Abgabe bis	Fr, 05. Dezember, 13:15 Uhr im Erdgeschoss von Geb. 30.23 (Physikhochhaus)
Besprechung	Mi, 10. Dezember

1. *Komplexe Zahlen* **(1 Punkt)**
   Benutzen Sie die Euler-Relation $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$ um zu zeigen, dass gilt:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

2. *Schwingung mit und ohne Dämpfung* **(4 Punkte)**
   Ein Fahrzeugrad der Gesamtmasse $m = 20$ kg sei an einer als masselos angenommenen Feder der Stärke $D = 2 \cdot 10^4$ Nm befestigt.
   (a) Wie bewegt sich das Rad, wenn es zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhelage mit einer Auslenkung von $a = 5$ cm losgelassen wird? Geben Sie die Bewegungsgleichung an und deren Lösung $x(t)$ an. Welche Eigenfrequenz ω_0 hat dieses System?
   (b) An der Feder wird nun ein zusätzlicher Schwingungsdämpfer angebracht. Wie groß muss der Reibungskoeffizient η dieses Dämpfers sein, damit der aperiodische Grenzfall errreicht wird? Nehmen Sie an, dass für die Reibungskraft $F_R = -\eta \cdot \dot{x}$ gilt.
   (c) Im Laufe der Zeit altert der Schwingungsdämpfer und die Dämpfungskonstante verringert sich auf den Wert $\eta' = 0,1\eta$. Geben Sie die Lösung $x(t)$ der Bewegungsgleichung für diesen Fall der schwachen Dämpfung an.

3. *Leistungsresonanz* **(3 Punkte)**
   Die Schwingung eines harmonischen Oszillators, der unter Einwirkung der periodischen Kraft $F(t) = F_0\sin(\omega t)$ erzwungene Schwingungen ausführt, ist gegeben durch $x(t) = A_0\sin(\omega t - \phi)$.
   (a) Bestimmen Sie zunächst die momentane Leistung $P(t) = F(t) \cdot v(t)$.
   (b) Bestimmen Sie nun die mittlere Leistungsaufnahme

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt \qquad \text{mit} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

   als Funktion von w. Benutzen Sie die Beziehungen

$$\int \sin(ax)\cos(ax)\,dx = \frac{1}{2a}\sin^2(ax) \qquad \text{und} \qquad \int \sin^2(ax)\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax).$$

   (c) Setzen Sie nun die Amplitude und die Phase

$$A_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} \qquad \text{und} \qquad \tan\phi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

   in den Ausdruck für $\bar{P}$ ein und zeigen Sie, dass bei $\omega = \omega_0$ die mittlere Leistungsaufnahme maximal wird. Benutzen Sie die Beziehung

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. *Drehimpulserhaltung* **(2 Punkte)**

Ein Schlittschuhläufer mit Masse $m = 75$ kg bewegt sich geradlinig mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 10$ m/s, ergreift dabei mit ausgetrecktem Arm ($d_1 = 1$ m) einen Pfahl, lässt sich herumschleudern, zieht sich auf einen Abstand von $d_2 = 0{,}5$ m an der Pfahl heran, lässt diesen wieder los und fährt in ursprünglicher Richtung weiter.

   (a) Berechnen Sie den Drehimpuls L für die Bewegung des Schlittschuhläufers um den Pfahl.

   (b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_2 nach dieser Aktion.

   (c) Vergleichen Sie die kinetischen Energien vor und nach der Aktion und begründen Sie die Differenz.

Viel Spaß und viel Erfolg!

8,5

Aufgabe 1.

Wir wissen $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \quad (1)$$

$$e^{i\alpha+i\beta} = e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\sin\beta\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$= \underbrace{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}_{\text{Reell}} + i\underbrace{(\sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta)}_{\text{Imaginär}}$$

$$(1): \; = \underbrace{\cos(\alpha+\beta)}_{Re(1)} + i\underbrace{\sin(\alpha+\beta)}_{Im(1)}$$

Also $Re(1) = \text{Reell}$ $\qquad Im(1) = \text{Imaginär}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta \quad ✓ \quad 1$$

2.

a) $D = 2\cdot 10^4\, Nm$ $\qquad m = 20kg$ $\qquad a = 5cm = 0{,}05m$

$$F = m\cdot a = -D\cdot x$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

Ansatz: $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

mit $x_0 = a = 0{,}05\,m$

$\omega^2 = \frac{D}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\Rightarrow x(t) = \cancel{0{,}05\,m}\ a \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}} \cdot t\right)$ ✓

$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 31{,}62\,\frac{1}{s}$ ✓

b) $F_R = -\eta \cdot \dot{x}$ aperiod. grenzfall $\omega_0 = \gamma$

$m\ddot{x} = -D \cdot x - \eta \cdot \dot{x}$ $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$ $2\gamma = \frac{\eta}{m}$

$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Ansatz

$C\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma C\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 C e^{\lambda t} = 0$

$Ce^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0$

$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

aperiod. GF $\gamma^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \frac{\eta^2}{4m^2} = \frac{D}{m}$

