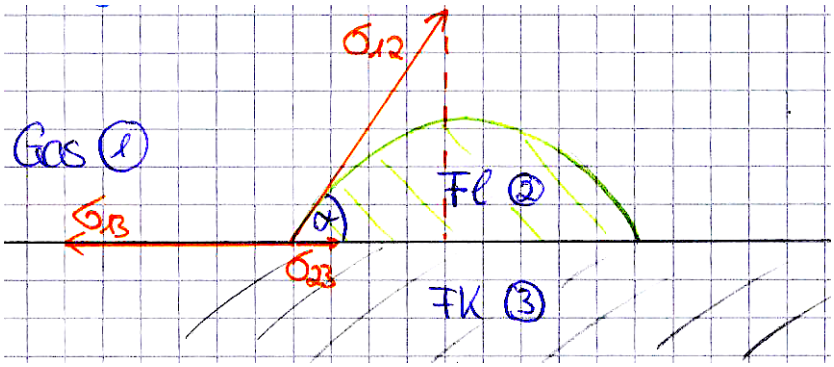
38.2 Benetzung und Kapillarität

Flüssigkeiten im Kontakt mit fester Oberfläche.

Benetzung, falls *Kohäsionskräfte* der Flüssigkeitsmoleküle untereinander *kleiner* sind als die Adhäsionskräfte der Moleküle an den Festkörper.

Keine Benetzung, falls Kohäsionskräfte $>$ Adhäsionskräfte

38.2.1 Benetzung



3 Grenzflächenspannungen im Gleichgewicht, damit Randlinie ruht

Definition 37. Kapillaritätsgesetz

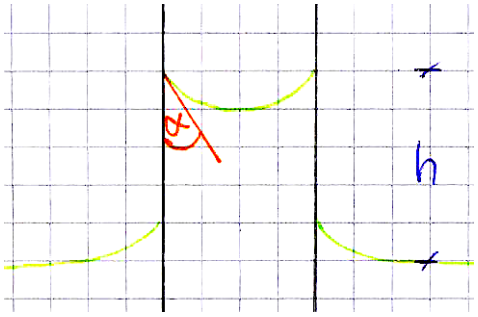
$$\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \alpha$$

$\sigma_{13} - \sigma_{23}$ „Haftspannung“ σ

Unvollständige Benetzung Randwinkel $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Vollständige Benetzung $\sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$, $\alpha \to 0$

38.2.2 Kapillarität



σ bewirkt F_σ, die eine Flüssigkeitssäule mit Gewicht F_G anheben kann.

$$\begin{aligned} F_\sigma &= \sigma l = 2\pi r \sigma = \sigma_{12} \cos \alpha \cdot 2\pi r \\ &= F_G = m_{fl} g = V \rho g = \pi r^2 h \rho g \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow h_{Steighöhe} = \frac{2\sigma_{12} \cos \alpha}{\sigma g r}$$

38.2.3 Aktuelle Forschung, Anwendungen

Bei Rauigkeiten der festen Oberfläche im sub-μm-Bereich erfolgt keine Benetzung, auch bei flüssig/fest Materialkombinationen, die üblicherweise benetzen. vgl. Lotus-Effekt

39 Strömende Flüssigkeiten und Gase

Hydrodynamik, inkompressible Flüssigkeiten und Gase bei $v \ll v_{Schall}$

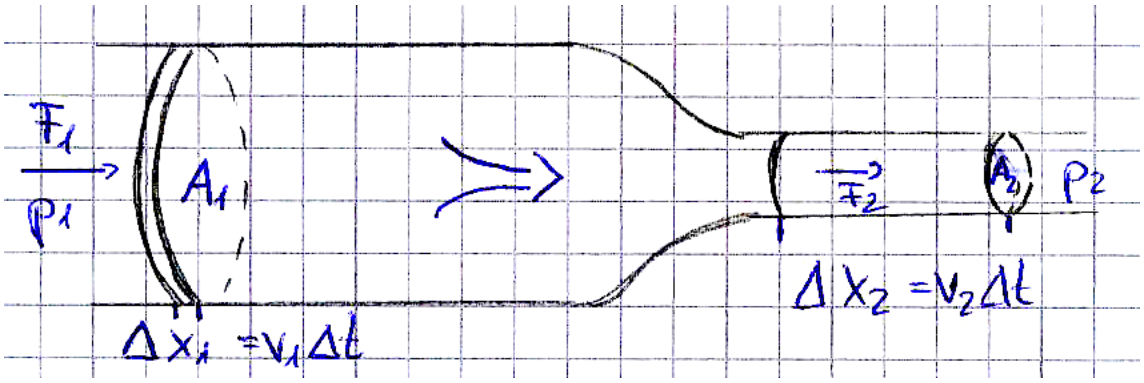
Aerostatik, kompressible Strömungen

39.1 Strömung idealer Flüssigkeiten

39.1.1 Stationäre Strömung

Einfachster Fall: Stationäre Strömung. Geschwindigkeitsfeld ist zwar ortsabhängig, aber nicht zeitabhängig. Inkompressibel und reibungsfrei.

