Übungen zur Physik I (Mechanik)	**WS 04/05**
3. Übungsblatt	**04.11.2004**
Bearbeitung bis Mi. 10.11.2004	

1) Kugelkoordinaten (1 + 2)

a) $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin J \cos j , \sin J \sin j , \cos J)$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial J} = r(\cos J \cos j , \cos J \sin j , -\sin J)$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial J}\right| = r$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial j} = r(-\sin J \sin j , \cos J \sin j , 0)$, $\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial j}\right| = r \sin J$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_r = (\sin J \cos j , \sin J \sin j , \cos J)$$

$$\vec{e}_J = (\cos J \cos j , \cos J \sin j , -\sin J)$$

$$\vec{e}_j = (-\sin j , \cos j , 0)$$

Orthogonal?

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_J = \left(\sin J \cos J \cos^2 j + \sin J \cos J \sin^2 j - \sin J \cos J\right) = 0$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_j = (-\sin J \cos j \sin j + \sin J \cos j \sin j + 0) = 0$$

$$\vec{e}_J \cdot \vec{e}_j = (-\cos J \cos j \sin j + \cos J \cos j \sin j + 0) = 0$$

b) Parameterdarstellung der Einheitsvektoren:

$$\vec{e}_r = \sin J \cos j \, \vec{e}_1 + \sin J \sin j \, \vec{e}_2 + \cos J \, \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_J = \cos J \cos j \, \vec{e}_1 + \cos J \sin j \, \vec{e}_2 - \sin J \, \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_j = -\sin j \, \vec{e}_1 + \cos j \, \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$$

Lässt sich mit der Cramerschen Regel z.B. nach $\vec{e}_1$ auflösen:

$$\vec{e}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \sin J \sin j & \cos J \\ \vec{e}_J & \cos J \sin j & -\sin J \\ \vec{e}_j & \cos j & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin J \cos j & \sin J \sin j & \cos J \\ \cos J \cos j & \cos J \sin j & -\sin J \\ -\sin j & \cos j & 0 \end{vmatrix}} = \frac{\vec{e}_r \sin J \cos j + \vec{e}_J \cos J \cos j + \vec{e}_j (-\sin j)}{\sin^2 J \cos^2 j + \cos^2 J \cos^2 j + \sin^2 j}$$

$$= \sin J \cos j \, \vec{e}_r + \cos J \cos j \, \vec{e}_J - \sin j \, \vec{e}_j$$

und analog

$$\vec{e}_2 = \sin J \sin j \, \vec{e}_r + \cos J \sin j \, \vec{e}_J + \cos j \, \vec{e}_j$$

$$\vec{e}_3 = \cos J \, \vec{e}_r - \sin J \, \vec{e}_J$$

Zwischenrechnung:

$$\dot{\vec{e}}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial j} \dot{j} = (\cos J \cos j , \cos J \sin j , -\sin J)\dot{J} + (-\sin J \sin j , \sin J \cos j , 0)\dot{j}$$

$$= \dot{J} \, \vec{e}_J + \sin J \, \dot{j} \, \vec{e}_j$$

und analog

$$\dot{\vec{e}}_J = -\dot{J} \, \vec{e}_r + \cos J \, \dot{j} \, \vec{e}_j$$

$$\dot{\vec{e}}_j = -\sin J \, \dot{j} \, \vec{e}_r - \cos J \, \dot{j} \, \vec{e}_J$$

Übungen zur Physik I (Mechanik) **WS 04/05**

3. Übungsblatt **04.11.2004**

Bearbeitung bis Mi. 10.11.2004

Jetzt Geschwindigkeit und Beschleunigung in Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{J}\,\vec{e}_J + r\sin J\,\dot{j}\,\vec{e}_j$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{J}\,\vec{e}_J + r\ddot{J}\,\vec{e}_J + r\dot{J}\,\dot{\vec{e}}_J + \dot{r}\sin J\,\dot{j}\,\vec{e}_j + r\cos J\,\dot{J}\dot{j}\,\vec{e}_j + r\sin J\,\ddot{j}\,\vec{e}_j + r\sin J\,\dot{j}\,\dot{\vec{e}}_j$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\left(\dot{J}\,\vec{e}_J + \sin J\,\dot{j}\,\vec{e}_j\right) + \dot{r}\dot{J}\,\vec{e}_J + r\ddot{J}\,\vec{e}_J + r\dot{J}\left(-\dot{J}\,\vec{e}_r + \cos J\,\dot{j}\,\vec{e}_j\right) + \dot{r}\sin J\,\dot{j}\,\vec{e}_j + r\cos J\,\dot{J}\dot{j}\,\vec{e}_j$$

