Experimentelle Physik I – Formelsammlung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Was ist Physik?

1.2 Physikalische Größen und Maßeinheiten

1.3 Messfehler

Arithmetischer Mittelwert: $<t>:=\frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}$

Standardabweichung der Einzelmessung: $\sigma_t:=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(t_i-<t>)^2}{N}}$

Standardabweichung des Mittelwerts: $\sigma_{<t>}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(t_i-<t>)^2}}{N} = \frac{\sigma_t}{\sqrt{N}}$

Andere Form von σ_t: $\sigma_t=\sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{N} t_i^2-2<t>\sum_{i=1}^{N} t_i+\sum_{i=1}^{N} <t>^2)}{N}}$
$= \sqrt{<t^2>-<t>^2}$

Fehlerfortpflanzung: Größe G(x,y,...) $\sigma_G=\sqrt{(\frac{\partial G}{\partial x})^2\sigma_x^2+(\frac{\partial G}{\partial y})^2\sigma_y^2+\ldots}$

2 Mechanik

2.1 Mechanik von Massepunkten

2.1.1 Kinematik, Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Geschwindigkeit: $v:=\frac{dx}{dt}$ mit Umkehrung $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t')dt'$
mit $x(t=t_0)=x_0$

Impuls: $p:=m\cdot v$

Beschleunigung: $a:=\frac{dv}{dt}$ mit Umkehrung $v(t)=v_0+\int_{t_0}^{t} a(t')dt'$

mit $v(t=t_0)=v_0$

2.1.2 Die Newtonschen Gesetze, der Begriff der Kraft

In Intertialsystemen gilt (Newtonsche Axiome):

1. Trägheitsgesetz:
   Jeder Körper, auf den keine Kräfte wirken, verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung (d.h. $\vec{v}=\text{const}$).

2. Aktionsgesetz:
   $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$
3. actio = reactio
   $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$

Das Gravitationsgesetz: $\vec{F}_{21}=-\gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$ mit $\vec{r}$ Verbindungsvektor zwischen Massenpunkt 1 und 2 und $\gamma\approx 6{,}670\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\cdot s^2}$

Spezialfall Gravitation in Erdnähe mit $\vec{F}=-m\cdot g\cdot\vec{e}_z$, $g=-\gamma\frac{m_{Erde}}{R_{Erde}^2}\approx 9{,}82\frac{m}{s^2}$, $m_{Erde}\approx 5{,}97\cdot 10^{24}\,kg$ und $R_{Erde}\approx 6{,}371\cdot 10^{6m}$

Taylorreihenentwicklung: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)$

Hookesches Gesetz: $F=-Dx$

2.1.3 Erhaltungssätze der Mechanik

Arbeit: Arbeit = Kraft x Weg (Kraftkomponente tangential zum Weg)

$$\Delta W=:\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

$$W_{12}=\sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\cdot\Delta\vec{r}_i \rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot dt \text{ (Wegintegral)}$$

$$\operatorname{grad}(f) :=\vec{\nabla} f :=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)^T \text{ Gradient einer Funktion } f(\vec{r})$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} :=\vec{\nabla}\times\vec{f} :=\left(\frac{\partial}{\partial y}f_z-\frac{\partial}{\partial z}f_y ,\ \frac{\partial}{\partial z}f_x-\frac{\partial}{\partial x}f_z ,\ \frac{\partial}{\partial x}f_y-\frac{\partial}{\partial y}f_x\right) \text{ Rotation}$$

eines Vektors $\vec{F}(\vec{r})$

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist Konservativ $\Leftrightarrow$ Das Arbeitsintegral ist wegunabhängig $\Leftrightarrow$ $\text{rot}\,\vec{F}=0$ $\Leftrightarrow$ $\exists V: \ \vec{F}=-\text{grad}\,V$. V = pot. Energie

Energieerhaltung: Annahme: $\vec{F}$ ist konservativ

$$W_{12}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -\vec{F}\cdot d\vec{r} \ = \ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad}\,V\cdot d\vec{r} \ = \ V(\vec{r}_2)-V(\vec{r}_1)$$

alternativ: $W_{12}=-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{p}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot dt \ = \ \frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}-\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2}$

$$\Rightarrow \ V(\vec{r}_1)+\frac{1}{2}m\vec{v}_1^{\,2}=V(\vec{r}_2)+\frac{1}{2}m\vec{v}_2^{\,2} \ \Leftrightarrow \ E_{kin}+E_{pot}=\text{const.}$$

Leistung: $P:=\frac{dW}{dt}$

Impulserhaltung: In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls eine Erhaltungsgröße.