Rohrverengung Zum Zeitintervall Δt fließt links die Masse $\rho_1 A_1 v_1 \Delta t$ ein und rechts die Masse $\rho_2 A_2 v_2 \Delta t$ aus. Mit $\rho_1 = \rho_2 = \rho$



Definition 38. Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

(A↓heißt v↗, E_{kin} ↗)

Beim Durchschieben von $\Delta V = A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$ wird links die Arbeit

$$\Delta W_1 = F_1 \Delta x_1 = p_1 A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$$

verrichtet. Damit wird zum Teil der Gegendruck p_2 überwunden.

$$\Delta W_2 = F_2 \Delta x_2 = p_2 A_2 \Delta x_2 = A_1 \Delta x_1$$

Differenz $\Delta W_1 - \Delta W_2$ bewirkt Zuwachs an kinetischer Energie.

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)\,\Delta V &= \frac{1}{2}\rho \Delta V \left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \text{(Energiesatz)} \\ p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \text{(Energiedichten)} \end{aligned}$$

oder

Definition 39. Bernoulli'sche Gleichung

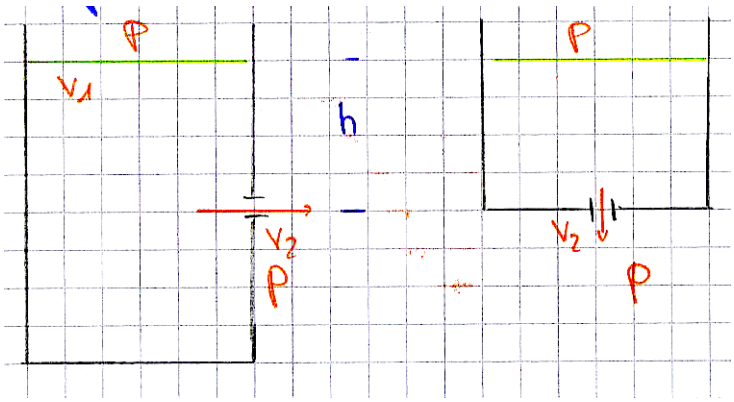
$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_0 = \text{const.}$$

Summe aus statischem Druck p und dynamischen Druck (Staudruck) $\frac{1}{2}\rho v^2$ hat überall den gleichen Wert p_0, d.h. dem Druck, der in der ruhenden Flüssigkeit herrschen würde.

Falls die Röhre nicht horizontal liegt, muss noch potentielle Energiedichte berücksichtigt werden

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = p_{ges} = \text{const.}$$

Beispiel: Ausströmen von Flüssigkeiten Füllhöhe h; Durchmesser oben so groß, dass $v_1 \approx 0$. Druck oben und unten gleich $p_1 = p_2 = p$



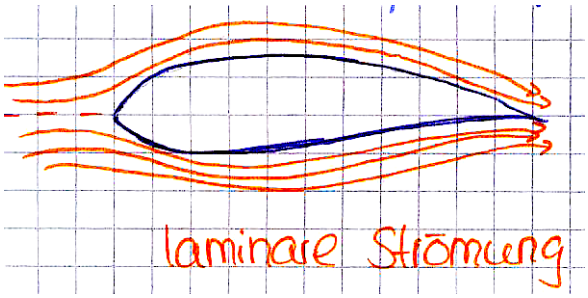
also mit Bernoulli: Energiedichte open = Energiedichte unten

$$p + \rho g h = p + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Ausströmgeschwindigkeit

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

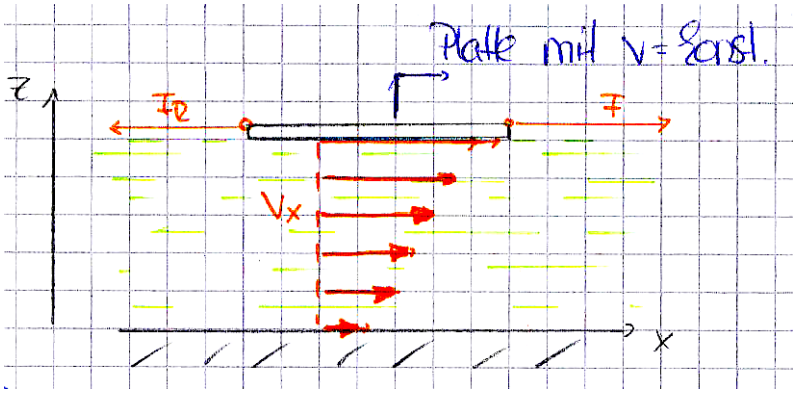
Beispiel: umströmter Tragflügel Profil so, dass $v_{oben} > v_{unten} \rightarrow p_{unten} > p_{oben}$ (Venturi-Effekt)



