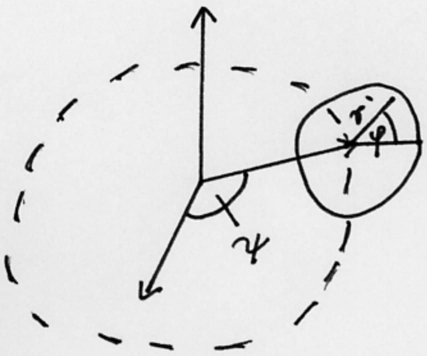
Lösung zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1:



$$x_1 = (R + r' \cdot \cos\varphi) \cdot \cos\psi$$
$$x_2 = (R + r' \cdot \cos\varphi) \cdot \sin\psi$$
$$x_3 = r' \cdot \sin\varphi$$

$$V = \int_0^{r}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r'\,(R + r'\cos\varphi)\,dr'\,d\varphi\,d\psi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2}\cdot R\cdot r^2 + \tfrac{1}{3} r^3\cdot\cos\varphi\right] d\varphi\,d\psi$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\tfrac{1}{2} R\cdot r^2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi} + \left(-\tfrac{1}{3} r^3\cdot\sin\varphi\right)\Big|_0^{2\pi}\right] d\psi$$

$$= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} R\cdot r^2\cdot 2\pi\,d\psi \quad = 2 R r^2 \pi^2$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2Rr^2\pi^2} \qquad ; dm = \rho\cdot dV$$

$$I_3 = \int d^3\vec{x}\cdot\rho_0\,(x_1^2 + x_2^2) = \rho_0 \iiint r'\cdot(R + r'\cos\varphi)^3\,dr'\,d\varphi\,d\psi$$

mit $x_1^2 = \left[(R + r'\cos\varphi)\cos\psi\right]^2 = (R + r'\cos\varphi)^2\cos^2\psi$

$x_2^2 = \left[(R + r'\cos\varphi)\sin\psi\right]^2 = (R + r'\cos\varphi)^2\sin^2\psi$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (R + r'\cdot\cos\varphi)^2$

$$\Rightarrow I_3 = \iiint \rho_0\cdot r'\cdot\left[R^3 + 3R^2\cdot r'\cos\varphi + 3R\cdot r'^2\cdot\cos^2\varphi + r'^3\cos^3\varphi\right] dr'\,d\varphi\,d\psi$$

$$= \rho_0 \iint \left[\tfrac{1}{2} r^2 R^3 + R^2 r^3\cos\varphi + \tfrac{3}{4} R\cdot r^4\cos^2\varphi + \tfrac{1}{5} r^5\cos^3\varphi\right] d\varphi\,d\psi$$

$$= \rho_0 \int \left[r^2 R^3 \pi - 0 + \tfrac{3}{4} R r^4 \pi + 0\right] d\psi$$

$$= \rho_0 \left[2\pi^2 r^2 R^3 + \tfrac{3}{2}\pi^2 r^4 R\right]$$

$$= m\left(R^2 + \tfrac{3}{4} r^2\right)$$

$$I_2 = \int d^3\vec{x} \cdot \rho_0 \left(x_3^2 + x_1^2\right)$$

$$x_1^2 = (R + r'\cos\varphi)^2 \cdot \cos^2\psi$$

$$x_3^2 = r'^2 \cdot \sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow I_2 = \rho_0 \iiint r' \cdot (R + r'\cos\varphi) \cdot \left[r'^2 \sin^2\varphi + (R + r'\cos\varphi)^2 \cdot \cos^2\psi\right] dr'\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \rho_0 \iiint \Big[r'^3 \cdot R \cdot \sin^2\varphi + r'^4 \cos\varphi \sin^2\varphi + r' R^3 \cos^2\psi + r'^2 R^2 \cos\varphi \cdot \cos^2\psi$$
$$+ 2r'^2 R^2 \cos\varphi \cdot \cos^2\psi + 2r'^3 R \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi + r'^3 R \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi$$
$$+ r'^4 \cos^3\varphi \cdot \cos^2\psi \Big]\, dr'\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \rho_0 \iint \Big[\tfrac{1}{4} r^4 R \cdot \sin^2\varphi + \tfrac{1}{5} r^5 \cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + \tfrac{1}{2} r^2 R^3 \cos^2\psi + \tfrac{1}{3} r^3 R^2 \cos\varphi \cdot \cos^2\psi$$
$$+ \tfrac{2}{3} r^3 R^2 \cos\varphi \cdot \cos^2\psi + \tfrac{1}{2} r^4 \cdot R \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi + \tfrac{1}{4} r^4 R \cdot \cos^2\varphi \cdot \cos^2\psi$$
$$+ \tfrac{1}{5} r^5 \cos^3\varphi \cdot \cos^2\psi \Big]\, d\varphi\, d\psi$$