2.1.4 Stoßprozesse

2.1.4.1 Elastische Stöße

Es gelten Energie- und Impulserhaltung.

$$\Rightarrow v_1'=\frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2} \quad \text{analog} \quad v_2'=\frac{(m_2-m_1)v_2+2m_1v_1}{m_1+m_2}$$

Spezialfälle:

1. $m_1=m_2$, $v_1\neq 0$, $v_2=0$ $\Rightarrow$ $v_1'=0$, $v_2'=v_1$
2. $m_2\to\infty$, $v_2=0$, $v_1\neq 0$ $\Rightarrow$ $v_1'=-v_1$, $v_2'=0$
3. $v_2=0$, $m_2=2m_1$ $\Rightarrow$ $v_1'=-\frac{1}{3}v_1$, $v_2'=\frac{2}{3}v_1$
4. $v_2=-v_1$, $m_1=m_2$ $\Rightarrow$ $v_1'=v_2$, $v_2'=v_1$

2.1.4.2 Inelastische Stöße

Modifizierte Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2+\Delta W$

Spezialfall: total inelastischer Stoß: $v_1'=v_2'=v'$

Impulserhaltung: $v'=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ $\Rightarrow$ $\Delta W=\frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}\cdot(v_1-v_2)^2$

2.1.4.3 Schiefer zentraler Stoß

Mit $m_2 \gg m_1$: Einfallswinkel = Ausfallswinkel

2.1.5 Reibung

$F_R = \mu F_N$, auf schiefer Ebene: $F_N = \cos(\alpha) \cdot F_G$, $F_T = \sin(\alpha) \cdot F_G$
Beim ruhenden Körper gilt $F_R = -F_T$ bis $F_T > \mu_H F_R \Rightarrow \tan(\alpha) > \mu_H$
Gleitreibungskoeffizient stets kleiner als Haftreibungskoeffizient: $\mu_G < \mu_H$

Stokessche Reibung: $\vec{F}_R = -\gamma_S \vec{v}$

Freier Fall mit Reibung: Bewegungsgleichung: $\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma_s}{m} \cdot v = -g$

Lösung: $v(t) = -\frac{m \cdot g}{\gamma_s} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ mit $\tau = \frac{m}{\gamma_s}$

2.1.6 Harmonische Schwingungen

Allgemeine Bewegungsgleichung: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma_s \frac{dx}{dt} + Dx = F_{Ext}$

Freie Schwingungen: $F_{Ext} = 0$

ohne Reibung: $\gamma_s = 0 \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + Dx = 0$

$\Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{D}{m}}$ Kreisfrequenz [ω aus Ansatz $x(t) = A \cdot \cos(\omega t)$]

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Periodendauer

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Frequenz

mit Reibung: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma_s \frac{dx}{dt} + Dx = 0$

mit Ansatz $x(t) = A \cdot e^{at} \Rightarrow a = -\frac{\gamma_s}{2m} \pm \sqrt{\frac{\gamma_s^2}{4m^2} - \frac{D}{m}}$
Was passiert, wenn der Radikant negativ wird?
Mit $\sqrt{-1} =: i$ imaginäre Einheit:

$$\Rightarrow a = -\frac{\gamma_s}{2m} \pm i \sqrt{\frac{D}{m} - \frac{\gamma_s^2}{4m^2}} = -\frac{\gamma_s}{2m} \pm i\omega = \Re(a) \pm i \Im(a) = x + iy$$

Einschub: Aus Darstellung in komplexer Zahlenebene:

$x=|a|\cdot\cos(\varphi)$, $y=|a|\cdot\sin(\varphi)$

Umkehrung: $|a|^2=x^2+y^2$, $\tan(\varphi)=\frac{y}{x}$

<u>Eulersche Formel:</u> $e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$

