Institut für Experimentelle Kernphysik

Übungen zur Physik I (Mechanik)

WS 2004/05

Lösungen zu Blatt 7

---

1. Schwerpunkt und Trägheitsmoment

(a) Für den Schwerpunkt $\vec{R}_S$ gilt die Definition

$$\vec{R}_S = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm} = \frac{1}{m}\left(\int xdm, \int ydm, \int zdm\right)$$

Da die z-Achse die Symmetrieachse sein soll, gilt $x_S = y_S = 0$. Das Massenelement einer Kreisscheibe der Dicke dz ist gegeben durch $dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dz$. Mit dem Strahlensatz gilt für jeden Radius r in der Höhe z das Verhältnis $r/z = R/h_0$, sodass damit folgt: $dm = \rho\pi R^2/h_0^2 \cdot z^2 dz$, also

$$\int zdm = \int_0^{h_0} \rho\pi \frac{R^2}{h_0^2} z^3 dz = \rho\pi \frac{R^2}{h_0^2}\frac{1}{4}\left[z^4\right]_0^{h_0} = \rho\pi R^2 \frac{h_0^2}{4}$$

Für die Schwerpunktskoordinate z_S ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{1}{m}\rho\pi R^2 \frac{h_0^2}{4} \\ \text{Mit} \quad V &= \frac{\pi}{3} R^2 h_0 \qquad \text{und} \quad m = \rho V \\ \text{folgt} \quad z_S &= \frac{3}{\pi R^2 h_0} \cdot \frac{\pi R^2 h_0^2}{4} = \frac{3}{4} h_0 \end{aligned}$$

(b) Für das Trägheitsmoment J gilt die Definition

$$J = \int r^2 dm = \rho \cdot \int r^2 dV = \rho \cdot \int\int\int (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

1. Ansatz: Mit der Massendichte $\rho = m/l$ (Ausdehnung senkrecht zur Stabachse wird vernachlässigt) ergibt sich direkt

$$J = \rho \cdot \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr = \frac{m}{l} \cdot \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{1}{12} m l^2$$

2. Ansatz: Für jedes x entlang der Stabachse wird nun über Quader der Dicke dx integriert, wobei die y-Achse die Rotationsachse sei:

$$\begin{aligned} J &= \rho \int_{-l/2}^{l/2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + z^2) dxdydz \\ &= \rho \frac{1}{3}\left([x^3]_{-l/2}^{l/2} [y]_{-a/2}^{a/2} [z]_{-b/2}^{b/2} + [x]_{-l/2}^{l/2} [y]_{-a/2}^{a/2} [z^3]_{-b/2}^{b/2}\right) \\ &= \frac{1}{12} \rho lab \cdot l^2 (1 + b^2/l^2) \approx \frac{1}{12} m l^2 \end{aligned}$$

wobei $m = \rho lab$ und $l \gg a, b$ verwendet wurde.

2. Trägheitsmoment und Rotationsenergie

(a) Vollkugel: Die z-Achse werde in die Drehachse gelegt, a sei der Abstand der Masse dm von der Drehachse. Mit $a = r \cdot \sin\theta$ und $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$ folgt dann für das Drehmoment J:

$$
\begin{aligned}
J &= \int a^2 dm = \int a^2 \rho dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho r^4 dr \sin^3\theta d\theta d\phi = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \\
&= \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta \right]_0^{\pi} = \rho \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{5} m R^2
\end{aligned}
$$

wobei in der letzten Zeile noch $\rho = m/V$ und $V = 4/3\pi R^3$ benutzt wurde.

(b) Hohlkugel: Die Flächenmassendichte ist $\rho_A = m/A$ mit der Fläche $A = 4\pi R^2$. Das Flächenelement dA ist gegeben durch $dA = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$ und $a = R\sin\theta$. Das Trägheitsmoment J ist dann

$$
\begin{aligned}
J &= \int a^2 dm = \int a^2 \rho_A dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \rho_A R^4 \sin^3\theta d\theta d\phi = \rho_A \cdot 2\pi \cdot R^4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \\
&= \rho_A \cdot 2\pi \cdot R^4 \frac{4}{3} = \frac{2}{3} m R^2
\end{aligned}
$$

Das Trägheitsmoment einer Hohlkugel ist größer als das einer Vollkugel gleicher Masse.

