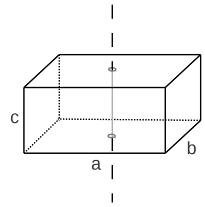
Abgabe bis	Fr, 12. Dezember, 13:15 Uhr im Erdgeschoss von Geb. 30.23 (Physikhochhaus)
Besprechung	Mi, 17. Dezember

1. *Drehmomente* **(3 Punkte)**
   An den Enden einer Schnur, welche über eine Umlenkrolle geführt ist, hängen zwei Massen $m_1 = 2$ kg und $m_2 = 3$ kg. Die Rolle ist eine homogene Scheibe der Masse $m_R =$ 1,5 kg, mit dem Radius $r = 8$ cm und mit dem Trägheitsmoment $I_s = 0,5 \cdot m_R \cdot r^2$.
   (a) Mit welcher Beschleunigung setzen sich die Gewichte in Bewegung?
   (b) Welche Kraft wirkt auf die Aufhängung der Rolle?
   (c) Welcher Bruchteil der gesamten Bewegungsenergie entfällt auf die Rotationsenergie der Rolle?

2. *Trägheitsmoment* **(1 Punkt)**
   Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines homogenen Quaders mit den Kantenlängen a, b, c für eine Rotationsachse die senkrecht auf seiner Oberflche steht und durch den Schwerpunkt geht, so wie in der Abbildung dargestellt.



3. *Trägheitsmoment und Drehimpuls* **(2 Punkte)**
   Eine horizontale Scheibe mit der Masse M und dem Radius R ist so angebracht, dass sie reibungslos um eine vertikale Achse durch den Mittelpunkt rotieren kann. Auf dieser zunächst ruhenden Scheibe stehe eine Person der Masse m. Nun beginnt diese Person mit der Geschwindigkeit v entlang eines konzentrischen Kreises im Abstand r zum Mittelpunkt der Scheibe zu laufen. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω_S dreht sich die Scheibe? Benutzen Sie für die Trägheitsmomente der Scheibe bzw. der Person die Ausdrücke: $I_S = \frac{1}{2}MR^2$ bzw. $I_P = mr^2$.

4. *Rollen auf schiefer Ebene* **(1 Punkt)**
   Ein Vollzylinder und ein dünnwandiger Hohlzylinder mit gleicher Masse und gleichen Aussenradien ($R =$ 0,1 m) rollen mit gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit $\omega_0 = 15$ s^{-1} auf einer horizontalen Ebene und danach eine schiefe Ebene hinauf. Bei welcher Höhe h_V bzw. h_H kehren sie jeweils um? Vernachlässigen sie die Reibung.

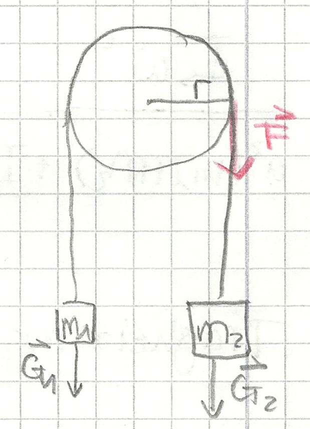
5. *Steinerscher Satz* **(3 Punkt)**
   (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Steinerschen Satzes das Trägheitsmoment einer homogenen ($\rho(\vec{r})$ = const) Kugel mit der Masse M und dem Radius R bezüglich einer Achse, die tangential zur Kugeloberfläche verläuft. Zeigen Sie zunächst, dass das Trägheitmoment einer homogenen Kugel um eine Achse durch den Mittelpunkt durch $I = \frac{2}{5}MR^2$ gegeben ist. Danach können Sie das Trägheitsmomet brzüglich der tangentialen Achse bestimmen.
   (b) In welcher Höhe muss eine Billardkugel (Radius $R =$ 2,5 cm) waagerecht angestossen werden, damit sie von Anfang an, ohne zu gleiten, auf dem Tische rollt? Vernachlässigen Sie die Reibung.

Viel Spaß und viel Erfolg!

Übungsblatt 8 (5)

1) $m_1 = 2kg$ $m_2 = 3kg$ $m_R = 1{,}5kg$ $r = 8cm = 0{,}08m$

$I_s = 0{,}5\, m_R \cdot r^2$



a)

$\vec{G_1} = m_1 \cdot g = 19{,}62 N$

$\vec{G_2} = m_2 \cdot g = 29{,}43N$

$|\vec{G_1} - \vec{G_2}| = 9{,}81 N = F$ (✓)

$D = r \times F$ $|D| = r \cdot F = 0{,}7848 Nm$

$I_s = 0{,}5 \cdot 1{,}5kg \cdot (0{,}08m)^2 = 0{,}0048\ kgm^2$

$D = I_s \cdot \dot{\omega}$ $\dot{\omega}$ = Winkelbeschl.