$$+ r\sin J\,\ddot{j}\,\vec{e}_j + r\sin J\,\dot{j}\left(-\sin J\,\dot{j}\,\vec{e}_r - \cos J\,\dot{j}\,\vec{e}_J\right)$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{J}^2 - r\sin^2 J\right)\vec{e}_r + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{J}\right) - r\sin J\cos J\,\dot{j}^2\right)\vec{e}_J + \left(\frac{1}{r\sin J}\frac{d}{dt}\left(r^2\sin^2 J\,\dot{j}\right)\right)\vec{e}_j$$

2) Drehimpuls und Drehmoment (2)

Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \vec{r}\times m\vec{v} = m(\vec{r}\times\vec{v}) = m(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(a\cos wt, b\sin wt, 0) = (-aw\sin wt, bw\cos wt, 0)$$

$$\vec{L} = m\left[(a\cos wt, b\sin wt, 0)\times(-aw\sin wt, bw\cos wt, 0)\right] = abmw(0,0,1)$$

Drehmoment $\vec{D} = \frac{d}{dt}\vec{L} = \dot{\vec{L}} = 0$ falls a, b, m zeitunabhängig.

3) Impuls und Kraft am Rammpfahl (1 + 1)

a) Nach dem Ausklinken fällt die Last unter Einwirkung der Gravitation:

$v = gt$ aus Betrachtungen zum freien Fall folgt $s = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2sg} = \sqrt{2\cdot 8{,}5\mathrm{m}\cdot 9{,}81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 12{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

und daraus folgt der Impuls $p = mv = 1000\mathrm{kg}\cdot 12{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1{,}29\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

b) Da der Impuls (nahezu) vollständig innerhalb von 0,01s auf den Pfahl übertragen wird folgt unter der Annahme, dass die Kraft in dieser Zeit konstant ist:

$$F_0 = \frac{p}{\Delta t} = \frac{1{,}29\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}01\mathrm{s}} = 1{,}29\cdot 10^6\,\mathrm{N}$$

4) Rakete (2)

Die Schubkraft ergibt sich aus der Zeitableitung des Impulses der Verbrennungsgase:

$$F_s = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = v\frac{dm}{dt} + m\frac{dv}{dt} = 2400\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 125\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} + 0 = 300\mathrm{kN}$$

Die Anfangs- und Endbeschleunigung der Rakete (a_a, a_e) ergeben sich im Schwerefeld der Erde zu:

$$F_{R,a} = F_S - m_a g = 300\text{kN} - \left(12800\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 174{,}4\text{kN} \quad \text{mit} \quad m_a = 12800\text{kg}$$

$$F_{R,e} = F_S - m_e g = 300\text{kN} - \left(4050\text{kg} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 260{,}3\text{kN} \quad \text{mit} \quad m_e = 4050\text{kg}$$

$$\Rightarrow \quad a_a = \frac{F_a}{m_a} = \frac{174{,}4\text{kN}}{12800\text{kg}} = 13{,}63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ und } \quad a_e = \frac{F_e}{m_e} = \frac{260{,}3\text{kN}}{4050\text{kg}} = 64{,}27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

5) Federkräfte (1)

Federkraft: $F = D \cdot l$

Lösungsbedingung: $l = l_1 + \frac{F}{D_1} = l_2 + \frac{F}{D_2}$

$$\Rightarrow \quad 0{,}31\text{m} + \frac{F}{40\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}4\text{m} + \frac{F}{100\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} \Leftrightarrow F = 6\text{N}$$

$$\Rightarrow \quad l = 0{,}31\text{m} + \frac{6\text{N}}{40\,\frac{\text{N}}{\text{m}}} = 0{,}46\text{m}$$