$$= \rho_0 \int \Big[\tfrac{1}{4} r^4 R \cdot \pi + 0 + r^2 R^3 \pi \cdot \cos^2\psi - 0 - 0 + \tfrac{1}{2} r^4 \cdot R \cdot \pi \cdot \cos^2\psi$$
$$+ \tfrac{1}{4} r^4 R \cdot \pi \cdot \cos^2\psi + 0\Big]\, d\psi$$

$$= \rho_0 \int \Big[\tfrac{1}{4} r^4 \cdot R \cdot \pi + \cos^2\psi \left(r^2 R^3 \pi + \tfrac{3}{4} r^4 R \cdot \pi\right)\Big]\, d\psi$$

$$= \rho_0 \cdot \Big[\tfrac{1}{2} r^4 R \cdot \pi^2 + r^2 R^3 \pi^2 + \tfrac{3}{4} r^4 R \cdot \pi^2\Big] = \rho_0 \left(r^2 R^3 \pi^2 + \tfrac{5}{4} r^4 R \cdot \pi^2\right)$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(R^2 + \tfrac{5}{4} r^2\right)$$

$$I_1 = \int d^3\vec{x} \cdot \rho_0 \left(x_2^2 + x_3^2\right)$$

analog,

zudem gilt aus Symmetriegründen $I_1 = I_2$

$$= \frac{m}{2} \cdot \left(R^2 + \tfrac{5}{4} r^2\right)$$

Übungen zur Physik I   WS 04/05

8. Übungsblatt , Lösungen

Aufgabe 2

a) Sei $\rho = \frac{m}{\ell^3}$ (ℓ: Kantenlänge) die Massendichte des homogenen Würfels. Dann gilt in Kartesischen Koordinaten:

$$I_{11} = \rho \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz = \rho \cdot \ell^2 \left(\frac{y^3}{3}\Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} + \frac{z^3}{3}\Big|_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \right)$$

$$= \frac{\rho \ell^2}{3} \left(\frac{2\ell^3}{8} + \frac{2\ell^3}{8} \right) = \frac{m\ell^2}{6}$$

$$I_{11} = I_{22} = I_{33}$$

$$\Rightarrow \underline{I}^{CM} = \frac{m\ell^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ als Trägheitstensor ~~bzgl~~ bzgl. des Schwerpunktes ($\underline{I}^{CM}$)

Nach dem Satz von Steiner ergibt sich der Trägheitstensor bzgl. eines in die Ecke des Würfels verschobenen Koordinatensystems zu:

$$I_{ij} = I_{ij}^{CM} + m \left(\sum_{k=1}^{3} a_k a_k \delta_{ij} - a_i a_j \right);$$

i, j, k: Komponenten des Trägheitstensors (hier also Koordinaten)

δ_{ij}: Kroneckesymbol

$\delta_{ij} = 1$ für $i = j$

$\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$

$a_{i,j,k}$: Abstände der verschobenen Drehachse von der Drehachse im Schwerpunkt.

