Heften Sie die Blätter zur Abgabe zusammen und tragen Sie auf **jedem** Blatt die **Nummer ihres Tutoriums und ihre Namen** ein. Rechnen Sie die Aufgaben zusammen mit ihrem Übungspartner und geben Sie eine Lösung zusammen ab. Das Aufgabenblatt müssen Sie nicht mit abgeben.

Abgabe bis	Fr, 26. Oktober, 13:00 Uhr im Erdgeschoss von Geb. 30.23 (Physikhochhaus)
Besprechung	Mi, 31. Oktober

Lösen Sie die Aufgaben so, dass der Rechenweg für ihren Tutor klar wird. Ergebnisse ohne korrekte Einheiten führen zu einem Punktabzug. Geben Sie nur signifikante Nachkommastellen im Endergebnis an (orientieren Sie sich an der Genauigkeit der gegebenen Größen).

Aufgabe 1: *Statistische und systematische Unsicherheiten* **2 Punkte**

Die Regeln der Fehlerfortpflanzung gelten für statistische und systematische Unsicherheiten bei einer Messung, allerdings dürfen beide Typen von Unsicherheiten nicht gemischt werden. Statistische Unsicherheiten erkennt man daran, dass sie sich durch weitere Messungen unter identischen Bedingungen im Prinzip beliebig verkleinern lassen. Systematische Unsicherheiten werden durch Wiederholung der Messung nicht kleiner. Man ist bei ihnen oft auf Schätzungen angewiesen, es handelt sich um "Bekannte Unbekannte" (siehe auch `http://de.wikipedia.org/wiki/There_are_known_knowns`). Beurteilen Sie ob es sich bei den folgenden Beispielen um statische oder systematische Unsicherheiten handelt und erläutern Sie ihr Urteil kurz.

(a) Sie wollen die mittlere Zuschneidlänge einer Schneidmaschine in einer Produktionsstraße für Streichhölzer bestimmen. Sie vermessen hundert Streichhölzer aus der Produktion und stellen fest, dass deren Längen von Streichholz zu Streichholz leicht schwanken.

(b) Sie vermessen die Längen der Streichhölzer mit zwei Messgeräten A und B. Sie stellen dabei fest, dass Messgerät B im Mittel 0.07 mm mehr anzeigt als Messgerät A.

(c) Sie hatten mit der Messung der Streichhölzer am Morgen angefangen, als die Luftfeuchtigkeit gering war. Im Lauf des Tages wurde es schwül in ihrem Labor. Im Nachhinein stellen Sie fest, dass die Streichhölzer die Sie zur Mittagszeit vermessen haben, im Mittel 0.12 mm länger sind als jene die Sie am Morgen vermessen haben. Sie vermuten dass es an der Luftfeuchtigkeit lag aber haben die Streichhölzer nicht mehr.

(d) Um die mittlere Zerfallsrate (Zerfälle pro Zeit) von radioaktivem Tritium ^3H zu bestimmen, zählen Sie die Zerfälle, die sich während einer Minute ereignen.

Aufgabe 2: *Fehlerfortpflanzung I* **1 Punkt**

Die allgemeine Fehlerfortpflanzungsformel für eine Funktion $y(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ lautet $\sigma_y^2 = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 \sigma_{x_j}^2$, wobei $\partial y / \partial x_j$ die partielle Ableitung nach von y nach x_j ist (alle anderen Variablen werden für diese Ableitung als konstant betrachtet). Leiten Sie aus der allgemeinen Formel folgende nützliche Spezialfälle ab (a, b, c sind konstant):

(a) $\sigma_y^2 = (a\,\sigma_{x_1})^2 + (b\,\sigma_{x_2})^2$ für $y = a\,x_1 + b\,x_2 + c$.

(b) $\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 = \left(a\,\frac{\sigma_{x_1}}{x_1}\right)^2 + \left(b\,\frac{\sigma_{x_2}}{x_2}\right)^2$ für $y = c\,{x_1}^a\,{x_2}^b$.

