Übungen zur Physik I (Mechanik) **WS 04/05**

10. Übungsblatt. Lösungen **13.01.2005**

Bearbeitung bis Mi. 19.01.2005

1) Zum Aufwärmen (2)

Verwende die Formel zur Energie-Massen-Äquivalenz:

$E = P \cdot t = m \cdot c^2$

Gegeben sind: $P = 1{,}2\,\mathrm{GW} = 1{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{kW}$, $m = 1\,\mathrm{kg}$

$1\,\mathrm{kg} \cdot c^2 \approx 9 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J} = 2{,}5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kW\,h}$

$$\Rightarrow t = \frac{m \cdot c^2}{P} \mathrel{\hat{=}} \frac{2{,}5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kW\,h}}{1{,}2 \cdot 10^6\,\mathrm{kW}} = 20833\,\mathrm{h} = 868\,\mathrm{d} \approx 2{,}4\,\mathrm{a}$$

2) Galilei- und Lorentz-Transformation (2+3)

Zwei Inertialsysteme S und S' bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v_x = \frac{c}{3}$ gegeneinander. Ein Körper A bewegt sich im System S mit der Geschwindigkeit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}1 \\ 0 \end{pmatrix} c\,.$$

a) Die Galilei-Transformation:

$$u'_x = u_x - v_x = \frac{c}{2} - \frac{c}{3} = \frac{c}{6}$$

$$u'_y = u_y \quad , \quad u'_z = u_z \quad , \quad t' = t$$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{pmatrix} c$$

b) Die Lorentz-Transformation:

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{9 \cdot c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = g \cdot \left(\frac{dx}{dt} - v \right) \cdot g \cdot \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2} \right) \qquad ,$$

auflösen nach u'_x und einsetzen von $\frac{1}{g^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad ; \quad u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

und analog

$$u'_y = \frac{u_y}{g \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad ; \quad u_y = \frac{u'_y}{g \cdot \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}$$

$$u'_z = \frac{u_z}{g \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)} \quad ; \quad u_z = \frac{u'_z}{g \cdot \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}$$

also ergibt sich:

$$u'_x = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{3}}{1 - \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{3}}{c^2}} = \frac{\frac{c}{6}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{c}{5}$$

$$u'_y = \frac{\frac{c}{10}}{\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \left(1 - \frac{\frac{c}{2} \cdot \frac{c}{3}}{c^2}\right)} = \frac{c \cdot \sqrt{8} \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{\sqrt{8}}{25} c \approx 0{,}113c$$

$$u'_z = 0$$

$$\Rightarrow u' = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}113 \\ 0 \end{pmatrix} c$$

Wie groß ist der Fehler bei Verwendung der Galileitransformation gegenüber der Lorentztransformation?

$$\frac{u'_x - u_x}{u'_x} = \frac{\Delta u_x}{u'_x} = \frac{0{,}2 - \frac{1}{6}}{0{,}2} \approx 16{,}7\% \quad ; \quad \frac{\Delta u_y}{u'_y} = \frac{0{,}113 - 0{,}1}{0{,}113} \approx 11{,}5\% \quad ; \quad \frac{\Delta u_z}{u'_z} = 0$$

3) Längenkontraktion (Lorentz-Transformation) (3)

Ein Maßstab der (Ruhe-)Länge l bewegt sich gegenüber einem Beobachter mit der Geschwindigkeit v. Der Beobachter misst die Länge des Stabes mit $\frac{2}{3} l$. Wie groß ist v?

Die Stablänge, die der Beobachter misst ist $x'_2 - x'_1 = g \cdot \left(x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)\right)$.

Gleichzeitigkeit des Ablesens für den Beobachter bedeutet

$$t'_2 - t'_1 = g \cdot \left(t_2 - t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)(x_2 - x_1)\right) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)$$

Mit $l' = x_2' - x_1'$ und $l = x_2 - x_1$ folgt $l' = \frac{l}{g} = \frac{2}{3}l$ (Messwert des Beobachters!)

Für die Geschwindigkeit folgt daraus $v = c \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}c \approx 0{,}745c$

Nebenrechnung zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 2:

b) Lorentz-Transformation:

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad x = \gamma(x' + vt')$$
$$y' = y \qquad y = y' \qquad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$z' = z \qquad z = z'$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$\boxed{u_x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{d}{dt}\left(\gamma(x-vt)\right) \cdot \frac{d}{dt'}\left(\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\right)$$

$$= \gamma^2 (u_x - v)\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right) \qquad \text{mit } \frac{dx}{dt} = u_x \;;\; \frac{dx'}{dt'} = u_x'$$

$$= \gamma^2\left(u_x - v + \frac{v u_x u_x'}{c^2} - \frac{v^2 u_x'}{c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_x' - \frac{\gamma^2 v u_x u_x'}{c^2} + \frac{\gamma^2 v^2 u_x'}{c^2} = \gamma^2 (u_x - v)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{u_x'}{\gamma^2} - \frac{v u_x u_x'}{c^2} + \frac{v^2 u_x'}{c^2} = u_x - v$$

$$\Leftrightarrow \quad u_x'\left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = u_x - v$$

$$\Leftrightarrow \quad u_x'\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v u_x}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = u_x - v$$

$$\Leftrightarrow \quad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

$$\boxed{u_y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d}{dt'}\left(\gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)\right)$$

$$= u_y \cdot \gamma \cdot \left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)$$

mit u_x' von oben einsetzen:

$$= u_y \cdot \gamma \cdot \left(1 + \left(\frac{\frac{v u_x}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\right)\right)$$

$$= u_y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{u_x v}{c^2} + \frac{u_x v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}\right)$$

$$= u_y \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{u_x v}{c^2}}\right) = u_y \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{u_y}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c}\right)}$$

$\boxed{u_z'}$ analog $\Rightarrow u_z' = \dfrac{u_z}{\gamma \cdot \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}$