Übungen zur Physik I (Mechanik)	**WS 04/05**
Lösungen zum 2. Übungsblatt	**28.10.2004**

1) Noch mal Fehlerrechnung (virtuelle Punkte: 1 + 1)

a) Gefragt ist nach der Standardabweichung der Größe $A = x - y^2$:

$$s_A = \sqrt{s_x^2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + s_y^2\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2}$$

$$s_x^2 = \left(1\cdot 10^{-3}\cdot 1112\right)^2 = (1{,}112)^2 \quad , \quad s_y^2 = \left(4\cdot 10^{-3}\cdot 27{,}4\right)^2 = (0{,}1096)^2$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 1 \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial y} = -2y = -54{,}8$$

$$\Rightarrow s_A = \sqrt{(1{,}112)^2\cdot 1 + (0{,}1096)^2\cdot(-54{,}8)^2} \approx \sqrt{37{,}31} \approx 6{,}108$$

b) $$a = \frac{n\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{d} \quad \text{mit} \quad d = n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2$$

$$b = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{d}$$

$$d = 5(1+4+16+25) - (1+2+4+5)^2 = 230 - 144 = 86$$

$$a = \frac{5(3+6+20+25) - 12\cdot 18}{86} = \frac{270-216}{86} = 0{,}6279$$

$$b = \frac{(1+4+16+25)\cdot 18 - 12\cdot(3+6+20+25)}{86} = \frac{828-648}{86} \approx 2{,}093$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} \approx \sqrt{\frac{8{,}65\cdot 10^{-3} + 0{,}0778 + 0{,}1212 + 0{,}156 + 0{,}0543}{4}} \approx 0{,}3235$$

$$s_a = \sqrt{\frac{n\cdot s_y^2}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{5\cdot 0{,}1047}{5\cdot 46 - 144}} \approx 0{,}078$$

$$s_b = \sqrt{\frac{s_y^2\cdot \sum x_i^2}{n\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{0{,}1047\cdot 46}{5\cdot 46 - 144}} \approx 0{,}237$$

2) Zylinderkoordinaten (1 + 1 + 1)

a) $\vec{e}_r = (\cos j, \sin j, 0)$, $\vec{e}_j = (-\sin j, \cos j, 0)$ und $\vec{e}_z = (0,0,1)$.

b) $\vec{r}(t) = r \cdot \vec{e}_r + z \cdot \vec{e}_z$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\,,\,\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,,\dot{z}\right) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi\,,\,\dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi\,,\dot{z}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{r}\dot{\varphi}\sin\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ \ddot{r}\sin\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\cos\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\cos\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\left(-\sin\varphi\right) \\ \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\sin\varphi + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\cos\varphi \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

c) Ansatz: $\vec{A} = z\vec{e}_1 + 2x\vec{e}_2 + y\vec{e}_3 = A_r\vec{e}_r + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$

$$\vec{e}_r = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi\,,\ \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2\cos\varphi \Rightarrow \vec{e}_1 = \vec{e}_r\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi\,,\ \vec{e}_2 = \vec{e}_r\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi$$

mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ ergibt sich

$$\vec{A} = z\left(\vec{e}_r\cos\varphi - \vec{e}_\varphi\sin\varphi\right) + 2r\cos\varphi\left(\vec{e}_r\sin\varphi + \vec{e}_\varphi\cos\varphi\right) + r\sin\varphi\,\vec{e}_z$$
$$= \left(z\cos\varphi + 2r\cos\varphi\sin\varphi\right)\vec{e}_r + \left(2r\cos^2\varphi - z\sin\varphi\right)\vec{e}_\varphi + r\sin\varphi\,\vec{e}_z$$

3) Überholvorgang (2)

Beschleunigungszeit: $v_1 = v_0 + at_1 \Rightarrow t_1 = 4{,}27\mathrm{s}$

Gesamte Fahrstrecke vom Ausscheren bis zum Einscheren:

$$s = v_0t_1 + \tfrac{1}{2}at_1^2 + v_1t_2 \overset{!}{=} v_0\left(t_1 + t_2\right) + \left(40\mathrm{m} + 25\mathrm{m} + 40\mathrm{m}\right) \Rightarrow t_2 = 16{,}77\mathrm{s}$$

Gesamte Überholzeit: $t = t_1 + t_2 = 21{,}04\mathrm{s}$

Gesamte Überholstrecke: $s \approx 572{,}5\mathrm{m}$

Zeichnen des $s(t)$ und des $v(t)$ Diagramms macht bitte jeder selbst!

4) Landeanflug (2)

Geschwindigkeit des Flugzeugs:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(-\omega R\sin\omega t\,,\,\omega R\cos\omega t\,,\,-\beta\omega\right)$$

Betrag der Geschwindigkeit:

$$|\vec{v}| = \sqrt{w^2 R^2 \sin^2 wt + w^2 R^2 \cos^2 wt + b^2 w^2} = w\sqrt{R^2 + b^2}$$ (unabhängig von der Zeit t !)

$$|\vec{v}| = \frac{1}{7}\sqrt{1000^2 + \frac{400^2}{(6p)^2}}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 142{,}9\,\text{m/s} \mathrel{\hat{=}} 514{,}4\,\text{km/h}$$