Übungen zur Physik I (Mechanik)	**WS 04/05**
5. Übungsblatt, Lösungen Bearbeitung bis Mi. 24.11.2004	**18.11.2004**

1) Bewegung eines „Gleiters“ (2)

Die Energie des Systems zum Zeitpunkt 0 (am Ort a) ist
$E_a = E_{pot,a} + E_{kin,a} = m_2 \cdot g \cdot l + 0$ (beide Körper in Ruhe)

Wenn sich der Körper m_1 am Ort b befindet ist die Energie des Systems
$E_b = E_{pot,b} + E_{kin,b} = 0 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} m_1 \cdot v^2$ (Beide Körper bewegen sich mit $|\vec{v}|$)

Aus der Energieerhaltung folgt $E_a = E_b$

$$\Rightarrow \quad m \cdot g \cdot l = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot l}$$

für $l = 100\mathrm{cm}$ und $m_1 = 100 \cdot m_2$ folgt

$$v = \sqrt{\frac{2m_2}{101 m_2} \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1\mathrm{m}} = 0{,}44 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

2) Kreisbewegung (1 + 1 + 1)

Ansatz kann über die Betrachtung der Energie des Wagens in den Punkten 1, 2, 3, 4 und 5 erfolgen:

$$E_1 = E_{pot} + E_{kin} \mathrel{\hat{=}} m \cdot g \cdot h_1 + 0$$

$$E_2 = E_{pot} + E_{kin} \mathrel{\hat{=}} 0 + \frac{1}{2} m \cdot v_2^2$$

$$E_3 = E_{pot} + E_{kin} \mathrel{\hat{=}} m \cdot g \cdot h_2 + \frac{1}{2} m \cdot v_3^2$$

$$E_4 = E_{pot} + E_{kin} \mathrel{\hat{=}} 0 + \frac{1}{2} m \cdot v_4^2$$

$$E_5 = E_{pot} + E_{kin} + E_{therm} \mathrel{\hat{=}} 0 + \frac{1}{2} m \cdot v_5^2 + \int_0^l F_G \cdot dx$$

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5$$

a) $$v_2 = v_4 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 60\mathrm{m}} = 34{,}3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_1 - h_2)} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (60 - 40)\mathrm{m}} = 19{,}8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Gesucht ist hier der Wert der Normalkraft am Punkt 3:

$$\vec{N}_3 + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_z$$

$$\vec{N}_3 = m \cdot (\vec{a}_z - \vec{g})$$

$$N_3 = m \cdot \left(\frac{v_3^2}{R} - g \right) \mathrel{\hat{=}} 60\text{kg} \cdot \left(\frac{\left(19{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{20\text{m}} - 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 587{,}5\text{N}$$

c) $$v_5 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad m \cdot g \cdot h_1 = \int_0^l F_G dx = m \cdot m_G \cdot g \int_0^l dx = m \cdot m_G \cdot g \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad l = \frac{h_1}{m_G} \mathrel{\hat{=}} \frac{60\text{m}}{0{,}25} = 240\text{m}$$

3) (Nicht-) konservative Kraftfelder (3 + 3)

Ein konservatives Kraftfeld liegt vor, Wenn die Arbeit bei der Bewegung eines Massenpunktes auf einem geschlossenen Weg null ist:
$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ Nach dem Satz von Stokes ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

a)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} y \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} x^2 \\ \frac{\partial}{\partial z} y - \frac{\partial}{\partial x} 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} x^2 - \frac{\partial}{\partial y} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x - 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Feld a) ist ein nicht konservatives Kraftfeld.

Arbeit die geleistet werden muß um ein Teilchen vom Punkt $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ zu bringen

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_0^2 F_x dx + \int_0^4 F_y dy + \int_0^0 F_z dz = \int_0^2 y\, dx + \int_0^4 x^2 dy$$

entlang des Weges $y = 2x$:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_1 = \int_0^2 2x dx + \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = x^2 \Big|_0^2 + \frac{y^3}{12} \Big|_0^4 = 4 + \frac{16}{3} = \frac{28}{3}$$

entlang des Weges $y = x^2$:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} d\vec{r}_2 = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^4 y dy = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{8}{3} + 8 = \frac{32}{3}$$

b)

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}3xz-y\\ x\\ \frac{3}{2}x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}x-\frac{\partial}{\partial z}\frac{3}{2}x^2\\ \frac{\partial}{\partial z}(3xz-y)-\frac{\partial}{\partial x}\frac{3}{2}x^2\\ \frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(3xz-y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 3x-3x\\ 1-1\end{pmatrix}=\vec{0}$$

Feld b) ist ein konservatives Kraftfeld.

Es gilt also:

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}f=-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x-\frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y-\frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z=(3xz-y)\vec{e}_x-x\vec{e}_y+\frac{3}{2}x^2\vec{e}_z$$

Koeffizientenvergleich liefert

1) $\frac{\partial f}{\partial x}=-3xz+y$ 2) $\frac{\partial f}{\partial y}=x$ 3) $\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{3}{2}x^2$

Integrieren ergibt

1) $f=-\frac{3}{2}x^2z+xy+f_1(y,z)$

2) $f=xy+f_2(x,z)$

3) $f=-\frac{3}{2}x^2z+f_3(x,y)$

Die drei Gleichungen stimmen überein für

$$f_1(y,z)=const. \quad , \quad f_2(x,z)=-\frac{3}{2}x^2z+const. \quad , \quad f_3(y,z)=xy+const.$$

$$\Rightarrow \quad f=-\frac{3}{2}x^2z+xy+const.$$

Die Arbeit, die geleistet werden muß um ein Teilchen vom Punkt $(1 \quad 1 \quad 1)$ zum Punkt $(2 \quad 2 \quad 2)$ zu bringen ergibt sich zu

$$A=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int\vec{\nabla}f\cdot d\vec{r}=-\int df$$

$$A=-f(2,2,2)+f(1,1,1)=-\left[-\frac{3}{2}x^2z+xy\right]_{(1,1,1)}^{(2,2,2)}=\frac{15}{2}$$