Beispiel: Magnuseffekt

39.2 Viskose Strömung

zur Definition:



Geschwindigkeitsprofil $v_x(z)$ bei laminarer Strömung

Reibungskraft $\propto$ Fläche und dem Gradienten der Geschwindigkeit

$$F_R = \eta A \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z}$$

η Viskosität, Zähigkeit $\left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Pas} = 10\,\mathrm{Poise}\right]$

39.2.1 Strömung in einem zylindrischen Rohr

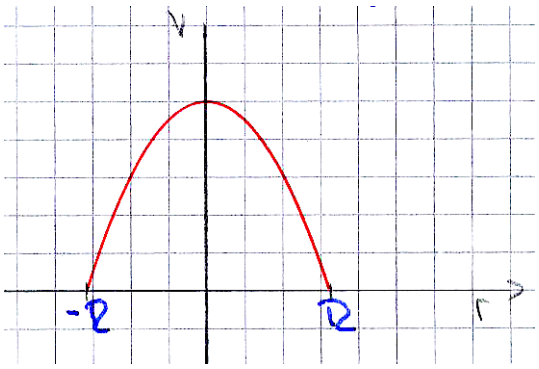
Betrachte Flüssigkeitszylinder mit Radius r. Treibende Kraft $(p_1 - p_2)\,\pi r^2$ ist im stationären Fall gleich der Reibungskraft.

$$\begin{aligned}(p_1 - p_2)\,\pi r^2 &= -\eta 2\pi r l \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} &= -\frac{(p_1 - p_2)}{2\eta l} r \\ v(r) - v(0) &= \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} r^2\end{aligned}$$

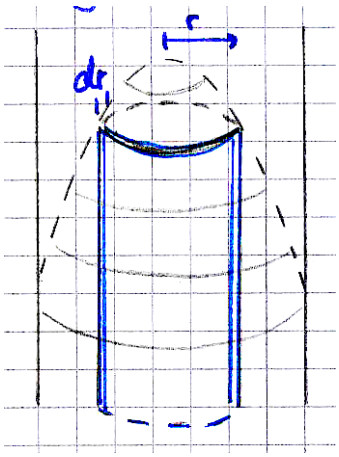
Randbedingungen $v(R) = 0$, daher $v(0) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l} R^2$ und

Definition 40. Hagen-Poiseuille

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)$$



Volumendurchfluss ΔV in der Zeit Δt ist Betrag des Zylindermantels.



$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= 2\pi r\,\mathrm{d}r\,v\,(r)\cdot\Delta t \\ \mathrm{d}V &= \frac{2\pi r\mathrm{d}r\left(R^2-r^2\right)(p_1-p_2)}{4\eta l}\cdot\Delta t \\ \Delta V &= \frac{\pi\,(p_1-p_2)\,\Delta t}{2\eta l}\int_0^R\left(R^2-r^2\right)r\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

Volumenstrom

$$\dot{V}=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\pi\,(p_1-p_2)}{8\eta l}R^4$$

$\dot{V}\propto R^4$ ist eine starke Abhängigkeit. Bei Arterienverängung um Faktor 2, folgt Durchflussverminderung um Faktor 16!

39.3 Differentielle Beschreibung von Strömungen

Dichte $\rho\,(\vec{r},t)$

Geschwindigkeit $\vec{v}\,(\vec{r},t)$

Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r},t)=\rho\vec{v}=\frac{\text{Masse}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$

39.3.1 Kontinuitätsgleichung

muss existieren wegen Teilchenzahl- bzw. Massenerhaltung, muss für jedes beliebige Volumen gelten.

$$\oint_{\text{Oberfläche }(V)}\vec{j}\mathrm{d}A=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\rho\,(\vec{r},t)\,\mathrm{d}V=-\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}V$$

mit Gauß'schem Satz und $\vec{j}=\rho\vec{v}$

$$\int_V\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})\right)\mathrm{d}V=0$$

$\int_V\ldots$ muss für beliebiges Volumen gelten, also

Definition 41. Kontinuitätsgleichung (Wenn es eine zeitliche Änderung der Dichte gibt, muss es auch eine Quelle geben.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\,(\rho\vec{v}) &= 0 \\ \text{oder} & \\ \dot{\rho}+\rho\mathrm{div}\vec{v}+\vec{v}\mathrm{grad}\rho &= 0 \end{aligned}$$