<u>Eigenfrequenz:</u> $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}-\frac{\gamma_s^2}{4m^2}} < \sqrt{\frac{D}{m}}$ für $\gamma_s>0$

- <u>Schwingfall:</u>
- <u>aperiodischer Grenzfall:</u> $\frac{D}{m}-\frac{\gamma_s^2}{4m^2}=0$
- <u>Kriechfall:</u> $\frac{D}{m}-\frac{\gamma_s^2}{4m^2}<0$

<u>Stangenpendel:</u>

$$\sin(\alpha)=\frac{F_T}{F_G},\ m\frac{d^2s}{dt^2}=F_T+F_R=-m\cdot g\cdot\sin(\alpha)-\gamma_s\frac{ds}{dt}\text{, mit }\alpha=\frac{s}{l}\Rightarrow s=\alpha\cdot l$$

<u>Physikalisches Stangenpendel:</u> $\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{\gamma_s}{m}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{g}{l}\cdot\sin(\alpha)=0$

<u>Mathematisches Stangenpendel:</u> $\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{\gamma_s}{m}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{g}{l}\cdot\alpha=0$ für $\sin(\alpha)\approx\alpha$

<u>Federpendel:</u> $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\gamma_s}{m}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{D}{m}x=0$

<u>Periodische Anregung ohne Dämpfung:</u> $m\frac{d^2x}{dt^2}+Dx=F_0\cdot\cos(\Omega t)$

spezieller Ansatz: $x(t)=A\cdot\cos(\Omega t) \Rightarrow A=\frac{\frac{F_0}{m}}{\omega^2-\Omega^2}$ mit $\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$

<u>Resonanzkatastrophe:</u> Wie kommt es zu $A\to\infty$?

Selbe Bewegungsgleichung, dabei sei $\Omega=\omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$

Ansatz: $x(t)=t\cdot A\cdot\sin(\omega t) \Rightarrow A=\frac{F_0}{2mw}$

$x(t)=\frac{F_0}{2mw}\cdot t\cdot\sin(\omega t)$

2.1.6.1 Deterministisches Chaos

Bewegungsgleichung harmonisch getriebenes physikalisches Pendel:
$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{\gamma_s}{m}\cdot\frac{d\alpha}{dt}+\frac{g}{l}\cdot\sin(\alpha)=\frac{1}{ml}\cdot F_0\cdot\cos(\Omega t)$
→ Probleme werden zu schwer, um sie analytisch zu lösen
→ Computerexperiment (Ursprüngliche Fragestellung: $\alpha(t)=?$,
Reduzierte Fragestellung: $\alpha(t=n\cdot T)=x_n=?$ mit $n\in\mathbb{N}$
Annahme: x_n lässt sich schreiben als: $x_n=f(x_{n-1})$ (diskrete, rekursive Abbildung, nicht immer möglich)
Stellt man den Anfangswert x_0 binär dar, erkennt man (Treppenform im Vorlesungsmitschrieb):
→ x_N wird durch N-te Stelle von x_0 bestimmt
→ Irgendwann werden winzige Abweichungen sehr groß
→ Exponentielles Anwachsen einer Anfangsabweichung
→ Differenz ϵ zwischen x_0 und $x_0+\epsilon$ wird zu $\epsilon\cdot e^{N\cdot\lambda}$ zwischen $f^N(x_0)$ und $f^N(x_o+\epsilon)$ mit Liapunov-Exponent λ
→ $\epsilon\cdot e^{N\cdot\lambda}=\left|f^N(x_o+\epsilon)-f^N(x_0)\right|$
→ $\lambda=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ln\left(\left|f'(x_N)\right|\right)$

- $\lambda<0$: stabiles Verhalten
- $\lambda=0$: indifferentes Verhalten
- $\lambda>0$: deterministisch chaotisches Verhalten

2.1.7 Drehbewegungen, Drehmoment, Drehimpuls und Trägheitsmoment

Winkel: $\varphi=\omega\cdot t$ [Analogie: $x=v\cdot t$]
Richtung von $\vec{\omega}$ aus „Rechte-Hand-Regel"

Kreisbahn: $\vec{r}(t)=r\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t)=r\cdot\omega\cdot\begin{pmatrix}-\sin(\omega t)\\ \cos(\omega t)\end{pmatrix}$, $v=r\cdot\omega$ und $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$

Drehimpuls: $\vec{L}:=\vec{r}\times\vec{p}$, $\vec{L}=\theta\vec{\omega}$ [Analogie: $\vec{p}=m\cdot\vec{v}$]
In abgeschlossenen System Gesamtdrehimpuls erhalten.

