

ÜBUNGSAUFGABEN (IX)

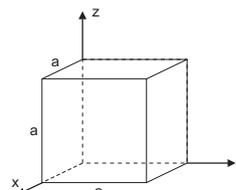
(Besprechung am Mittwoch, 21.12.2011)

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Gegeben ist ein Würfel homogener Dichte mit Masse m und Kantenlänge a .

- a) Zeigen Sie, dass der Trägheitstensor des Würfels bzgl. des Ursprungs des dargestellten Koordinatensystems gegeben ist durch

$$\underline{\underline{\Theta}} = m a^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



- b) Eine der Hauptträgheitsachsen des Tensors verläuft durch Koordinatenursprung und Körperschwerpunkt. Welches physikalische Argument belegt das? Berechnen Sie die Trägheitsmomente bzgl. dieser Achse sowie bzgl. den dazu senkrechten Achsen.
- c) Stellen Sie die Eigenwertgleichung für den Tensor aus (a) auf und zeigen Sie, dass die Trägheitsmomente aus (b) die Gleichung erfüllen.

Hinweis: Das Trägheitsmoment für *alle* Achsen durch den Würfelschwerpunkt ist $\Theta_S = m a^2 / 6$.

Aufgabe 2: (3 Punkte)

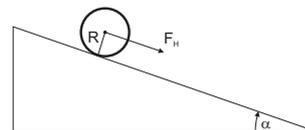
Eine ruhender, $L = 10$ m hoher Holzmast wird aus seiner Verankerung gelöst und fällt nach einiger Zeit aus der senkrechten Position parallel auf den Boden, ohne dass sein Fuß den Kontakt zum vorherigen Verankerungspunkt verloren hat. Wie groß ist die Geschwindigkeit v seines Schwerpunkts beim Aufprall?

Hinweis: Der Durchmesser d des Holzmasts kann wegen $d \ll L$ bei der Berechnung des Trägheitsmoments vernachlässigt werden.

Aufgabe 3: (4 Punkte)

Ein Hohlzylinder mit Radius R und Masse M rollt eine schiefe Ebene herunter (siehe Skizze). Wie groß ist der zurückgelegte Weg s des anfangs ruhenden Zylinderschwerpunkts als Funktion der Zeit t ? Berechnen Sie dazu die Beschleunigung a des Schwerpunkts auf zwei unterschiedlichen Wegen:

- a) mittels des Energieerhaltungssatzes und
- b) aus dem am Zylinder angreifenden Drehmoment.



Aufgabe 4: (5 Punkte)

Die Periodendauer T_E der Erdrotation vergrößert sich pro Jahr durchschnittlich um $\Delta T_E = 16 \mu\text{s}$. Die damit verknüpfte Änderung des Eigendrehimpulses L_E wird auf den Bahndrehimpuls L_M des Mondes übertragen.

- a) Wie groß ist die jährliche Änderung Δr des Mond-Erde-Abstands r ? Bestimmen Sie dazu die Ableitung des Bahndrehimpulses L_M nach r und nähern Sie die Bahndrehimpulsänderung zu $\Delta L_M \cong (dL_M/dr) \Delta r$.

b) Beschreiben Sie, auf welche Weise die Kopplung der beiden Drehimpulse zustande kommt.

Zahlenwerte: $r = 384400$ km; Erdmasse $M = 5.974 \cdot 10^{24}$ kg; Trägheitsmoment der Erde $\Theta_E = 8.021 \cdot 10^{37}$ kg m²; Mondmasse $m = 0.01228 M$.