Übungen zur Physik I (Mechanik)	**WS 04/05**
12. Übungsblatt, Lösungen	**27.01.2005**
Bearbeitung bis Mi. 02.02.2005	

1) Masse-Energie-Äquivalenz (2 + 1 + 2)

Die Größe $E^2 - p^2c^2$ ist für ein abgeschlossenes System unter Lorentz-Transformation invariant. Findet in einem System eine Kernreaktion statt, bei der Energie und Impuls erhalten bleiben, so ist also auch die obige Größe konstant. Dies gilt insbesondere für ein Teilchen der Ruhemasse m: $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$.

a) Die Energie für die Reaktion $p + p \to p + \left(p + 4\boldsymbol{p}\right)$ ist genau dann minimal, wenn alle Teilchen im Ausgangskanal in einem Bezugssystem in Ruhe sind. Dies gilt insbesondere für das Schwerpunktsystem S'. Im Laborsystem S gilt dann: $E^2 - p^2c^2 = \left(E_0 + m_pc^2\right)^2 - \left(E_0{}^2 - m_p{}^2c^4\right) = 2m_pc^2E_0 + 2m_p{}^2c^4$

und im System S'

$$\left(E'\right)^2 - \left(p'c\right)^2 = \left(2m_pc^2 + 4m_pc^2\right)^2$$

Daraus folgt

$$2m_pc^2E_0 + 2m_p{}^2c^4 = 4m_p{}^2c^4 + 16m_pc^2m_pc^2 + 16m_p^2c^4$$

$$\Leftrightarrow E_0 = \frac{m_p^2c^4 + 8m_pc^2m_pc^2 + 8m_p^2c^4}{m_pc^2} = 2{,}225\,\mathrm{GeV}$$

Die einfallenden Protonen brauchen also mindestens 2,225 GeV Gesamtenergie um die Reaktion i.) auslösen zu können.

b) Da sich die Teilchenbilanz auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung nicht von a) unterscheidet, ist auch der Wert der benötigten Minimalenergie gleich:
$E_0 = 2{,}225\,\mathrm{GeV}$

c) Für die Reaktion $p + p \to \left(p + 4\boldsymbol{p}\right) + \left(p + 4\boldsymbol{p}\right)$ erhält man

$$\left(E_0 + m_pc^2\right)^2 - \left(E_0{}^2 - m_p{}^2c^4\right) = \left(2m_pc^2 + 8m_pc^2\right)^2$$

woraus sich eine Minimalenergie von

$$E_0 = \frac{m_p^2c^4 + 16m_pc^2m_pc^2 + 32m_p^2c^4}{m_pc^2} = 3{,}847\,\mathrm{GeV}$$ ergibt

2) Gedämpfte Schwingung (1 + 2 + 1 + 1)

a) Die Bewegungsgleichung lautet: $m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ wobei $k = 40\,\mathrm{N/m}$ ist. Der Reibungskoeffizient b lässt sich aus der Bedingung $F_{reib} = -bv$ bestimmen. Man erhält:

$$b = \frac{200\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s}} = 20\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$$

Setzt man $w^2 = k/m = 8\mathrm{s}^{-2}$, $2g = b/m = 4\mathrm{s}^{-1}$, so geht die Bewegungsgleichung über in
$\ddot{x} + 2g\dot{x} + w^2x = 0$ oder $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$ (Einheiten beachten!)

b) Aus $w^2 = 8\mathrm{s}^{-2}$, $2g = 4\mathrm{s}^{-1}$ folgt $w^2 > g^2$, d.h. es liegt eine schwache Dämpfung vor. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung einer gedämpften harmonischen Bewegung ist

$x(t) = e^{-gt}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$, wobei $\Omega = \sqrt{w^2 - g^2} = 2\mathrm{s}^{-1}$ ist. Die Konstante A und B lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$x_0 = x(t=0) = A = 20\mathrm{m}$$

$$\dot{x} = -g\, e^{-gt}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) + e^{-gt}(-A\Omega\sin\Omega t + B\Omega\cos\Omega t)$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -gx_0 + B\Omega \quad , \quad B = x_0\frac{g}{\Omega} = x_0 = 20\mathrm{m}$$

Somit ist

$$x(t) = 20\cdot e^{-gt}(\cos\Omega t + \sin\Omega t)\mathrm{m}\,.$$

Da $A\cos\Omega t + B\sin\Omega t = \sqrt{A^2+B^2}\cos(\Omega t - j)$ mit $\tan j = \frac{B}{A}$ gilt,

ergibt sich für $x(t)$:

$$x(t) = 20\sqrt{2}\cdot e^{-gt}\cos\left(\Omega t - \frac{p}{4}\right)\mathrm{m}\,.$$

Setzt man $\dot{x}(t) = 0$, so erhält man als notwendige Bedingung für Extrema: $t = kp/2\mathrm{s}$, wobei k eine ganze Zahl ist. Die Nullstellen folgen aus $\cos\left(\Omega t - \frac{p}{4}\right) = 0$. Damit erhält man folgende Tabelle:

t	0	$\frac{3p}{8} = 1{,}18$	$\frac{p}{2} = 1{,}57$	$\frac{7p}{8} = 2{,}75$	$p = 3{,}14$	$\frac{11p}{8} = 4{,}37$
x(t)	20	0	-0,86	0	0,04	0

Es ist ersichtlich, dass diese Schwingung sehr schnell ausdämpft. In der Tat befinden wir uns mit $g = 2\mathrm{s}^{-1}$ und $w = \sqrt{8}\mathrm{s}^{-1}$ nahe vor dem aperiodischen Grenzfall.

c) Die Amplituden sind demnach $a(t) = 20\sqrt{2}\cdot e^{-gt}\,\mathrm{m}$.

Die Frequenz ist $\Omega = \sqrt{w^2 - g^2} = 2\mathrm{s}^{-1}$.

Für die Periode ergibt sich $T = 2p\,\frac{1}{\Omega} = p\ \mathrm{s}$.

d) Für zwei aufeinander folgende, maximale Ausschläge erhält man

$$x_n = 20\sqrt{2}\cdot e^{-gt}\,\mathrm{m}\,,\quad x_{n+1} = 20\sqrt{2}\cdot e^{-g(t+T)}\,\mathrm{m} = 20\sqrt{2}\cdot e^{-g(t+2p/\Omega)}\,\mathrm{m}$$

woraus $\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{gT}$ folgt. Somit ist $\ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = gT$ das logarithmische Dekrement.

Seine Bedeutung liegt darin, dass durch die Messung des Verhältnisses aufeinander folgender Maximalausschläge direkt die Dämpfungskonstante g bestimmt werden kann.