Aufgabe 1

Gravitation einer Kreisscheibe

Für die Definition der Variablen siehe Skizze in Aufgabenblatt. Durch Vernachlässi gung der Dicke der Platte wird das Problem quasi-zweidimensional, d.h. wir betrach ten die Flächen- statt Volumenelemente. Als Massenelement der Kreisplatte wird eiı kreisförmiges Element der Breite dx gewählt. Der Beitrag dU zum Potenzial U is dann

Das Gesamtpotenzial wird durch Integration über die ganze Platte ermittelt:

$$
\begin{aligned}
U = \int_0^r dU &= -G_N \frac{2m}{r^2} \int_0^r \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= -G_N \frac{2m}{r^2} \left[\sqrt{x^2+a^2} \right]_0^r = -G_N \frac{2m}{r^2} \left(\sqrt{r^2+a^2} - a \right)
\end{aligned}
$$

Für die Feldstärke im Punkt P gilt dann

$$
\begin{aligned}
\vec{E} = & -grad\, U = \frac{dU}{da} \vec{n} = -G_N \frac{2m}{r^2} \left[\frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} - 1 \right] \vec{n} \\
&= G_N \frac{2m}{r^2} \left[1 - \frac{a}{\sqrt{r^2+a^2}} \right] \vec{n}
\end{aligned}
$$

wobei $\vec{n}$ den Einheitsvektor auf der Mittelachse von P in Richtung der Kreisplatte bezeichnet.

~~3. Gravitation II~~ Aufgabe 2: Gravitation der Erde

Als Zentralkraft ist die Gravitationskraft radial anziehend, d.h. in Kugelkoordinaten ist sie in Richtung $-\hat{r}$ gerichtet. $\hat{r}$ ist dabei der Einheitsvektor der Radialkoordinate

(a) Die Gravitationskraft außerhalb der Erde ist direkt

$$\vec{F} = -G_N \frac{m \cdot m_E}{r^2} \cdot \hat{r} \qquad \text{für} \quad r \geq R$$

mit (der Vollständigkeit halber) den Werten $m_E = 5.974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R = 6.378 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ und der Gravitationskonstanten $G_N = 6.673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$. Das Gravitationspotential $U(r_m)$ am Ort r_m des Körpers ergibt sich aus dem Wegintegral der gewonnenen (geleisteten) Arbeit:

$$U(r_m) = \int_{r_m}^{\infty} \vec{F}(r) d\hat{r} = -G_N m m_E \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = -G_N m m_E \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_m}^{\infty} = -G_N \frac{m \cdot m_E}{r_m}$$

wobei wieder gilt: $r_m \geq R$.

(b) Für die Gravitationskraft innerhalb der Erde ($r < R$) gilt unter Benutzung der Massendichte $\rho_E = m_E/(4/3 \cdot \pi R^3)$

$$\vec{F} = -G_N \cdot \frac{m \cdot \rho_E \cdot 4\pi r^3}{3r^2} \cdot \hat{r} = -G_N m \frac{m_E}{R^3} \cdot r \cdot \hat{r}$$

und entsprechend für das Gravitationspotential innerhalb des Erdradius R:

$$U(r_m) = -G_N \frac{m \cdot m_E}{R} + \int_{r_m}^{R} -G_N m \frac{m_E}{R^3} r dr = -G_N m m_E \left(\frac{1}{R} + \left[\frac{r^2}{2R^3} \right]_{r_m}^{R} \right)$$

$$= -\frac{G_N m \cdot m_E}{2R^3} (3R^2 - r_m^2)$$

(c) Man definiere (geschickterweise) zur Vereinfachung folgende konstante Größe:

$$g = \frac{G_N \cdot m_E}{R^2}$$

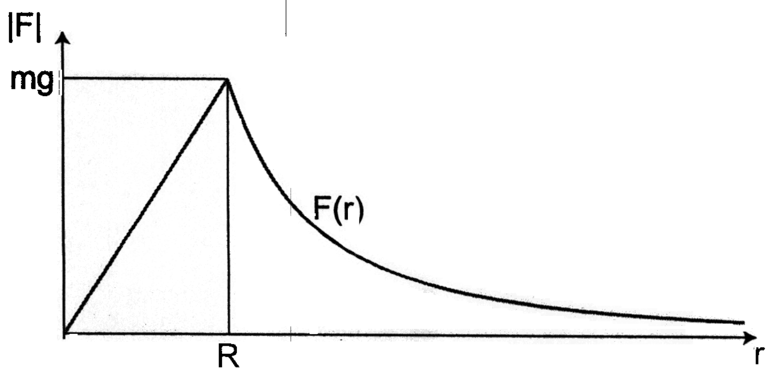
Dann lässt sich das Gravitationspotential wie folgt schreiben:

$$U(r) = -mg\frac{3R^2 - r^2}{2R} = -mg\left(\frac{3}{2}R - \frac{r^2}{2R}\right) = -mgR - mg\frac{R^2 - r^2}{2R}$$

An der Erdoberfläche gilt also $U(R) = -mgR = U_0$, in der Nähe der Erdoberfläche gilt dann $r \approx R$ und $\Delta r = R - r \ll R$. Damit können wir das Potential wie folgt schreiben:

$$U(r) - U_0 = -mg\frac{(R-r)(R+r)}{2R} \approx mg\frac{\Delta r \cdot 2R}{2R} = -mg\Delta r$$

Setzt man jetzt noch wie üblich für Δr die Höhe h ein, so erhält man die potentielle Energie $U(h) = mgh$, wobei hier implizit das Potential $U_0 = 0$ gesetzt wurde.



Aufgabe 3 Asteroid

1058

Estimate how big an asteroid you could escape by jumping.

(*Columbia*)

Solution:

Generally speaking, before jumping, one always bends one's knees to lower the center of gravity of the body by about 50 cm and then jumps up. You can usually reach a height 60 cm above your normal height. In the process, the work done is $(0.5 + 0.6)mg$, where m is the mass of your body and g is the acceleration of gravity.

It is reasonable to suppose that when one jumps on an asteroid of mass M and radius R one would consume the same energy as on the earth. Then to escape from the asteroid by jumping we require that

$$1.1mg = \frac{GMm}{R} .$$

If we assume that the density of the asteroid is the same as that of the earth, we obtain

$$\frac{M}{M_E} = \frac{R^3}{R_E^3} ,$$

where M_E and R_E are respectively the mass and radius of the earth. As $g = GM_E/R_E^2$, we find

$$R = \frac{GM}{1.1g} = \frac{R^3}{1.1R_E}$$

or

$$R = \sqrt{1.1R_E} = \sqrt{1.1 \times 6400 \times 10^3} = 2.7 \times 10^3 \text{ m}$$