Bsp: $I_{11} = I_{11}^{(CM)} + m((a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3)\delta_{11} - a_1a_1))$ $\quad \Big| \; a_1 = a_2 = a_3 = \frac{\ell}{2}$

$$= \frac{m\ell^2}{6} + m\left(\frac{3\ell^2}{4} - \frac{\ell^2}{4}\right) = \frac{m\ell^2}{6} + \frac{m\ell^2}{2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}m\ell^2}}$$

$$I_{12} = I_{12}^{(CM)} + m\Big(\sum_k a_k a_k \underbrace{\delta_{12}}_{=0} - a_1a_2\Big)$$

$$= 0 - \frac{m\ell^2}{4} = \underline{\underline{-\frac{m\ell^2}{4}}}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{m\ell^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{8}{3} & -1 \\ -1 & -1 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

b) Hauptachsentransformation:

Diagonalisierung eines Trägheitstensors durch Normierung der Eigenvektoren (EV) auf 1, so daß sie mit den Basisvektoren $\hat{e}_i$ des neuen, gedrehten Koordinatensystems übereinstimmen. Dann hat zu gelten

$$I\hat{e} = \lambda\hat{e} \quad \text{mit} \quad \lambda: \text{Eigenwert (EW)}$$

also:
$$\begin{aligned}(I_{11}-\lambda)\hat{e}_x + I_{12}\hat{e}_y + I_{13}\hat{e}_z &= 0\\ I_{21}\hat{e}_x + (I_{22}-\lambda)\hat{e}_y + I_{23}\hat{e}_z &= 0\\ I_{31}\hat{e}_x + I_{32}\hat{e}_y + (I_{33}-\lambda)\hat{e}_z &= 0\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen für die Koordinaten $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet:

$$\begin{vmatrix} I_{11}-\lambda & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22}-\lambda & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33}-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ Gleichung 3. Grades: „charakteristische Gleichung" für den EW λ, die stets 3 reelle, nicht unbedingt verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat. Die 3 EW λ_i sind die Hauptträgheitsmomente I_i.

Zu jedem EW λ_i läßt sich mit dem Gleichungssystem (1) der zugehörige EV $\hat{e}_i = (\hat{e}_{ix}, \hat{e}_{iy}, \hat{e}_{iz})$ und somit die zugehörige Hauptträgheitsachse bestimmen.

Wenn man zunächst den Faktor $\frac{ml^2}{4}$ außer acht läßt folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3}-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & \frac{8}{3}-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

oder $(\frac{8}{3}-\lambda)^3 - 3(\frac{8}{3}-\lambda) - 2 = 0$ substituiere $\frac{8}{3}-\lambda =: x$

$\Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$, $x_1 = 2$ läßt sich leicht raten

Die beiden übrigen Lösungen sind $x_2 = x_3 = -1$

oder nach Rücksubstitution:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \\ \lambda_2 = \lambda_3 &= \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3} \end{aligned}\right\} \text{EW}$$

jetzt wieder Faktor $\frac{ml^2}{4}$ einführen:

$$I_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{6}$$

$$I_2 = I_3 = \frac{11}{3} \frac{ml^2}{4} = \frac{11}{12} ml^2$$

Der EV (Hauptträgheitsachse) zum EW $\hat{I}_1$ wird ~~man~~ mit dem Gleichungssystem

$$\frac{ml^2}{4}\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & -1 & -1 \\ -1 & \frac{8}{3} & -1 \\ -1 & -1 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{e}_{1x} \\ \hat{e}_{1y} \\ \hat{e}_{1z} \end{pmatrix} = \frac{ml^2}{6}\begin{pmatrix} \hat{e}_{1x} \\ \hat{e}_{1y} \\ \hat{e}_{1z} \end{pmatrix}$$

berechnet. Die Lösung ist

$$\hat{e}_{1x} = \hat{e}_{1y} = \hat{e}_{1z} \quad \Rightarrow \quad \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D.h. die Raumdiagonale des Würfels ist eine Hauptträgheitsachse. Die beiden anderen Hauptträgheitsachse liegen in einer Ebene senkrech dazu.

