| | |
|---|---|
| Abgabe bis | Fr, 09. Januar, 13:15 Uhr im Erdgeschoss von Geb. 30.23 (Physikhochhaus) |
| Besprechung | Mi, 14. Januar 2015 |

1. *Corioliskraft* **(1 Punkt)**
   In der Schlacht um die Falklandinseln im Jahre 1914 verfehlten die Geschosse der britischen Artillerie ihre Ziele weit, weil die Berechnungen auf Seeschlachten auf der Nordhalbkugel basierten. Die Falklandinseln befinden sich auf der Südhalbkugel. Erklären Sie die Ursache des Problems.

2. *Das 3. Kepler'sche Gesetz* **(1 Punkt)**
   Wie lang ist das Jupiterjahr, also die Zeit die Jupiter benötigt um die Sonne einmal vollständig zu umkreisen? Der mittlere Abstand des Jupiter zur Sonne beträgt 5,07 au. Die Astronomische Einheit au entspricht der Länge der großen Halbachse der elliptischen Umlaufbahn der Erde um die Sonne.

3. *Gravitationsfeld* **(3 Punkte)**
   Zwei identische Massepunkte, jeweils mit der Masse $m$, befinden sich auf der $x$-Achse bei $x = +x_0$ und $x = -x_0$.

   (a) Bestimmen Sie eine Formel für das von diesen beiden Massepunkten bewirkte Gravitationsfeld für Punkte auf der $y$-Achse, d. h. schreiben sie $\vec{g}$ in Abhängigkeit von $y$, $m$, $x_0$ etc.

   (b) In welchem Punkt (oder welchen Punkten) auf der $y$-Achse hat der Betrag von $\vec{g}$ einen Maximalwert und welchen Wert hat er dort? *Hinweis:* Verwenden Sie die Ableitung $\mathrm{d}\vec{g}/\mathrm{d}y$.

4. *Strahlungsleistung der Sonne* **(5 Punkte)**
   Die Strahlungsleistung der Sonne wird durch Kernfusion gewonnen. Bevor dies von den Wissenschaftlern erkannt wurde, gab es eine Vielzahl von Hypothesen aus welcher Quelle die Energie stammen könnte. Hermann von Helmholtz (1821-1894) nahm hypothetisch an, dass die Strahlungsleistung dadurch aufgebracht werde, dass die Sonne kontrahiere. Nehmen Sie im folgenden an, die Sonne sei ein Gasball homogener Dichte.

   (a) Berechnen Sie die jährliche Änderung des Radius, die notwendig ist, um die Strahlungsleistung der Sonne von $P = 3,82 \cdot 10^{26}$ W frei zu setzen. Der Radius und die Masse der Sonne seien $R = 6,69 \cdot 10^8$ m bzw. $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg.

   *Hinweis:* Berechnen Sie zunäachst den "gravitativen Energieinhalt" einer homogenen Kugel mit Radius $R$ und Masse $M$. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Kugel sukzessive aus konzentrischen Kugelschalen aufgebaut wird. Schrittweise wird einer bereits entstandenen Teil-Kugel mit der Masse $m$ und dem Radius $r$ die weitere Masse $dm$ in Form einer sehr dünnwandigen Kugelschale aufgelegt. Diese Kugelschale hat den Radius $r$, die Dicke $dr$ und die Masse $dm$, welche aus dem Unendlichen bis zur Oberfläche der bereits vorhandenen Kugel heran transportiert wird. Dabei wird die Energie $dW$ frei. Wenn die Kugel mit dem Radius $R$ aus Kugelschalen vollkommen aufgeschichtet ist, hat sie die Masse $M$. Die Summe aller $dW$ (d.h. das Integral) ist der "gravitative Energieinhalt" der Kugel. Mit Hilfe dieser Formel können Sie die bei der Kontraktion einer Kugel freigesetzte Energie berechnen.

   (b) Die Sonne rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega$. Durch die Kontraktion verändert sich ihr Trägheitsmoment $I$ um $\Delta I$. Auf Grund der Drehimpulserhaltung verändert sich die Winkelgeschwindigkeit um $\Delta\omega$. Berechnen Sie die daraus resultierende Veränderung der Rotationsenergie. Führt diese Änderung zu einer merklichen Beeinträchtigung des Resultats von (a)? Die Umdrehungsdauer der Sonne sei $T = 25{,}4$ d.