Drehmoment: $\vec{M}:=\vec{r}\times\vec{F}$ und $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$ [Analogie: $\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$]

Bewegungsenergie: $E_{rot}=\frac{\theta}{2}\omega^2$ [Analogie: $E_{kin}=\frac{m}{2}v^2$]

Trägheitsmoment: $\theta=m\cdot r^2$

2.1.8 Die Planetenbahnen und die Keplerschen Gesetze

$\vec{r}_1=\vec{R}+\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$, $\vec{r}_2=\vec{R}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$ mit Schwerpunkt $\vec{R}:=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ und Relativvektor $\vec{r}:=\vec{r}_1-\vec{r}_2$

Schwerpunkt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit: $\frac{d^2\vec{R}}{dt^2}=0$

$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}=-\gamma\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$ mit $m=\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ reduzierte Masse mit $\frac{1}{m}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$

Keplersche Gesetze:

1. Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren gemeinsamen Brennpunkt die Sonne liegt.
2. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen. $dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$, $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}\frac{\vec{L}}{m}$
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen. $T^2\propto a^3$ bzw. $T^2\propto r^3$ im Kreis.

2.1.9 Rotierende Bezugssysteme

Scheinkräfte: [gestrichene Größen aus rotierendem System gesehen, ungestrichene aus Inertialsystem]

$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}$ oder symbolisch $\frac{d}{dt}=d\frac{'}{dt}+\vec{\omega}\times$

Beschleunigung: $\vec{a}'=\vec{a}-2\vec{\omega}\times\vec{v}'-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

mit Coriolis-Beschleunigung $\vec{a}_C=-2\vec{\omega}\times\vec{v}'$

und Zentrifugal-Beschleunigung $\vec{a}_Z=-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, $a_Z=\omega^2\cdot r$

Zentrifugalkraft: $F_Z=m\omega^2\cdot r=m\frac{v^2}{r}$

2.2 Mechanik starrer (ausgedehnter) Körper

Schwerpunkt: $\vec{R}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{M}$ mit Gesamtmasse $M=\sum_{i=1}^{N} m_i$

oder in Integraldarstellung: $\vec{R}=\frac{\int\rho(\vec{r})\cdot\vec{r}\,d^3x}{M}$ mit Massendichte ρ

Kinetische Energie: $E_{kin}=\frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\vec{R}}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}\theta\omega^2$ mit

<u>Trägheitsmoment</u> $\theta := \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int_K r^2 dm = \int_K r^2 \rho \, dV$

dabei r_i Abstand Massenpunkt Drehachse und dV Volumenelement

<u>wichtige Trägheitsmomente:</u>

- Würfel: $\theta_{\text{Würfel}} = \frac{1}{6} m L^2$
- Vollzylinder: $\theta_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{2} m R^2$

<u>Satz von Steiner:</u> Für Drehachsen nicht durch den Schwerpunkt mit a Abstand der Drehachse von der Schwerpunktsdrehachse:
$\theta_a = \theta_s + Ma^2$ mit θ_s Trägheitsmoment für Drehachse durch cM

<u>Trägheitstensor:</u> Bei Drehbewegungen von Massenpunkten galt $\vec{L} = mr^2 = \theta \cdot \vec{\omega}$, es galt also $\vec{L} \| \vec{\omega}$. Allgemein gilt das nicht! Deshalb Trägheitstensor.

$$\Rightarrow \vec{L} = \underline{\underline{\theta}} \cdot \vec{\omega} \text{ mit } \underline{\underline{\theta}} := \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}}_{\text{Trägheitstensor}}$$

Trägheitsmomente: (=Diagonalelemente)
$\theta_{xx} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2)$, $\theta_{yy} = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2)$ und $\theta_{zz} = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