(c) Die Vollkugel kommt zuerst an, da sie das kleinere Trägheitsmoment besitzt. Die Abrollgeschwindigkeit v und die Rotationsfrequenz ω sind über die Rollbedingung $v = R \cdot \omega$ gekoppelt. Die Kugel mit kleinerem J nimmt weniger Rotationsenergie auf, hat also bei gleichem Verlust an potentieller Energie größere kinetische (Translations-)Energie.

(d) Aus der Energieerhaltung folgen die Geschwindigkeiten der beiden Kugeln:

$$
\begin{aligned}
mgh_0 &= E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{rot}} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2}\omega^2 = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2}\frac{v^2}{R^2} \\
\Leftrightarrow \quad &= v^2 = \frac{mgh_0}{\frac{m}{2} + \frac{J}{2R^2}} = \frac{2gh_0}{1 + \frac{J}{mR^2}} \\
v &= \sqrt{\frac{2gh_0}{1 + \frac{J}{mR^2}}}
\end{aligned}
$$

Für die Vollkugel ergibt sich eine Geschwindigkeit $v_V = 5.29\,\mathrm{m/s}$, für die Hohlkugel folgt $v_H = 4.85\,\mathrm{m/s}$.

3) Radverlust (2)

Folgende Größen sind bekannt:

$$m = 20\text{kg} \quad , \quad \text{v} = 72\frac{\text{km}}{\text{h}} = 20\frac{\text{m}}{\text{s}} \quad , \quad r = 0{,}34\text{m} \quad , \quad \text{J} = 1\text{kg}\cdot\text{m}$$

$$F_{roll} = 0{,}04 \cdot F_N = 0{,}04 \cdot m \cdot g = 7{,}85\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$E_{kin,Rad} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2} \quad ; \quad w = \frac{2p}{T} = 58{,}8\frac{1}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2p \cdot r}{v} = \frac{2p \cdot 0{,}34}{20}\text{s} = 0{,}107\text{s}$$

Die Bedingung dafür, dass das Rad zum Stillstand kommt lautet:

$$F_{roll} \cdot s = \frac{mv^2}{2} + \frac{Jw^2}{2}$$

$$s = \frac{\left(mv^2 + Jw^2\right)}{2 \cdot 0{,}04 \cdot m \cdot g} = \frac{20 \cdot (20)^2 + (58{,}8)^2}{2 \cdot 0{,}04 \cdot 20 \cdot 9{,}81}\text{m} \approx 730\text{m}$$

4) Trägheitsmoment eines massiven Dreiecks (3)

$$m = 20\text{g} \quad , \quad a = 20\text{cm} \quad , \quad b = 30\text{cm}$$

Wähle a entlang der x-Achse; die Dicke des Bleches sei s.

$$y = -\frac{b}{a}x + b \quad , \quad x = -\frac{a}{b}y + a$$

$$dm = s \cdot r \cdot x \cdot dy \quad , \quad m = \frac{1}{2}a \cdot b \cdot s \cdot r \quad ; \quad r : \text{Materialdichte}$$

$$J_a = \int y^2 dm = \int_0^b y^2 \cdot s \cdot r \cdot \left(-\frac{a}{b}y + a\right)dy = s \cdot r \cdot a\int_0^b \left(-\frac{y^3}{b} + y^2\right)dy$$

$$= s \cdot r \cdot a\left[-\frac{y^4}{4b} + \frac{y^3}{3}\right]_0^b = s \cdot r \cdot a\left(-\frac{b^3}{4} + \frac{b^3}{3}\right) = s \cdot r \cdot a\frac{b^3}{12} = m\frac{b^2}{6}$$

$$= 20 \cdot \frac{(0{,}3)^2}{6}\text{gm}^2 = 3 \cdot 10^{-4}\text{kgm}^2$$