Für stationäre Strömungen gilt $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$

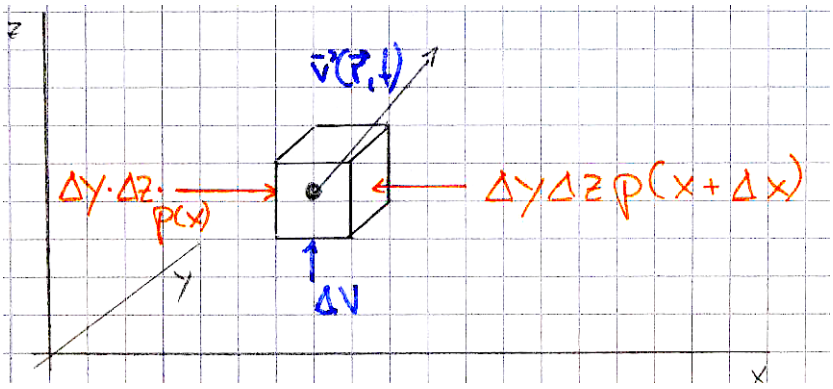
$$\mathrm{div}\,(\rho\vec{v})=0$$

Für inkompressible Strömungen gilt $\rho=\text{const.}$

$$\mathrm{div}\vec{v}=0$$

39.4 Eulergleichung

Bewegungsgleichung idealer (reibungsfreier) Flüssigkeiten, d.h. wegen $\eta = 0$ treten keine Schubspannungen auf.



Beschleunigung des Massenelements $\Delta m = \rho \Delta V$ durch interne Kräfte (Druck) und externe Kräfte (z.B. Schwerkraft)

-grad, da
Beschleuni-
gung in Richtung
abnehmenden
Drucks

$$\Delta m \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \Delta \vec{F}_{ext} + \Delta \vec{F}_{Druck}$$

$$\rho(\vec{r},t)\,\Delta V \frac{\mathrm{d}\vec{v}(\vec{r},t)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{r},t)\cdot \Delta V - \mathrm{grad} p \cdot \Delta V$$

Beschleunigung $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ hat zwei Anteile

1. $\vec{v}(\vec{r},t)$ hängt am Ort $\vec{r}$ explizit von t ab.
2. in $\mathrm{d}t$ bewegt sich Δm von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r} = \vec{r} + \vec{v}\mathrm{d}t$, dort ist wegen $\vec{v}(\vec{r},t)$ die Geschwindigkeit verschieden.

Formal ausgedrückt: Totales Differential $\mathrm{d}\vec{v}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{v} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}x}_{v_x \mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\underbrace{\mathrm{d}y}_{v_y \mathrm{d}t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\underbrace{\mathrm{d}z}_{v_z \mathrm{d}t} \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\mathrm{d}t + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Definition 42. Eulergleichung der Hydrodynamik

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right) = -\nabla p + \vec{f}$$

Die 3 Eulergleichungen (für v_x, v_y, v_z) mit Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = 0$ und Zustandsgleichung $p = p(\rho(\vec{r},t))$ (z.B. ideales Gas $p = \frac{n}{V}RT$ s. 3. Semester) sind 5 partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung der 5 Felder $\vec{v}$, ρ, p.

Noch allgemeiner viskose Flüssigkeiten, Reibung führt zu Scherkräften. Dazu muss die rechte Seite der Eulergleichung ergänzt werden durch einen „Reibungsterm“ z.B. $\eta\Delta\vec{v}$ mit $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} =$ Laplace-Operator. Dies ist dann die *Navier-Stokes-Gleichung.*

39.4.1 Bernoulli-Gleichung als Spezialfall der Eulergleichung

reibungsfrei $\eta = 0$

kräftefrei $\vec{f} = 0$
Stationär $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
inkompressibel $\rho(\vec{r}, t) = \rho_0$

Also $\rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\text{grad } p = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$. Die laminare Strömung ist wirbelfrei, dahrt ist rot $\vec{v} = 0$ und die Gleichung dann

$$\begin{aligned} \nabla \left(\rho_0 \frac{v^2}{2} + p \right) &= 0 \\ \Rightarrow \rho_0 \frac{v^2}{2} + p &= \text{const.} \end{aligned}$$

39.4.2 Potentialströmung

Für laminare (oder wirbelfreie) und stationäre Strömungen gilt rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = 0$. Es muss daher ein Feld existieren, so dass

$$\vec{v}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r})$$

Dabei ist

$\vec{v}(\vec{r})$ Potentialströmung

$\phi(\vec{r})$ Geschwindigkeitspotential

Für inkompressible Flüssigkeiten ist div $\vec{v} = 0$ (vgl. Kontinuitätsgleichung).