Deviationsmomente: (=Nicht-Diagonalelemente)
$\theta_{xy} = \theta_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i$, $\theta_{yz} = \theta_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i$ und $\theta_{zx} = \theta_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$

$\underline{\underline{\theta}}$ ist eine symmetrische Matrix

<u>Eigenvektoren von $\underline{\underline{\theta}}$:</u> (bzw. Hauptträgheitsachsen): $\vec{\omega}$ mit $\vec{L} = \underline{\underline{\theta}} \vec{\omega} \; \| \vec{\omega}$

<u>Bestimmung von Eigenvektoren und Eigenwerten:</u>
$\vec{L} = \underline{\underline{\theta}} \vec{\omega} = \text{const.} \cdot \vec{\omega} = \lambda \cdot \vec{\omega}$ mit λ Eigenwert und $\vec{\omega}$ Eigenvektor

- Triviale Lösung: $\vec{\omega} = 0$
- Nichttriviale Lösung: $(\underline{\underline{\theta}} - \lambda \cdot \underline{\underline{1}}) \vec{\omega} = 0$ mit $\vec{\omega} \neq 0$
  → Die drei Gleichungen müssen linear abhängig sein, also maximal zwei linear unabhängige Gleichungen.
  → $\det(\underline{\underline{\theta}} - \lambda \cdot \underline{\underline{1}}) = 0$ liefert Eigenwerte und mit diesen dann die Eigenvektoren.
  → Eine nxn Matrix mit reelen Komponenten hat n linear unabhängige, zueinander orthogonale Eigenvektoren.

Die drei linear unabhängigen, zueinander orthogonalen Eigenvektoren können als neue kartesische Basis verwendet werden: $\vec{r}=x_1\vec{\omega}_1+x_2\vec{\omega}_2+x_3\vec{\omega}_3$ mit den Hauptträgheitsachsen $\vec{\omega}_1,\vec{\omega}_2$ und $\vec{\omega}_3$. In dieser Basis ist der Trägheitstensor in <u>Diagonalform:</u> $\underline{\theta}'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$

<u>Nutation:</u> Bewegung der Rotationsachse um die Drehimpulsachse

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d'}{dt}(\underline{\theta}'\cdot\vec{\omega})+\vec{\omega}\times(\underline{\theta}'\cdot\vec{\omega})=\vec{M}$$

In Komponenten also: (<u>Eulersche Kreiselgleichungen</u>):

$$\lambda_1\dot{\omega}_1+\omega_2\cdot\lambda_3\cdot\omega_3-\omega_3\cdot\lambda_2\cdot\omega_2=M_1$$
$$\lambda_2\dot{\omega}_2+\omega_3\cdot\lambda_1\cdot\omega_1-\omega_1\cdot\lambda_3\cdot\omega_3=M_2$$
$$\lambda_3\dot{\omega}_3+\omega_1\cdot\lambda_2\cdot\omega_2-\omega_2\cdot\lambda_1\cdot\omega_1=M_3$$

Nutation: $M_1=M_2=M_3=0$

<u>Präzession:</u> Zusätzliche Drehung der Drehimpulsachse um die Figurenachse

$$\frac{d\varphi}{dt}=:\omega_p=\frac{M}{L} \quad\Rightarrow\quad M=\omega_p\cdot L$$

2.3 Wellenausbreitung in der Mechanik

<u>Gekoppelte Schwingungen</u>

[Experiment: 2 Massenpunkte zwischen 3 Federn]
Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x}_1=-Dx_1+D(x_2-x_1) \text{ und } m\ddot{x}_2=-Dx_2-D(x_2-x_1)$$

mit Ansatz $x_{1/2}=A_{1/2}\cos(\omega t)$: $\Rightarrow\omega_+=\sqrt{3}\Omega$ und $\omega_-=\Omega$ mit $\Omega=\sqrt{\frac{D}{m}}$

ω_- : mittlere Feder wird nicht ausgelenkt (symmetrisch)

ω_+ : mittlere Feder wird maximal gestreckt (antisymmetrisch)

