Übungen zur Physik I (Mechanik) WS 04/05

11. Übungsblatt, Lösungen

1) Zeitdilatation

Wir nehmen S und S' als Bezugssyteme, in denen die Erde bzw. das Raumschiff ruht. Außerdem sei die Relativbewegung der Systeme entlang der x–Achse und es gelte $t_1 = t'_1 = 0$, $x_1 = x'_1 = 0$ zum Zeitpunkt der Synchronisation der Uhren. Jetzt nehmen wir an, dass die Uhr im Raumschiff die Zeit t'_2 anzeige. Die Gleichungen der Lorentztransformation lassen sich dann wie folgt schreiben

$$\begin{aligned} ct_2 &= \gamma(ct'_2 + \beta x'_2) = \gamma ct'_2 \\ x_2 &= \gamma(x'_2 + \beta ct'_2) = \gamma\beta ct'_2 \end{aligned}$$

wobei wir $\beta = v/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ sowie $x'_2 = x'_1 = 0$ gesetzt haben. Das Lichtsignal benötigt den Zeitraum

$$\Delta t = \frac{x_2}{c} = \gamma\beta t'_2$$

um den Beobachter auf der Erde zu erreichen. Daher wird seine Uhr nach der Zeit $t'_2 = 1\,\mathrm{h}$, die er durch sein Teleskop sieht, folgendes (in Stunden) anzeigen:

$$t_2 + \Delta t = \gamma(1+\beta)t'_2 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}t'_2 = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

2) Dopplereffekt

(a) Die Inertialsysteme S und S' bewegen sich zueinander entlang der x–Achse mit konstanter Geschwindigkeit v. Wir nehmen an, dass zur Zeit $t = t' = 0$ der Ursprung O und O' zusammenfallen, sodass die Emission von P_1 und die Ankunft beim Beobachter beide zu den Raum-Zeit-Koordinaten $x = t = 0$ und $x' = t' = 0$ stattfinden. Die Emission von P_2 findet in S am Ort $x = 0$ zum Zeitpunkt $t = \tau$ statt, und es gilt wieder mit Hilfe der Lorentztransformation

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) = -\gamma\beta c\tau \\ t' &= \gamma(t - \frac{\beta x}{c}) = \gamma\tau \end{aligned}$$

im Bezugssytem S'. Das Signal benötigt den Zeitraum

$$\Delta t = \frac{|x'|}{c} = \gamma\beta\tau$$

um den Beobachter zu erreichen. Daher registriert der Beobachter als Ankunftszeit

$$\begin{aligned} t' + \Delta t &= \gamma(1+\beta)\tau \qquad \text{oder} \\ \tau' &= \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}\ . \end{aligned}$$

(b) Das Zeitintervall zwischen zwei nacheinander folgenden Pulsen in S und S' ist τ bzw. τ'. Daraus ergeben sich die Frequenzen

$$\nu = \frac{1}{\tau} \qquad \text{und} \qquad \nu' = \frac{1}{\tau'}$$

und die entsprechenden Wellenlängen

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad \text{und} \qquad \lambda' = c\tau' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

in den Bezugssystemen S und S'.

(c) Die Protonen haben eine Energie von 20 keV, also deutlich kleiner als die Ruheenergie von 936 MeV, sodass wir ihre Geschwindigkeit in nichtrelativistischer Näherung bestimmen können:

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2E}{mc^2}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 10^{-3}}{936}} = 0.00654$$

Da $\beta \ll 1$ gilt, können wir die Funktion $\lambda'(\beta)$ nach β entwickeln

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx \lambda\left(1 + \beta + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots\right)$$

Die Dopplerverschiebung der H_β Linie ergibt sich dann in erster Ordnung zu

$$\Delta\lambda = \lambda\beta = 486.13 \cdot 0.00654 = 3.18\,\text{nm}$$

und die Verschiebung in zweiter Ordnung ist

$$\Delta\lambda = \frac{1}{2}\lambda\beta^2 = 0.5 \cdot 486.13 \cdot 0.00654^2 = 0.01\,\text{nm}$$