## Guten Rutsch ins neue Jahr 2015!

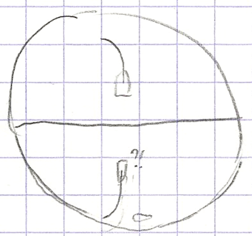
# Aufgabe 1

4,5

Großbritanien liegt näher am Äquator als die Falkland-Inseln.
Wenn die Berechnungen in Großbritanien stattgefunden haben, war die Wirkung der Corioliskraft höher als an den F.-Inseln.
Die brit. Artillerie ist von einer festen Auslenkung ausgegangen, die aber in Wirklichkeit unterschiedlich war.

(✓) 0,5

2. Möglichkeit:
Es wurde sowohl bei den Berechnungen als auch in der Schlacht in der Richtung des nächsten Pols geschossen. In dem Fall war die Auslenkung in zwei verschiedenen Richtungen.



# Aufgabe 2

$T_1 = T_J =$ Jupiterjahr

$T_2 = T_E = 365{,}25\ d$

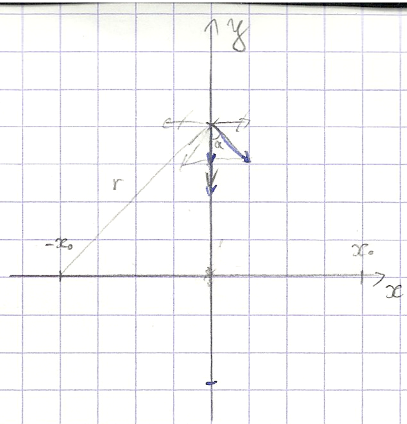
$a_1 = 5{,}07\ au$

$a_2 = 1\ au$

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \qquad T_1 = \sqrt{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \cdot T_2^{\,2}} = \sqrt{5{,}07^3_{au} \cdot (365{,}25 d)^2}$$

$\approx \underline{4170\ d} \approx 11{,}4$ Jahre ✓ 1

Aufgabe 3




$\frac{F_y}{F} = \cos\alpha$

Gravitationskraft $F = G\frac{m\cdot m_P}{r^2}$ P ein Punkt auf der y-Achse

Die x-Komponenten der Gravitationskräfte kompensieren sich wegen $|x_0| = |-x_0|$ und gleicher Masse m ✓

$$F_y = 2\cdot F\cdot\cos\alpha$$

mit $F = G\cdot\frac{m\cdot m_P}{r^2}$ und $\alpha = \arctan\frac{x_0}{y}$

$$F_y = 2G\frac{m\cdot m_P}{r^2}\cdot\cos\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right) \qquad \left(\cos\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}}\right)$$

$$g(y) = \frac{F_y}{m_P} = 2G\frac{m}{r^2}\cos\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right) \qquad r = \sqrt{x_0^2+y^2}$$

$$\vec{g}(y) = 2G\frac{m}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^2}\cos\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right)\cdot\vec{e}_y = 2G\,m\frac{y}{(x_0^2+y^2)^{3/2}}\cdot\hat{e}_y \;✓$$

ableiten deutlich einfacher

$$\cancel{\frac{dg}{dy} = -2G\frac{m}{\sqrt{x_0^2+y^2}^2}\sin\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x_0}{y}\right)^2}\cdot-\left(\frac{x_0}{y^2}\right)}$$

$$\frac{dg}{dy} = 2Gm\left(-\frac{1}{x_0^2+y^2}\cdot\frac{1}{2(\sqrt{x_0^2+y^2})^2}\cdot 2y\cdot\cos\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right) + \frac{1}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^2}\sin\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right)\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x_0}{y}\right)^2}\cdot\frac{x_0}{y^2}\right)$$

$$= 2Gm\cdot\frac{1}{x_0^2+y^2}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x_0^2+y^2})^2}\left(x_0\sin\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right) - y\cos\left(\arctan\frac{x_0}{y}\right)\right)$$

