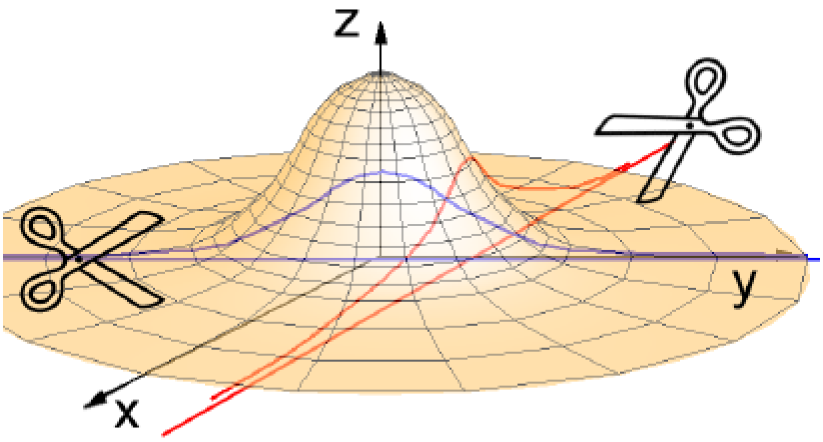
Partielle Ableitung



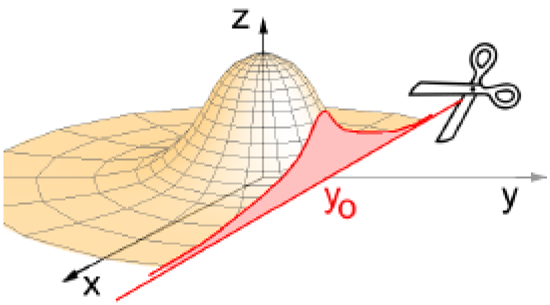
Beispiel:

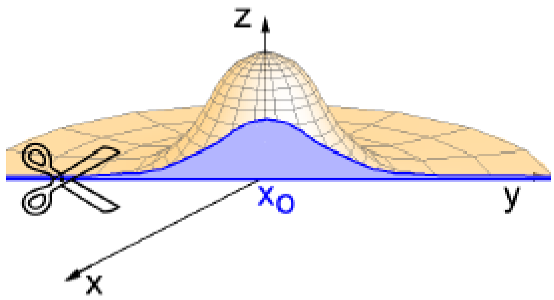
Funktion zweier Variabler ist eine zweidimensionale Fläche im Raum
Setzen wir eine Variable konstant Þ **Schnittkurven** der Funktion

$$z = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

Schnittkurve parallel zur x-z-Ebene:
- Abstand zur Ebene: y_0
- Schnittkurve ist Funktion nur von x!

Schnittkurve parallel zur y-z-Ebene:
- Abstand zur Ebene: x_0
- Schnittkurbe ist Funktion nur von y!

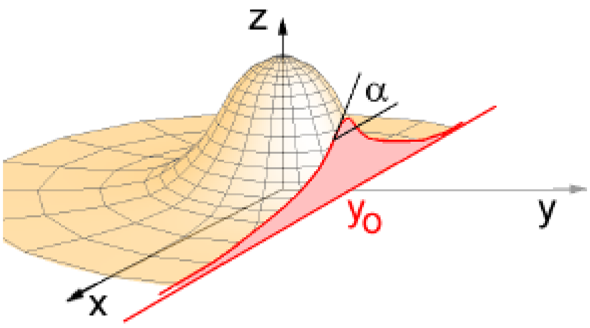




$$z(x) = \frac{1}{1 + x^2 + y_0^2}$$

$$z(y) = \frac{1}{1 + x_0^2 + y^2}$$

Steigung der Schnittkurven (geometrischer Sinn der Ableitung):



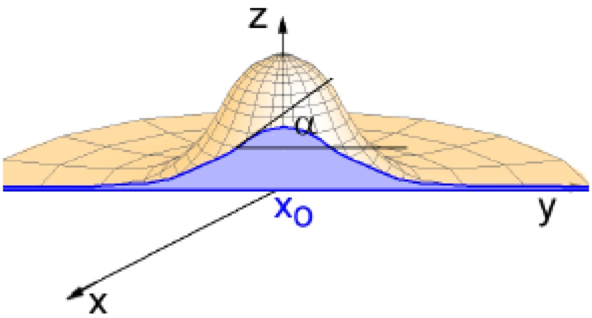
Die Steigung der Schnittkurven lässt sich leicht ermitteln.
Mit konstantem y ist die Schnittkurve eine Funktion von x. ***z=z(x)***

Den Anstieg erhält man aus der Ableitung.
Um anzudeuten, dass die ursprüngliche Funktion auch von y abhing, hier aber nur der Anstieg bezüglich z(x) berechnet wird, steht statt des Zeichens **d** das Zeichen ¶

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right]$$

mit einem konstanten y (z.B. y = y_0) erhalten wir die partielle Ableitung nach x:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{\left(1 + x^2 + y^2\right)^2}}$$



Mit konstantem x ist die Schnittkurve eine Funktion nur von y. ***z=z(y)***

Den Anstieg der Schnittkurve erhält man wiederum aus der Ableitung.

mit einem konstanten y (z.B. x = x_0) erhalten wir die partielle Ableitung nach y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{1+x^2+y^2}\right] = -\frac{2y}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

- **Möglich:**
  Was eben an einer Funktion mit 2 Variablen (x, y) gezeigt wurde, ist auch an einer Funktion mit 3 Variablen (x, y, z) möglich. Formal sollte es keine Probleme bereiten den Formalismus zu übertragen, allein die Anschaulichkeit leidet !

- **Bezeichnung:**
  Häufig anzutreffen ist eine vereinfachte Bezeichnungsweise für die partiellen Ableitungen nach x, y bzw. z: $\frac{\partial}{\partial x} = f_x; \quad \frac{\partial}{\partial y} = f_{y;} \quad \frac{\partial}{\partial z} = f_z$

Mehrfache partielle Ableitungen:

- da die partiellen Ableitungen selbst wieder Funktionen sind, ist eine erneute Ableitung dieser Ableitungen problemlos möglich. Dabei kann mehrfach nach der gleichen Variablen abgeleitet werden, es können aber auch „gemischte“ Ableitungen auftreten:

Beispiel: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\right)$ **oder** $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{xy}$

Dabei ist beim „Ausrechnen“ der Ableitung die Reihenfolge der Abarbeitungsschritte zu beachten!
Im angeführten Beispiel wird zuerst nach y differenziert, dann nach x.

Die Indexkette wird von rechts nach links abgearbeitet!