

ÜBUNGSAUFGABEN (XII)

(Besprechung am Mittwoch, 25.01.2012)

Aufgabe 1: (3 Punkte)

Aus einem Wasserhahn trete ein Wasserstrahl kreisförmigen Querschnittes (Radius r_0) in einer Höhe h_0 mit einer Geschwindigkeit v_0 aus. Beim Herabfallen des Wassers im Schwerfeld der Erde bleibt ein geschlossener stationärer Strahl erhalten, der sich aber nach unten verjüngt. Warum? Berechnen Sie den Strahlradius r in Abhängigkeit von der Höhe h . Was ist r/r_0 nach einer Fallhöhe von $h_0 - h = 0.5$ m bei $v_0 = 1$ m/s?

Aufgabe 2: (5 Punkte)

In einer waagrecht stehenden Ablaufrinne mit parabolischem Profil, $y(x) = x^2/C$ mit $C = 5$ cm, und Länge $L = 5$ m steht nach einem heftigen Regenguß ($t = 0$ s) das Wasser $h_0 = 10$ cm hoch. Durch ein Loch mit Radius $r = 1$ cm im Boden der Rinne läuft das Regenwasser in die Kanalisation ab. Bestimmen Sie die Höhe $h(t)$ des Wasserstands als Funktion der Zeit t ohne Berücksichtigung von Reibung und berechnen Sie dann die Dauer T für den vollständigen Ablauf.

Anleitung: Bestimmen Sie die zeitliche Ableitung dV/dt des Wasservolumens $V(h)$ in der Rinne sowie den Volumenfluß $Q(h)$ des ablaufenden Wassers.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Eine inkompressible Flüssigkeit rotiert in einem zylindrischen Gefäß mit Radius r um seine z -Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Bestimmen Sie die stationäre Gestalt $z(x, y)$, welche die Oberfläche im Schwerfeld mit der Beschleunigung $\vec{g} = (0, 0, -g)$ einnimmt. Gehen Sie dazu aus von der Eulerschen Gleichung in der Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \frac{P}{\rho} + \vec{g}.$$

Anleitung: In Zylinderkoordinaten ist $\vec{r} = (x, y, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$. Berechnen Sie damit die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und stellen Sie dann die drei Differentialgleichungen unter Benutzung von Stationarität und Inkompressibilität auf. Lösen Sie so $P(x, y, z)$ und benutzen Sie schließlich die Oberflächenbedingung $P = \text{const}$ zur Ableitung von $z(x, y)$.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

In der Hydrodynamik wird von der Identität

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

Gebrauch gemacht (z.B. Eulersche Gleichungen). Beweisen Sie die Relation durch explizites Berechnen der Komponenten.