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{grad } \phi) &= 0 \\ \Delta\phi &= 0 \text{ (Laplace-Gleichung)} \end{aligned}$$

beschreibt auch Probleme der Elektrostatik.

39.4.3 Grenzen der Diskussion

laminare →turbulente Strömung (rot $\vec{v} \neq 0$).

Teil VI
Schwingungen und Wellen

40 Oszillatoren

40.1 Freier Oszillator mit Dämpfung

am Beispiel „Pohlsche Rad“ mit Wirbelstrombremse, d.h. geschwindigkeitsproportionaler Reibung. Die Bewegungsleichung lautet dann

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= M - M_R \\ \Theta \ddot{\varphi} &= -D^* \varphi - b \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} &= -\underbrace{\frac{D^*}{\Theta}}_{=\omega_0^2} - \underbrace{\frac{b}{\Theta}}_{=2\gamma} \dot{\varphi} \\ \ddot{\omega} - 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Lösungsansatz $\varphi = c \cdot \mathrm{e}^{\lambda t}$ wobei c, λ komplexe Größen sein können. Insbesondere ist $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= c\lambda \mathrm{e}^{\lambda t} \\ \ddot{\varphi} &= c\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned}$$

Mit einsetzen folgt

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \end{aligned}$$

40.1.1 Schwache Dämpfung ($\gamma < \omega$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{=-\omega^2<0}} \\ &= -\gamma \pm i\omega \\ \varphi(t) &= \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot |c| \, \mathrm{e}^{i\varphi_0} \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \mathrm{Re}\varphi(t) &= |c| \, \mathrm{e}^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Die Amplitude der Schwingung nimmt also exponentiell ab.

Abklingen der Energie

$$\begin{aligned} E &= E_{kin} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2} D^* \cdot (\text{mom. Aplitude})^2 \\ &= \frac{1}{2} D^* c^2 \mathrm{e}^{-2\gamma t} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ \tau &= \frac{1}{2}\gamma = \frac{\Theta}{b} \end{aligned}$$

Gütefaktor

Definition 43. Gütefaktor $Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$ mit $\Delta E =$ in Periode T verlorene Energie

$$Q = 2\pi \frac{\tau}{T} = \omega\tau$$

40.1.2 Starke Dämpfung ($\gamma > \omega$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\underbrace{\gamma^2 - \omega_0^2}_{=\omega^2>0}} \\ &= -\gamma \pm \omega \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[c_1 \mathrm{e}^{\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\omega t}\right]$$

Der oszillierende Anteil verschwindet, da Wurzel positiv, man hat nur reelle Lösungen. Dieser Oszillator schwingt nicht, es handelt sich um den Kriechfall.

40.1.3 „aperiodischer Grenzfall" ($\gamma = \omega$)

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma$$

Schnellste Einstellung des Endzustandes nach einer Störung.

40.2 Erzwungene Schwingung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} &= \sum_i M_i \\ \Theta\ddot{\varphi} &= -D^*\varphi - b\dot{\varphi} + M_0 \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \ddot{\varphi} &= -\underbrace{\frac{D^*}{\Theta}}_{=\omega_0^2} - \underbrace{\frac{b}{\Theta}}_{=2\gamma}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{M_0}{\Theta}}_{=K}\mathrm{e}^{i\omega t} \\ & \ddot{\omega} - 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = K \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned}$$

Lösungsansatz $\varphi = c \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}$, der stationäre Zustand, wenn die Einschwingvorgänge abgeklungen sind.

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= i\omega c \mathrm{e}^{i\omega t} \\ \ddot{\varphi} &= -\omega^2 c \mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned}$$

Mit Einsetzen folgt

$$\begin{aligned} \left(-\omega^2 + 2\gamma i\omega + \omega_0^2\right) c\mathrm{e}^{i\omega t} &= K\mathrm{e}^{i\omega t} \\ c &= \frac{K}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i\omega} \\ &= \frac{K\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2} - i\frac{2\gamma\omega K}{\left(\omega_0^2\right)^2 - (2\gamma\omega)^2} \end{aligned}$$

40.2.1 Resonanz

Amplitude

$$\begin{aligned} c &= a + ib \\ |c| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \frac{K}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\gamma\omega\right)^2}} \end{aligned}$$

Für $\omega \to 0$: $|c| = \frac{K}{\omega_0^2} = \frac{M_0}{D^*}$ mit M_0= Amplitude von anregenden Drehmoment. Amplitude maximal (in Abh. der Erregerfrequenz):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,|c|}{\mathrm{d}\omega} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \to \omega_0^2 &= 2\gamma^2 \\ \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \end{aligned}$$