Auch Überlagerungen der Eigenschwingungen sind Lösungen:

$$x_1(t)=A(\sin(\omega_1 t)+\sin(\omega_2 t)) \quad [\text{mit } \sin(a)+\sin(b)=2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)]$$

$$\Rightarrow x_1(t)=2\cdot A\cdot\sin\left(\underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\text{mittlere Frequenz}}\cdot t\right)\cdot\cos\left(\underbrace{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}_{\text{Schwebungsfrequenz}}\cdot t\right)$$

2.3.1 Die Wellengleichung

$\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x,t)-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}X(x,t)=0$ <u>Wellengleichung</u> (homogene, lineare, partielle

DGL mit konstanten Koeffizienten)

Ansatz: $X(x,t)=f(kx\pm\omega t)$

<u>Dispersionsrelation w(k):</u> $\omega=c\cdot k$

<u>Phasengeschwindigkeit:</u> $c=\frac{\omega}{k}$ gleichförmige Bewegung der Welle mit c

Da Wellengleichung linear → Superpositionsprinzip gilt.

<u>Beispiel:</u> $X_1(x,t)=\sin(kx+\omega t)$, $X_2(x,t)=\sin(kx-\omega t)$ Lösungen der DGL

$\Rightarrow\ X(x,t)=2\cdot A\cdot\sin(kx)\cdot\cos(\omega t)$ → <u>stehende Welle</u>

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ mit λ <u>Wellenlänge</u>, $\omega=\frac{2\pi}{T}$

<u>Beispiel:</u> $X_1(x,t)=\sin(kx-\omega t)$, $X_2(x,t)=\sin(kx-\omega t+\varphi)$

mit <u>Phasenverschiebung</u> φ

$\Rightarrow\ X(x,t)=2\cdot A\cdot\sin\left(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

$\Rightarrow\ \varphi=(2n+1)\cdot\pi\ \Rightarrow\ X(x,t)\equiv 0$ mit $n\in\mathbb{N}$ <u>destruktive Interferenz</u>

$\Rightarrow\ \varphi=2n\cdot\pi\ \Rightarrow\ X(x,t)=2\cdot A\cdot\sin(\ldots)$ <u>konstruktive Interferenz</u>

2.3.2 Gruppengeschwindigkeit

Wir hatten $\omega=\underbrace{c(\omega)}_{\text{dispersive Wellen}}\cdot k$ mit $c=c(\omega)$ in vielen Körpern.

$\left[\cos(a)+\cos(b)=2\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right]$ Additionstheorem

Besteht die Lösung der Wellengleichung aus einem schnell und einem langsam oszillierenden Teil, so ist

- $\frac{dx}{dt}=\frac{w}{k}=c$ <u>Phasengeschwindigkeit</u> (schnell oszillierender Anteil)
- $v_{gr}=\frac{d\omega}{dk}$ <u>Gruppengeschwindigkeit</u> (langsam oszillierender Anteil)

2.3.3 Fourierreihenentwicklung

$X=a\cdot\cos(kx+\omega t)+b\cdot\sin(kx+\omega t)$

$f(t)=X(x=0,t)$

$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos(n\cdot\omega t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin(n\cdot\omega t)$ ist periodische Funktion mit

Kreisfrequenz ω und Periode $T=\frac{2\pi}{\omega}$

<u>Fourieranalyse:</u>

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(n\omega t)dt$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(n\omega t)dt$$

2.3.4 Der Doppler Effekt

- Bewegter Beobachter
  Dispersionsrelation: $\frac{\omega}{k}=c=\lambda\cdot f$
  Zeit zwischen Maxima: $T_B=\frac{\lambda}{c+v_B}$
  Beobachtete Frequenz: $f_B=f_Q\left(1+\frac{v_B}{c}\right)$
- Bewegte Quelle
  $f_B=f_Q\cdot\frac{1}{1-\frac{v_Q}{c}}$

2.4 Hydromechanik

2.4.1 Statik

Druck: $P=\frac{F_N}{A}$

Schweredruck: $P_G=\frac{m\cdot g}{A}=\rho\cdot g\cdot h$

Auftriebskraft: $F_A=F_2-F_1=\rho\cdot g\cdot\Delta h\cdot A$ Körper schwimmt: $F_A\geq m\cdot g$

Prinzip von Archimedes: Masse der verdrängten Wassers = Masse des schwimmenden Körpers

Stabile Schwimmlage für Schwerpunkt $\vec{R}$ des Körpers unterhalb von Schwerpunkt $\vec{R}_F$ des verdrängten Wassers (bei „stehendem" Körper)

Barometrische Höhenformel: $P=P_0\cdot e^{\frac{-\rho_0\cdot g}{P_0}\cdot h}$, da $\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{P}{P_0}$ [Physik III]

Quantifizierung durch Kompressibilität $\kappa:=-\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dP}$ z.B.