noch 2

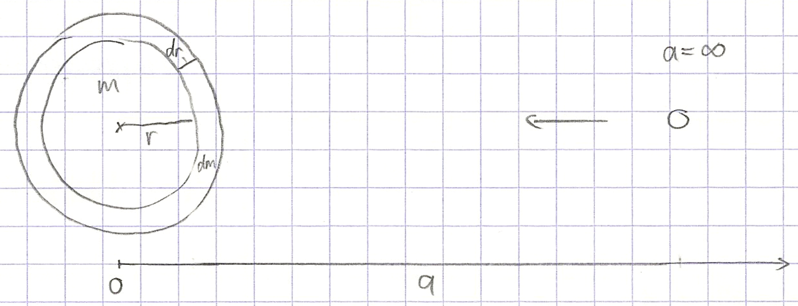
$\Rightarrow \frac{x_0}{Y}\sin\left(\arctan\frac{x_0}{Y}\right) = y\cos\left(\arctan\frac{x_0}{Y}\right) \Rightarrow y = x_0$ ∮ $Y = \pm\frac{x_0}{\sqrt{2}}$

Maximalwert:

$$g(x_0) = 2Gm \cdot \frac{1}{2x_0^2} \cos(\arctan 1)$$

$$\simeq 1{,}41 \cdot \frac{Gm}{2x_0^2}$$

## Aufgabe 4




Beim Transport des Massestücks zur Kugel wird die Energie dW frei, die mit der Gravitationskraft berechnet werden kann

$$W = \int F\,dr$$

also $$dW = \int_r^\infty dF\,da = \int_r^\infty G\frac{m \cdot dm}{a^2}\,da$$

$$= \left[-G\frac{m}{a}dm\right]_r^\infty = G\frac{m}{r}dm$$

Um den gesamten Energieinhalt zu bekommen integriert man dW nach r

$$dm = \rho\,dV = A\rho\,dr = 4\pi r^2\rho\,dr$$ ($A$ = Fläche der Schale, $\rho$ = Dichte)

$$m = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E = \int dW = \int_0^R G\frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot 4\pi r^2\rho}{r}\,dr = G\rho^2\pi^2\frac{4^2}{3}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R = \frac{3}{5}\frac{G}{R}\cdot\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right)^2$$

✓

$$E = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{3}{5}GM^2 \frac{d\frac{1}{R}}{dt} = -\frac{3}{5}GM^2 \frac{1}{R^2}\cdot\frac{dR}{dt}$$

Abgestrahlte Energie $E_s(t) = E_0 - E(t)$

Anfangsenergie

Energie in der kompressierten Kugel

1

$$\Delta E = \frac{3GM^2}{5}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R-\Delta R}\right) = -P_s \cdot t$$

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R-\Delta R} = \frac{5P_s t}{3GM}$$

$$\frac{1}{R-\Delta R} = \frac{3GM^2 - 5P_s t\cdot R}{3GM^2\cdot R}$$

$$\Delta R = R - \frac{3GM^2 R}{3GM^2 - 5P_s t\cdot R} \simeq 36{,}45\,m$$

b) $I_k = \frac{2}{5}MR^2$

$$\Delta I = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{5}M(R-\Delta R)^2$$

$$= \frac{2M}{5}\left(R^2 - \left(R^2 - 2\Delta R R + (\Delta R)^2\right)\right) \qquad \Delta R \ll R$$

$$\simeq \frac{4}{5}MR\Delta R$$

$$L = I\omega = (I - \Delta I)(\omega + \Delta\omega) \Rightarrow \Delta\omega = \frac{I\omega}{I-\Delta I} - \omega$$

$$\Rightarrow \Delta E_{ro} = \frac{1}{5}I\omega^2 - \frac{1}{2}(I-\Delta I)(\omega+\Delta\omega)^2 = \frac{MR^2\omega^2}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{2MR^2}{5} - \frac{4MR\Delta R}{5}\right)\left(\omega + \frac{MR^2\omega}{MR^2 - \frac{1}{2}MR\Delta R} - \omega\right)$$