Ermittle EV's zu I_2 und I_3 analog zu $\hat{e}_1$

$$\Rightarrow \hat{e}_{2,3x} + \hat{e}_{2,3y} + \hat{e}_{2,3z} = 0$$

Die EV's: $\hat{e}_2 \sim \begin{pmatrix} \hat{e}_{2x} \\ \hat{e}_{2y} \\ \hat{e}_{2x} - \hat{e}_{2y} \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_3 \sim \begin{pmatrix} \hat{e}_{3x} \\ \hat{e}_{3y} \\ \hat{e}_{3x} - \hat{e}_{3y} \end{pmatrix}$

stehen senkrecht auf $\hat{e}_1$: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3 = 0$

Wähle $\hat{e}_2$ und $\hat{e}_3$ beliebig, orthogonal in der von ihnen aufgespannten Ebene (Normieren nicht vergessen)

z. B. $\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Corioliskraft

Am Nordpol befindet sich der Mensch trotz rotierender Erde in Ruhe, er rotiert lediglich um seine eigene Achse ($T = 24 \times 3600\,\mathrm{s} = 86400\,\mathrm{s}$), d.h. die Gewichtskraft ist einfach

$$F_G = m \cdot g = 70\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\mathrm{m/s^2} = 686.70\,\mathrm{N}$$

Am Äquator ist die Gewichtskraft um die Zentrifugalkraft verringert:

$$\begin{aligned} F_G \quad & m \cdot g - m\omega_E^2 R = 70\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81\,\mathrm{m/s^2} - \frac{6.378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{(86400/2\pi)^2\,\mathrm{s}^2}\right) \\ & 70\,\mathrm{kg} \cdot \left(9.81\,\mathrm{m/s^2} - 0.0337\,\mathrm{m/s^2}\right) = 684.34\,\mathrm{N} \\ \Rightarrow \quad & \Delta F_G - 2.36\,\mathrm{N} \Rightarrow \Delta m = \frac{\Delta F_G}{g} = 0.241\,\mathrm{kg} \end{aligned}$$

Der Mensch erscheint also am Äquator leichter.

Beim Flug muss zusätzlich die Corioliskraft F_C berücksichtigt werden. Die Flughöhe h kann gegenüber dem Erdradius R vernachlässigt werden.

$$\vec{F_C} \quad 2m(\vec{v_F} \times \vec{\omega_E}) \qquad F_C = 2m \cdot v_F \cdot \omega_E \cdot \sin\phi$$

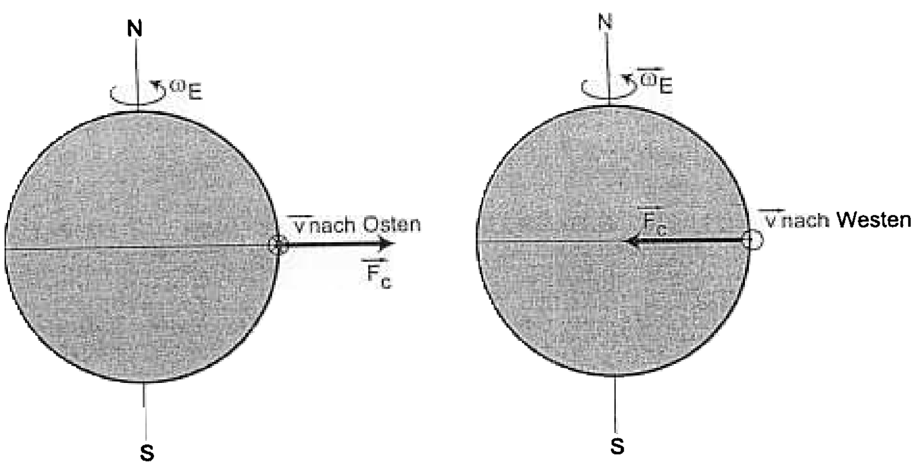
Für den Flug (am Äquator) nach Osten oder Westen gilt $\sin\phi = 1$, für den Flug nach Osten ($\omega_F \parallel \omega_E$, $|\vec{v_F}| = 800\,\mathrm{km/h} = 222.2\,\mathrm{m/s}$) dann also $F_C = 2m \cdot v_F \cdot \omega_E$. Im rotierenden Koordinatensystem der Erde ergibt sich dann als auf den Menschen wirkende Kraft nach unten (bezogen auf die Erdoberfläche):

$$F_G = F_g \quad m\omega_E^2 R - mv_F^2/R \quad 2mv_F\omega_E$$

Mit $v_F = \omega_F \cdot R$ kann man obige Gleichung auch umschreiben zu

$$F_G = F_g - mR(\omega_E + \omega_F)^2$$

Dies entspricht der Beschreibung der auf den Menschen wirkenden Kraft als Summe der Gewichtskraft und der Zentrifugalkraft in einem ruhenden Bezugssystem für eine Rotation, die aus der Erd- und der Flugzeugbewegung zusammengesetzt ist.