40.2.2 Phasen

Phasenlage gegenüber der Anregung

$$\begin{aligned} \tan\vartheta &= \frac{\mathrm{Im}\,c}{\mathrm{Re}\,c} \\ \to 0 &\qquad \text{für } \omega \to 0 \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung $\varphi = c\mathrm{e}^{i\omega_E t}$ ist partikulare Lösung

$$\begin{aligned} \varphi_{allg} &= \varphi_{hom} + \varphi_{part} \\ \varphi_{hom} &= |c| \cdot \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{i\varphi_0}\mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned}$$

40.3 Periodische aber nicht-harmonische Schwingung

40.3.1 Fourieranalyse

Grundkreisfrequenz $\omega = 2\pi\frac{1}{T}$

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\right)$$

$k = 1$ Grundschwingung (1. Harmonische)

$k = 2$ erste Oberschwingung (2. Harmonische)

$k = 3$ zweite Oberschwingung (3. Harmonische)

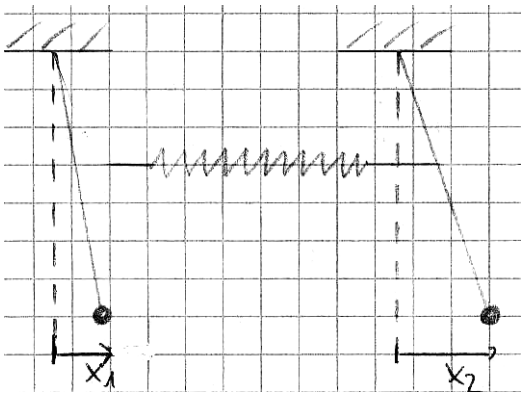
a_k, b_k = Fourierkoeffizienten

z.B. Rechteckfunktion

$$y(t) \propto \sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin\omega t$$

40.4 Gekoppelter Oszillator, Eigenschwingungen

40.4.1 Zwei gekoppelte Pendel



$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_1 + \frac{D}{m}(x_1 - x_2) &= 0\\ \frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x_2 + \frac{D}{m}(x_2 - x_1) &= 0\end{aligned}$$

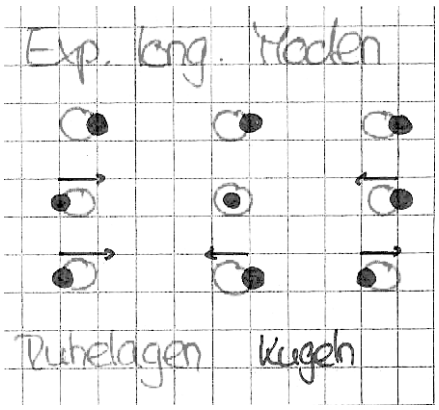
Suche Eigenmoden (stationäre Schwingungsformen) und Eigenfrequenzen. Hier:

Gleichphasig $x_1(t) = x_2(t) \rightarrow \omega_a = \omega_0$

Gegenphasige $x_1(t) = -x_2(t) \rightarrow \omega_b^2 = \omega_0^2 + 2\frac{D}{m}$

Allgemein Überlagerung der beiden Eigenmoden resultiert in Schwebung.

40.4.2 3 gekoppelte Oszillatoren (3-dimensional)



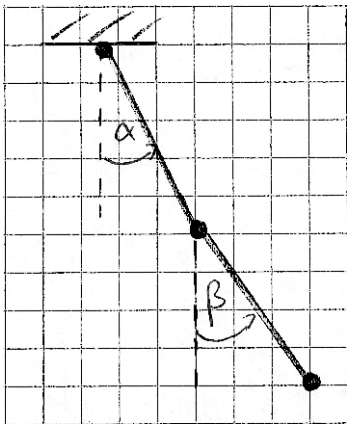
3 longitudinale Moden. 2x3 transversale Moden.

40.4.3 N gekoppelte Oszillatoren

$3N$ Eigenschwingungen. Vgl. Molekülschwingungen in Physik 4.

41 Nichtlineare Systeme und Chaos

41.1 Knickpendel



zwei Stäbe, jede Länge l. Gekoppelte Bewegungsgleichung ohne Herleitung für kleine Auslenkungen $\alpha \ll \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} + \frac{9}{8}\omega_0^2\alpha + \frac{3}{8}\ddot{\beta} &= 0 \\ \ddot{\beta} + \frac{9}{8}\omega_0^2\beta + \frac{3}{8}\ddot{\alpha} &= 0 \end{aligned}$$