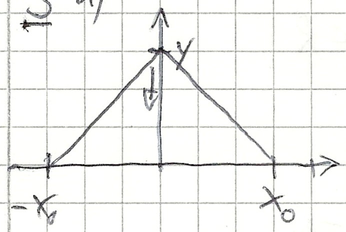
$$= \frac{MR^2\omega}{5} - \left(\frac{MR^2}{5} - \frac{2MR\Delta R}{5}\right)\left(\frac{MR^2\omega}{MR - 2MR\Delta R}\right)^2 \quad *$$

$$* = \frac{MR^2 4\pi^2}{5T^2}\left(\frac{2\Delta R}{2\Delta R - R}\right) \simeq 1{,}66\cdot 10^{29}\,J$$

$$\frac{\Delta E_{rot}}{P_s t} \simeq 1{,}4\cdot 10^{-5}$$

Verbesserung

3 a)




$r^2 = x_0 + y^2$

$|g_1| = M \cdot G \frac{m}{r^2}$

$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = M \cdot G \frac{m}{r^2} \left[ \begin{pmatrix} \frac{-x_0}{\sqrt{r^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{r^2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{r^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{r^2}} \end{pmatrix} \right]$

$= M \cdot G \cdot m \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2y}{\sqrt{r^2}} \end{pmatrix}$

muss sein

b) $\frac{dg}{dy} \overset{!}{=} 0 = -2M \cdot Gm \left[ r^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} r^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y^2 \right] \hat{e}_r$

$\Rightarrow r^{\frac{3}{2}} - 3r^{-\frac{5}{2}} y^2 \overset{!}{=} 0$

$r^2 = 3y^2$

$x_0^2 = 2y^2$

$y = \pm \frac{x_0}{\sqrt{2}}$

4

a) $dV = 4\pi r^2 dr$

$dm = \rho dV = 4\pi r^2 \rho dr$

$dE = G \frac{dm\, M}{r} = G \frac{4\pi r^3 \rho 4\pi r^2 \rho}{3 \cdot r}$

$E = \int_0^E dE = \int_0^R \frac{16}{3} G \pi^2 \rho^2 r^4 dr$

$= \frac{16}{15} G \pi^2 \rho^2 R^5$

$= \frac{3 \cdot GM^2}{5 \cdot R}$

$\Delta E = \frac{3GM^2}{5} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R - \Delta R} \right) = P_S \cdot t \quad \Rightarrow \frac{1}{R - \Delta R} = \frac{3GM^2 - 5P_S t R}{3GM^2 R}$

$\Rightarrow \Delta R = 36{,}45\,m$

b)

$$I_k = \frac{2}{5} M R^2$$

$$\Delta I = \frac{2}{5} M R^2 - \frac{2}{5} M (R - \Delta R)^2$$

$$= \frac{2}{5} M \left( R^2 - (R - \Delta R)^2 \right) \qquad \Delta R \ll R$$

$$\simeq \frac{4}{5} M R \cdot \Delta R$$

$$L = I_w = (I - \Delta I)(w + \Delta w) \Rightarrow \Delta w = \frac{I_w}{I - \Delta I} - w$$

$$\Delta E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} (I - \Delta I)(\omega + \Delta \omega)^2$$

$$= \frac{MR^2 w^2}{5} - \frac{1}{2} \left( \frac{2MR^2}{5} - \frac{4MR\Delta R}{5} \right) \left( \omega + \frac{MR^2 \omega}{MR^2 - \frac{1}{2} MR\Delta R} - \cancel{\omega} \right)$$

$$= \frac{MR^2 w^2}{5} - \left( \frac{MR^2}{5} - \frac{2MR\Delta R}{5} \right) \left( \frac{MR^2 \omega}{MR - 2MR\Delta R} \right)$$

$$= \frac{MR^2 w^2}{5} - \frac{1}{5} \left( \frac{M^2 R^4 w^2}{MR^2 - 2MR\Delta R} \right)$$

$$= \frac{MR^2 4\pi^2}{T^2} \left( \frac{2\Delta R}{2\Delta R \cdot R} \right) = -1{,}66 \cdot 10^{29}\ J$$