Aufgabe 3: *Fehlerfortpflanzung II* **4 Punkte**

Die Physiker Michael, Jana und Achim machen während einer Radtour eine Pause und überlegen wie weit sie gefahren sind. Da sie kein GPS dabei haben, müssen sie sich auf ihre Uhren und Tachometer verlassen.

(a) Die erste halbe Stunde – man einigt sich dass es vielleicht auch eine Minuten mehr oder weniger war – waren die Drei mit konstanter Geschwindigkeit unterwegs gewesen. Die Tachos hatten einheitlich 15 km/h angezeigt.

(b) Dann ging es einen Hang mit konstantem Gefälle hinunter. Nach drei Minuten und 27 Sekunden gleichmäßig beschleunigter Fahrt ging es wieder in die Horizontale. Über die Zeit bestand diesmal Einigkeit, aber die durchgeschüttelten Tachos hatten 35 km/h, 33 km/h und 36 km/h angezeigt, obwohl alle gleichzeitig am Ende des Hanges angekommen waren.

(c) Etwa eine Minute – die drei nehmen 10 % Unsicherheit für diese Zeitspanne an – rollten sie in gleichmäßig verzögerter Bewegung aus. Am Ende dieser Zeit hatten sich die Tachos beruhigt und alle 21 km/h angezeigt.

(d) Die Drei fuhren mit dieser konstanten Geschwindigkeit weiter. Nach genau 10 Minuten stoppten sie für eine Pause und begannen über die zurückgelegte Strecke zu diskutieren.

Berechnen Sie die zurückgelegten Teilstrecken und die Unsicherheiten darauf, so wie die Gesamtstrecke inklusive Unsicherheit. Ignorieren Sie den Unterschied zwischen statistischen und systematischen Fehlern für diese Aufgabe.

Aufgabe 4: *Mittelwert und Standardabweichung* **3 Punkte**

Statistik wird aus Zeitmangel oft ohne theoretischen Hintergrund gelehrt. Alle üblichen Formeln lassen sich aber aus grundlegenden Prinzipien herleiten. Die Formeln für Mittelwert $\langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j$ und Standardabweichung $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(x_j - \langle x\rangle)^2}$ ergeben sich z.B. unter Annahme dass die Messergebnisse eine Normalverteilung haben

$$P(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

und dass die besten Schätzer für μ und σ die Gesamtwahrscheinlichkeit

$$P_{\text{tot}} = P(x_1;\mu,\sigma)\, P(x_2;\mu,\sigma)\, \ldots\, P(x_{N-1};\mu,\sigma)\, P(x_N;\mu,\sigma) = \prod_{j=1}^{N} P(x_j;\mu,\sigma) \tag{2}$$

der beobachteten Messungen x_j maximieren (*Maximum-Likelihood-Prinzip*). Das Prinzip besagt, dass man unter vielen Modellen für die Beobachtungen dasjenige auswählen sollte, für das die beobachteten Werte am wahrscheinlichsten sind.

(a) Berechnen Sie mittels Fehlerfortpflanzung die Unsicherheit $\sigma_{\langle x\rangle}$ des Mittelwertes $\langle x\rangle$ wenn die Unsicherheit der Einzelmessung x_j die Standardabweichung σ_x ist.

(b) Berechnen Sie das Maximum von P_{tot} als Funktion von μ, wobei Sie σ und die x_j wie Konstanten behandeln. Sie erhalten die Formel für den Mittelwert.

(c) Berechnen Sie das Maximum von P_{tot} als Funktion von σ^2 (das ist kein Tippfehler), wobei Sie μ und die x_j wie Konstanten behandeln. Sie erhalten die Formel für die Standardabweichung bis auf einen Faktor der für große N gegen eins strebt. Den Faktor kann man ebenfalls herleiten, aber das sparen wir uns. Nur so viel: der Faktor muss korrigiert werden, weil wir so getan haben als wäre die Schätzung von σ unabhängig von der Schätzung von μ.

Hinweis: Wenn Sie noch Schwierigkeiten in der formalen Rechnung mit N Variablen haben, dann überzeugen Sie sich zunächst dass die Formeln für $N = 2$ gelten und verallgemeinern dann argumentativ.