Entwicklung:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 \ldots$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 6}x^3 \ldots$$

jeweils für $|x| < 1$

Übungen zur Physik I (Mechanik)	**WS 04/05**
11. Übungsblatt, Lösungen Bearbeitung bis Mi. 26.01.2005	**20.01.2005**

1) Masse und Feder (2 + 1)

Eine Masse von 20g hängt an einer masselosen Feder und dehnt sie dadurch um 6cm aus.

a) Geben sie die Lage der Masse zu beliebiger Zeit an, wenn sie zur Zeit $t = 0$ um 2cm herabgezogen und losgelassen wurde. Geben sie Amplitude, Periode und Frequenz der Schwingung an.

b) Lösen sie die Aufgabe a) unter der Annahme, dass das Gewicht zur Zeit $t = 0$ um 3cm herabgezogen war und mit der Geschwindigkeit $v = 2\,cm/s$ abwärts geschleudert wurde.

Aus der Vorlesung sollten bekannt sein:

$$F = m \cdot a \quad ; \quad k = -\frac{F}{x} \quad ; \quad w^2 = \frac{k}{m}$$

In diesem Fall ist

$$F = -m \cdot g \quad \Rightarrow \quad w^2 = -\frac{F}{x \cdot m} = \frac{g}{x}$$

$$\hat{=} \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s^2}}{0{,}06\,\mathrm{m}} = 163{,}5\frac{1}{s^2}$$

$$w \approx 12{,}8\,\mathrm{s}^{-1}$$

Ansatz: $x(t) = A \cdot \cos(wt) + B \cdot \sin(wt)$

Nebenbedingungen: $x(t=0) = A \cdot \cos(w \cdot 0) + B \cdot \sin(w \cdot 0) = A \overset{!}{=} x_0$

$$v(t=0) = -Aw \cdot \sin(w \cdot 0) + Bw \cdot \cos(w \cdot 0) = Bw \overset{!}{=} v_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot \cos(wt) + \frac{v_0}{w} \cdot \sin(wt)$$

Zwischenrechnung:

$$x(t) = A \cdot \cos(wt) + B \cdot \sin(wt) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(wt) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(wt)\right)$$

$$\text{Sei} \quad \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos j \quad , \quad \sin j = \sqrt{1-\cos^2 j} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{B^2}{A^2+B^2}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \sqrt{A^2+B^2} \cdot (\cos j \,\cos(wt) + \sin j \,\sin(wt)) = \sqrt{A^2+B^2} \cdot (\cos(wt - j))$$

Mit Amplitude $D = \sqrt{A^2 + B^2}$ und Phasenwinkel $\tan j = \frac{B}{A}$

Also folgt: $x(t) = x_0 \cdot \cos(wt) + \frac{v_0}{w} \cdot \sin(wt) = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{w^2}} \cdot (\cos(wt - j))$ mit $\tan j = \frac{v_0}{x_0 \cdot w}$ und

der Amplitude $D = \sqrt{x_0^{\,2} + \frac{v_0^{\,2}}{w^2}}$

a) $x(t=0)=2\mathrm{cm} \quad ; \quad v(t=0)=0$

$$D = x_0 = 2\mathrm{cm} \quad ; \quad T = \frac{2p}{w} = 0{,}49\mathrm{s} \quad ; \quad f = \frac{1}{T} = 2{,}04\mathrm{s}^{-1}$$

b) $x(t=0)=3\mathrm{cm} \quad ; \quad v(t=0) = -0{,}02\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

$$D = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{w^2}} = \sqrt{(0{,}03)^2 + \frac{(0{,}02)^2}{(12{,}8)^2}}\mathrm{m} = 3{,}004\mathrm{cm}$$

Periode und Frequenz der Schwingung verändern sich nicht.