$H_2O\Rightarrow\kappa=5\cdot10^{-10}\frac{m^2}{N}$

Hydraulische Presse: $P=\frac{F_1}{A_1}=\frac{F_2}{A_2}$

2.4.2 Dynamik

Kontinuitätsgleichung: Wegen Massenerhaltung gilt bei Inkompressibilität
$A_1\cdot v_1=A_2\cdot v_2=\text{const}$

Bernoulli-Gleichung: $\underbrace{P}_{\text{Betriebsdruck}}+\underbrace{\frac{1}{2}\rho v^2}_{\text{Staudruck}}+\underbrace{\rho\cdot g\cdot h}_{\text{Schweredruck}}=\text{const}$

Schweredruck bei Luft meist vernachlässigbar (Auftrieb beim Flügel, Magnus-Effekt etc.)

<u>Reibung:</u> $F_R=\eta\cdot A\cdot\frac{dv}{dx}$ mit Voskosität η in $\frac{Ns}{m^2}=Pa\cdot s$ (materialspezifisch und temperaturabhängig)

<u>Beispiel:</u> Zylinder:

$$F_R=\eta\cdot 2\pi l r\frac{dv}{dr}$$

Stationarität:
Nach Integration mit Randbedingung $v(R)=0$:

$$\Rightarrow v(r)=\frac{P_1-P_2}{4\eta l}\cdot(R^2-r^2)$$

<u>Flüssigkeitsmenge pro Zeitintervall:</u> $\frac{dm}{dt}=\int\rho\cdot v\cdot dA$

2.4.3 Differentielle Formulierung der Hydrodynamik

<u>Ziel:</u> Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(\vec{r},b)$

<u>Kontinuitätsgleichung:</u> $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\cdot\vec{v})=0$

<u>Eulersche Bewegungsgleichung:</u> $\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)=-\vec{\nabla}(P+\rho\cdot g\cdot z)$

<u>1. Beispiel:</u> $\vec{v}(x,y,z,t)$ mit $\mathrm{rot}(\vec{v})=\vec{\nabla}\times\vec{v}=0$ <u>Potentialströmungen</u>

$$\Delta\Phi=0=\mathrm{div}(\mathrm{grad}(\Phi))=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi$$

<u>2. Beispiel:</u> mit Stationarität, d.h. $\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}=0$

$$\Rightarrow \rho\frac{\vec{v}^2}{2}+\rho\cdot g\cdot z+P=\mathrm{const}$$ <u>Bernoulli-Gleichung</u>

<u>Annahmen:</u>

- Stationarität
- Potentialströmungen
- keine Reibung
- Inkompressibilität

<u>3. Beispiel:</u> Oberflächenwellen (Schwerewellen)
Starte von

<u>Ansatz:</u> $\Phi=f(z)\cos(kx-\omega t) \Rightarrow \frac{d^2f}{dz^2}-k^2f(z)=0$

<u>Ansatz:</u> $f(z)=A\cdot e^{kz} \Rightarrow \Phi(\vec{r},t)=A\cdot e^{kz}\cos(kx-\omega t)$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\nabla}\,\Phi = \begin{pmatrix} -A \cdot e^{kz} \cdot k \sin(kx - \omega t) \\ 0 \\ A \cdot k \cdot e^{kz} \cos(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

Für große Flüssigkeitstiefen im Vergleich zur Wellenlänge und für kleine Amplituden im Vergleich zur Wellenlänge löst dieser Ansatz die Eulersche Bewegungsgleichung unter der Bedingung:

$\omega^2 = k \cdot g$ Dispersionsrelation der Oberflächenwellen

Flachwasserfall: $\frac{\omega}{k} = c = \sqrt{g \cdot h}$ mit Wassertiefe h → dispersionslose Wellen → „Brecher" am Strand