$\frac{D}{I_s} = \dot{\omega} = 163{,}5 \frac{m^2}{s^2}$

$\dot{\omega} \cdot r = a = 13{,}08 \frac{m}{s^2}$ f $a \geq 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ macht keinen Sinn!

b) $\vec{G_R} = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot g = 63{,}765 N$ (f)

$- a \cdot (m_1 - m_2)$

c)

$E_{rot} = \frac{1}{2} I_s \omega^2 = \frac{1}{2} I_s (\dot{\omega} \cdot t)^2$

$E_{kin_1} = \frac{1}{2} m_1 v^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot (a \cdot t)^2$

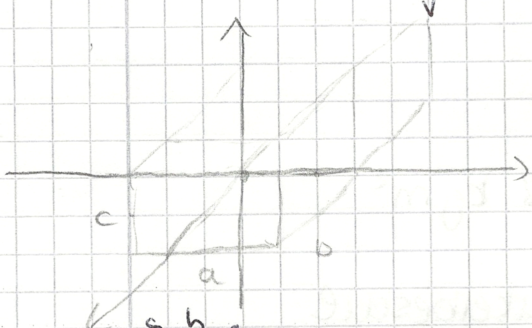
$E_{kin_2} = \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot (a \cdot t)^2$ ✓

$$\frac{E_{rot}}{E_{m_1}+E_{m_2}+E_{rot}} = \frac{\frac{1}{2} I_s (\dot{\omega} t)^2}{\frac{1}{2} m_1 (a \cdot t)^2 + \frac{1}{2} m_2 (a \cdot t)^2 + \frac{1}{2} I_s (\dot{\omega} t)^2}$$

$$= \frac{I_s \dot{\omega}^2}{a^2 (m_1+m_2) + I_s \dot{\omega}^2} = 0{,}13$$ ✓ 1,5

2. Trägheitsmoment

$$\int r^2 \, dm = \rho \int_V r^2 \, dv \qquad r^2 = x^2 + y^2$$



$$dv = dx\, dy\, dz$$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{a \cdot b \cdot c}$$

$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2 + y^2 \, dx\,dy\,dz = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy\,dz$$

$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{a^3}{4}}{3} \cdot 2 + y^2 \cdot a \; dy\,dz = \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \left[\frac{a^3}{6} \cdot y + \frac{y^3}{3} \cdot a \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz$$

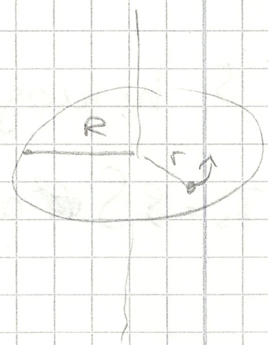
$$= \rho \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{a^3 b}{12} + \frac{b^3 a}{12} \, dz = \rho \left[\frac{a^3 b}{12} \cdot z + \frac{b^3 a}{12} z \right]_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} = \rho \left[\frac{a^3 bc}{12} + \frac{b^3 ac}{12} \right]$$

$$= \frac{M}{abc} \left[\frac{a^3 bc}{12} + \frac{b^3 ac}{12} \right] = \frac{M}{12} \left(a^2 + b^2 \right)$$ ✓

1

3.

$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_p = 0$



$I_s = \frac{1}{2} MR^2 \quad I_p = mr^2$

$\omega_p = \frac{v}{r} \qquad L_p = mr^2 \cdot \underbrace{\frac{v}{r}}_{\omega_p} = mrv \qquad \vec{\omega}_p = \vec{\omega}_s + \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \neq \frac{v}{r}$

$L_s = I_s \cdot \omega_s$ ✓ $\qquad I_s \omega_s = mrv$

$$\omega_s = \frac{mrv}{\frac{1}{2} MR^2} = \frac{2mrv}{MR^2}$$

0,5

$$= \frac{mrv}{\frac{1}{2} MR^2 + mr^2}$$

4.

Vollz.: $I_V = \frac{1}{2} mR^2 \qquad R = 0{,}1\,m$

Hohlz.: $I_H = mR^2 \qquad \omega_0 = 15\,\frac{1}{s}$

$E_{rot_V} = \frac{1}{2} I_V \omega_0^2 \qquad E_{pot_V} = m \cdot g \cdot h_V$ ✓

$E_{rot_H} = \frac{1}{2} I_H \omega_0^2 \qquad E_{pot_H} = m \cdot g \cdot h_H$ ✓

Translations-energie $\hat{=} E_{kin}$ vergessen!