$\eta = \sqrt{D \cdot 4m} = \sqrt{20kg \cdot 4 \cdot 20000\,Nm} = 1265\,\frac{kg}{s}$ ✓

c) $\eta' = 0{,}1\,\eta^* = 126{,}5\ \frac{kg}{s}$

Bei schwacher Dämpfung $\gamma < \omega_0$

(fast) richtig:

$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$

$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$
mit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ und
$A = x(0)$
−0,5 P.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$= a \cdot e^{-\left(\frac{\eta}{2m}\right)t} \cdot \cos(\omega t)$

$= 0{,}05\,m \cdot e^{-\left(\frac{126{,}5}{2 \cdot 20\,kg}\right)t} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{20000\,N/m}{20\,kg}}\,t\right)$

$\cdot \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\omega^2}}$

$+\varphi$

5 2,5

3. $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ $\qquad x(t) = A_0 \sin(\omega t - \phi)$

(a) $v(t) = \dot{x}(t) = A_0 \omega \cos(\omega t - \phi)$

$P(t) = F_0 \sin(\omega t) \cdot A_0 \omega \cos(\omega t - \phi)$

$= F_0 A_0 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t - \phi)$ ✓

(b) $\overline{P} = \frac{1}{T} \int_0^T F_0 A_0 \omega \sin(\omega t) \cos(\omega t - \phi)\, dt$

$= \frac{1}{T} \int_0^T F_0 A_0 \omega \sin(\omega t) \left[\cos(\omega t) \cdot \cos(-\phi) - \sin(\omega t) \sin(-\phi)\right]$

$= \frac{F_0 A_0 \omega}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin^2(\omega t) \sin(\phi)\, dt$

$= \frac{F_0 A_0 \omega}{T} \cos\phi \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t)\, dt + \frac{F_0 A_0 \omega}{T} \sin(\phi) \int_0^T \sin^2(\omega t)\, dt$

$= \frac{F_0 A_0 \omega}{T} \cos\phi \left[\frac{1}{2\omega} \sin^2(\omega t)\right]_0^T + \frac{F_0 A_0 \omega}{T} \sin\phi \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{4\omega} \sin(2\omega t)\right]_0^T$

$= 0 + \frac{F_0 A_0 \omega^2}{2\pi} \sin\phi \left[\frac{\pi}{\omega} - 0\right]$

$= \frac{1}{2} \frac{F_0 A_0 \omega}{1} \sin\phi = \frac{1}{2} \sin\phi\, F_0 A_0 \omega = \overline{P}(\omega)$ ✓

(c) $\frac{1}{2} \sin\phi \frac{F_0^2 \omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

(1) $$\bar{P}(\omega) = \frac{1}{2} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right) \frac{F_0^2\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$$

$$\left(= \frac{1}{2} \frac{\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2}} \cdot \frac{F_0^2\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}} \right)$$

Grenzwertbetrachtung (1)

~~$\bar{P}(\omega) =$~~

(1) wird maximal für $\sin(x) = 1$ und falls der Nenner $\frac{F_0^2\omega}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\delta\omega)^2}}$ möglichst klein wird

für $\omega \to \omega_0$ ist $\lim\limits_{\omega\to\omega_0} \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = \frac{1}{2}\pi$

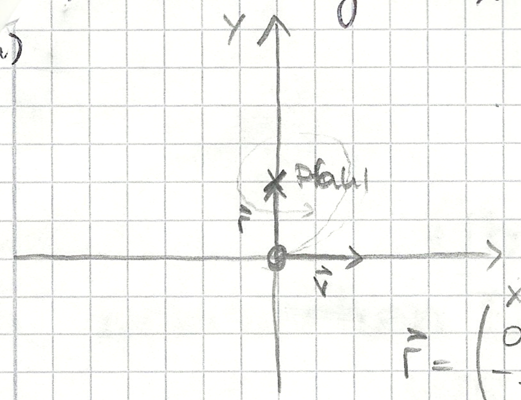
dann ist $\sin(\frac{1}{2}\pi) = 1$ maximal

~~Der~~ Der Bruch ist für $\omega \to \omega_0$ auch maximal, da der Betrag des Nenner somit maximal klein ist. ✓

3

.) $m = 75\,kg$ $\quad v_1 = 10\,\frac{m}{s}$ $\quad d_1 = 1m$

a)



$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 10\,\frac{m}{s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{r} \times \vec{v} = 1m \cdot 10\,\frac{m}{s}$$

$$L = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$|L| = \cancel{m \cdot 1m \cdot v_1} = 75\,kg \cdot 1m \cdot 10\,\frac{m}{s} = 750\,kg\,\frac{m^2}{s}$$

b) $d_2 = 0{,}5m$

Drehimpulserhaltung $\quad 750\,kg\,\frac{m^2}{s} = 75kg \cdot 0{,}5m \cdot V_2$

$$V_2 = 20\,\frac{m}{s}$$

c) $E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2$ $\quad E_2 = \frac{1}{2} m V_2^2$

$= 3750\,J$ $\quad E_2 = 15000\,J$

$\Rightarrow$ 4-fache Energie

Die Energie, die der Läufer einsetzt um sich näher an den Pfahl zu ziehen steckt danach zusätzlich in seiner kin. Energie.

2