Beide Beschreibungen führen natürlich zum gleichen Resultat. Bleiben wir bei der Beschreibung im rotierenden Bezugssystem, so ergibt sich:

$$F_G = 686.7\,\mathrm{N} - 2.36\,\mathrm{N} - 0.54\,\mathrm{N} - 2.26\,\mathrm{N} = 681.54\,\mathrm{N}$$

Der Mensch am Äquator in seinem nach Osten fliegenden Flugzeug wird also scheinbar um eine Masse von $\Delta m = -0.53\,\mathrm{kg}$ leichter als der am Pol ruhende Mensch.
Beim Flug nach Westen gilt nun im rotierenden Bezugssystem wieder die Kräftebilanz:

$$F_G = F_g - m\omega_E^2 R - mv_F^2/R + 2mv_F\omega_E$$

wobei sich nun das Vorzeichen der Corioliskraft wegen der anderen Richtung von $\vec{v}_F$ umdreht. Die Kreisbewegung durch $\vec{v}_F$ führt aber in diesem System zu einer zusätzlichen Zentrifugalkraft, d.h. das negative Vorzeichen in der Kräftebilanz bleibt erhalten. Obige Gleichung kann einfach auf die Form $F_G = F_g - mR(\omega_E - \omega_F)^2$ gebracht werden, wie man sie aus Betrachtungen im ruhenden System erhalten hätte. Die Gesamtkraft ist also

$$F_G = 686.7\,\mathrm{N} - 2.36\,\mathrm{N} - 0.54\,\mathrm{N} + 2.26\,\mathrm{N} = 686.06\,\mathrm{N}$$

woraus $\Delta m = -0.065\,\mathrm{kg}$ folgt.
Beim Flug nach Norden gilt $\vec{v}_F \| \vec{\omega}_E$, d.h. $F_C = 0$, und die Gewichtskraft ist dann $F_G = F_g - m\omega_E^2 R - mv_F^2/R = 686.7\,\mathrm{N} - 2.36\,\mathrm{N} - 0.54\,\mathrm{N} = 683.8\,\mathrm{N}$, was einer Gewichtsabnahme von $\Delta m = -0.30\,\mathrm{kg}$ entspräche. Man beachte, dass hier gilt: $\omega_F \perp \omega_E$.

Was ändert sich bei diesen Überlegungen mit der geographischen Breite?
Es sei α der Winkel, der der geographischen Breite entspricht, wir betrachten zunächst Flugrichtungen nach Osten bzw. Westen. Für die Komponente von F_C in Richtung der Gewichtskraft, $F_{C\|}$, gilt $F_{C\|} = F_C \cdot \cos\alpha$. Der Betrag der Corioliskraft F_C bleibt allerdings unverändert. Zusätzlich ändert sich der für die Zentrifugalkräfte relevante Radius $R' = R \cdot \cos\alpha$. Auch die Komponenten der Zentrifugalkräfte $\|$ zu F_g müssen jeweils umgerechnet werden: $F_{Z\|} = F_Z \cdot \cos\alpha$.
Bei Bewegung nach Norden (vom Äquator weg, also auf der Nordhalbkugel) zeigt F_C nach der Rechte-Hand-Regel nach Osten, d.h. $F_C \perp F_g$ mit $F_C = 2m \cdot v_F \cdot \omega_E \cdot \sin\alpha$, für die Zentrifugalkraft aufgrund der Erdrotation muss man wieder den reduzierten Radius verwenden, während die Zentrifugalkraft aufgrund des Fluges senkrecht zur Erdoberfläche wirkt:

$$F_G = mg - m\omega_E^2 R\cos^2\alpha - m\frac{v_F^2}{R}$$

Bei einer Flugrichtung nach Norden auf der Südhalbkugel zeigt die Corioliskraft entsprechend nach Westen, die effektive Gewichtskraft bleibt unverändert.