$\frac{1}{2} I_V \omega_0^2 = m \cdot g \cdot h_V \qquad \frac{1}{2} I_H \omega_0^2 = m \cdot g \cdot h_H$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mR^2\right) \omega_0^2 = mgh_V \qquad \frac{1}{2} mR^2 \omega_0^2 = mgh_H$

$\frac{\frac{1}{4} R^2 \omega_0^2}{g} = h_V \qquad \frac{\frac{1}{2} R^2 \omega_0^2}{g} = h_H$

$= 0{,}06\,m$ f $\qquad = 0{,}11\,m$ f $\qquad$ 0,5

5. homogene Kugel

$I_s = \rho \int a^2 dV \qquad a^2 = r^2 \sin^2\vartheta$

$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$

$$= \rho \int_{r=0}^{R} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^4 \sin^3\vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{1}{5} R^5 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin^3\vartheta \, d\vartheta$$

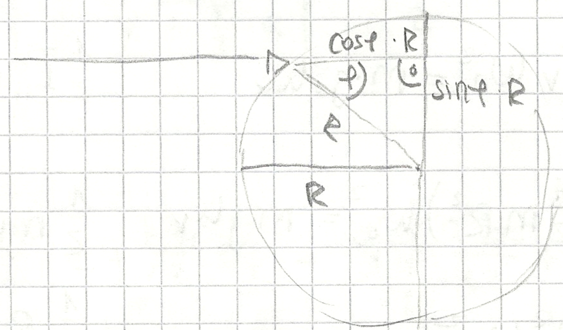
$$= \frac{2}{5} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{2}{5} R^2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{5} M R^2$$ ✓

Steinerscher Satz

$$I_B = I_s + R^2 M = \frac{2}{5} M R^2 + R^2 M$$

$$= \frac{7}{5} M R^2$$ ✓

b)



$L = m \cdot r \cdot v \cdot \sin\varphi$

L_{max} für $\varphi = 90°$

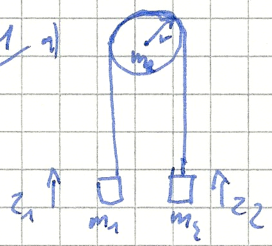
$\Rightarrow \cos\varphi \cdot R = 0$

$\Rightarrow$ Stoß erfolgt tangential bei $h = 5cm = 2R$ f

7,5

Lösungen

1/ a)



$$\frac{dE}{dt} = 0 \qquad \dot{z} = \frac{dz}{dt} \qquad \ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$E = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{z}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}_2^2 + \frac{1}{2} I_s \omega^2$$

$$z = z_1 = -z_2 \,, \quad \omega = \frac{\dot{z}}{r} \,, \quad I_s = \frac{1}{2} m_R \cdot r^2$$

$$E = m_1 g z - m_2 g z + \frac{1}{2} m_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{z}^2 + \frac{1}{4} m_R \dot{z}^2$$

$$\frac{dE}{dt} = (m_1 - m_2) g \cancel{\dot{z}} + (m_1 - m_2) \cancel{\dot{z}} \ddot{z} + \frac{1}{2} m_R \cancel{\dot{z}} \ddot{z} = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_R} \approx 1{,}71 \frac{m}{s^2}$$

b) $F_A = (m_1 + m_2 + m_R) \cdot g - (m_2 - m_1) \cdot \ddot{z}$

$$= (m_1 + m_2 + m_R) \cdot g - (m_2 - m_1) \cdot \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} m_R}$$

$$= 63{,}77 \frac{kg \cdot m}{s^2} - 1{,}71 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 62{,}06\, N$$

c) s. Blatt

2/ s. Blatt

3/

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_p = 0$$

$$\vec{L}_s = I_s \omega_s = \frac{1}{2} m R^2 \omega_s$$

$$\vec{L}_p = I_p \omega_p = m r^2 \omega_p$$

$$\omega_p = \omega_s + \omega_v = \omega_s + \frac{r \cdot v}{r^2}$$

$$\vec{L} = 0 = I_s \omega_s + I_p (\omega_s + \omega_v)$$

$$\Rightarrow \omega_s = - \frac{I_p}{(I_s + I_p)} \omega_v = \frac{m \cdot r \cdot v}{\frac{1}{2} M R^2 + m r^2}$$

Lösungen

4)

$$E_{kin} + E_{rot} = E_{pot}$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$\hat{=} \frac{m \cdot r^2}{2} = I$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}{m \cdot g}$$

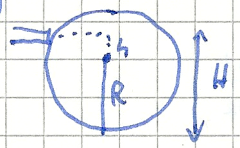
$$h_{hohl} = 0{,}23\,m$$

$$h_{voll} = 0{,}17\,m$$

5)

a) s. Blatt

b)



$$L = I \dot{\omega} = F \cdot H = D$$

$$I = \frac{7}{5} M R^2$$

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{2\pi/\omega} \rightarrow \omega = \frac{v}{R} \rightarrow \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{R}$$

$$D = F \cdot H = M \cdot a \cdot H = M \cdot \dot{v} \cdot H = \frac{7}{5} M R^2 \frac{\dot{v}}{R} = \frac{7}{5} R$$