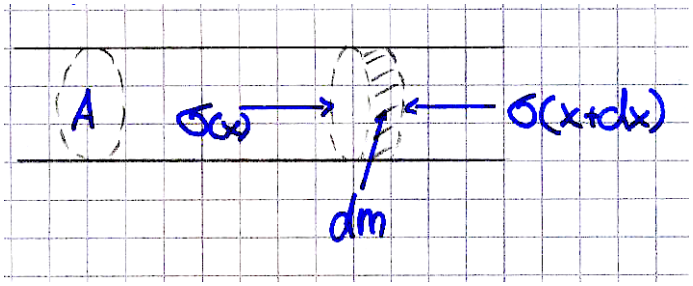
Große Auslenkungen ergeben „hochgradig nichtlineare gekoppelte Differentialgleichung“. Grundsätzlich berechenbar, aber winzige Unterschiede in den Anfangsbedingung bewirken nach kurzer Zeit große Unterscheide im Bewegungsablauf. „Deterministisches Chaos“. Übergang stationäre Lösungen $\leftrightarrow$chaotische Lösungen, wird durch Lyaponov-Exponenten charakterisierbar.

(Nach HJ Leisi, klassische Physik I)

42 Wellen

„Sich ausbreitender physikalischer Zustand“ z.B. Deformation

42.1 Dehnung in einem Stab



Beschleunigung von dm erfolgt durch *Gradient* der Spannung.

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\sigma(x+\mathrm{d}x)-\sigma(x))\cdot A$$

Dabei ist x der Ort und u die Auslenkung

$$\rho\underbrace{A\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}V}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\underbrace{\mathrm{d}xA}_{\mathrm{d}V}$$

mit $\sigma = E\cdot\varepsilon$ (Hookesche Gesetz) und $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$ (Deformation) folgt

Definition 44. Wellengleichung für eine Dehnungsgleichung in einem Stab

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

42.2 Allgemeine Wellengleichung

Definition 45. Wellengleichung allgemein. (eindimensionale ebene Welle)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Todo: Add c examples.. boring

Lösungen der Wellengleichung sind die Wellenfunktionen. Alle Funktionen $\psi = \psi(x\pm ct)$. $\pm$ je nach Ausbreitungsrichtung.

42.3 Harmonische Wellen

Spezialfall der Wellenfunktion.

$$\psi = \psi_0\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(c\pm ct)\right]$$

Mit ϕ_0=Amplitude.

Zu einem gegebenen Zeitpunkt Phase ändert sich nach Strecke $\Delta x = \lambda$ um $2\pi\rightarrow\lambda$ = Wellenlänge.

Definition 46. Wellenzahl, räumliche Periodizität

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

An einem bestimmten Ort Phase ändert sich nach der Zeit $\Delta t = T$ um $2\pi\rightarrow T$ = Periodendauer, $\nu = \frac{1}{T}$ = Frequenz

Definition 47. Kreisfrequenz, zeitliche Periodizität

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda}c = c\cdot k$$

$$c = \lambda\cdot\nu = \frac{\omega}{k}$$

Definition 48. Ebene harmonische Welle

$$\psi = \psi_0\sin(kx+\omega t)$$

42.4 Dopplereffekt

Quelle ruht im Medium Empfänger hat v_E. Empfänger hört $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V_E}{C}\right)$

Empfänger ruht im Medium Quelle hat v_Q. Empfänger hört $\nu' = \nu\left(1 \pm \frac{V_E}{C}\right)^{-1}$

42.5 Stehende Wellen

z.B. Orgelpfeifen

42.6 Beugung und Interferenz

Wellenwanne

42.7 Wellenpakete

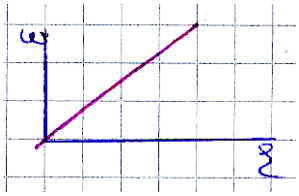
Wellenpakete haben endliche Dauer, →endliche Bandbreite des Spektrums.

42.8 Gruppengeschwindigkeit

$$v_{Gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

und im Allgemeinen ist $v_{Gr} \neq c = \frac{\omega}{k}$

Falls $\omega = ck$, Dispersionsbeziehung mit $c = c_0$ für alle Frequenzen gilt, ist das Wellenpaket formstabil.

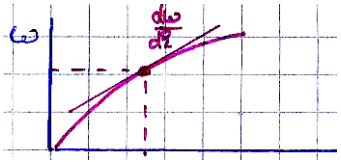


$$v_{Gr} = v_{Phase}$$

Falls v_{phase} von ω oder k abhängt, „zerfließt“ das Wellenpaket. z.B. Wasserwellen.

42.8.1 Schwerewelle

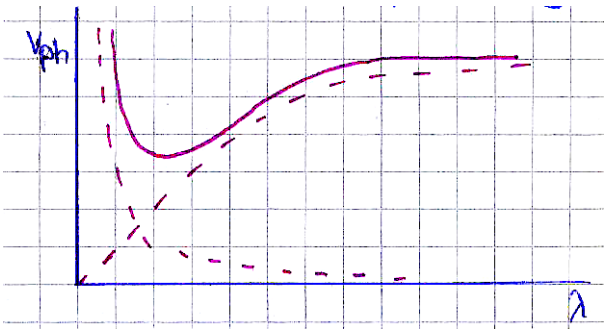
Dispersionsbeziehung $\omega = \sqrt{gk}$, $v_{phase} = \frac{\omega}{\rho} = \sqrt{\frac{g}{k}} \propto \sqrt{\lambda}$. Große Wellenlängen breiten sich bei Schwerewellen schneller aus als kleine Wellenlängen.



$$v_{gr} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$$

42.8.2 Kapillarwellen (Kreuselwellen)

$v_{ph} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho} \cdot k} \propto \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ mit σ = Oberflächenspannung. Insgesamt $v_{ph} = \sqrt{\frac{\rho\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}$



Teil VII
Grenzen der klassischen, Newton'schen Mechanik

43 Partikel mit sehr geringer Masse

(atomarer Bereich) ⇒Wellenmechanik, Quantenmechanik.

> 1913 Lois der Broglie
>
> „Jahrhunderte lang wurde in der Optik korpuskulare Betrachtungsweise im Vergleich zum Wellenaspekt vernachlässigt; sollte nicht in der Theorie der Mikropartikel der umgekehrte Fehler begangen worden sein?"

Für Photonen (Lichtquanten) gilt $E = h\nu$ und $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$ mit h = Planksche Wirkungsquantum.

De Broglies Postulat (1913):

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

soll auch für Materieteilchen gelten!

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

Bestätigung 1927 durch Davisson und Germer. Beugung von Elektronen an Kristalloberflächen.

43.1 Heisenbergsche Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p > h$$

Ort und Impuls (Geschwindigkeit) können nicht gleichzeitig genau bestimmt werden.

44 Körper mit Geschwindigkeit nahe der Lichtgeschwindigkeit

falls alle Geschwindigkeiten klein sind, gilt beim Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes die Galileitransformation.

$$\begin{aligned} x'_K &= x_K - vt \\ y'_K &= y_K \\ z'_K &= z_K \\ t' &= t \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Zeit absolut.

Einstein 1905:

Postulat 1 Reltativitätsprinzip Alle physikalischen Gesetze sind gleich in Bezugsystemen, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinender bewegen.

Postulat 2 Die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle. (Michelson-Moreley-Experiment)

44.1 Die Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

1. Maxwell-Gleichungen sind invariant
2. Raum und Zeit sind untereinander verknüpft
3. Maximale Geschwindigkeit der Signalübertragung ist c

Zeitdilatation $\Delta t = \gamma \Delta t'$

Δ Eigenzeit

Längenkontraktion $l = \frac{l'}{\gamma}$

l' Eigenlänge

Geschwindigkeitsaddition $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c'}}$

Dopplereffekt

longitudinal $\nu = \nu\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

relativer Abstand wird größer.

Symmetrisch bezüglich Quelle und Empfänger im Gegensatz zum Dopplereffekt bei Schallwellen.

transversal $\nu' = \nu\sqrt{1-\beta^2}$ Zeitdilatation

45 Masse und Energie

45.1 Ruhemasse

$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0 =$ Ruhemasse

relativistischer Impuls $p = m\nu = \gamma m_0 v$ und $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$

45.2 Was heißt $E = mc^2$

multipliziere m mit c^2

$$\begin{aligned} mc^2 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \text{subtrahiere} \quad & m_0 c^2 \\ mc^2 - m_0 c^2 &= m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \end{aligned}$$

für $v \ll c$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} &= 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots \\ \rightarrow mc^2 - m_0 c^2 &= \frac{m_0 v^2}{2} = E_{kin} \text{ (Newton)} \end{aligned}$$

Einstein: auch im relativistischen Fall ist $E_{kin} = mc^2 - m_0 c^2$ und $E = mc^2$ ist die Gesamtenergie. $E_0 = m_0 c^2$ ist die Ruheenergie (innere Energie). Aus $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ und $p = mv$ folgt damit

$$\begin{aligned} m^2 c^4 &= p^2 c^2 + m_0^2 c^4 \\ E^2 &= p^2 c^2 + E_0^2 \end{aligned}$$

Dies ist der „relativistische Energiesatz“

Beispiel Gesamtenergie sei doppelt so groß wie Ruheenergie oder kinetische Energie sei gleich der Ruheenergie.

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= \frac{m}{m_0} = 2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \rightarrow v &= \frac{c}{2}\sqrt{3} \approx 0,87c \end{aligned}$$