Abgabe bis Fr, 23. Januar, 13:15 Uhr im Erdgeschoss von Geb. 30.23 (Physikhochhaus)
Besprechung Mi, 28. Januar 2015

1. *Doppler-Effekt* **(3 Punkte)**
Eine Lichtquelle, welche sich im Bezugssystem S in Ruhe befindet, emittiert im Zeitintervall Δt (wie gemessen in S) eine Anzahl von $n = \nu\Delta t$ Wellenbergen, wobei ν die Frequenz ist. Ein Beobachter bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v auf die Lichtquelle zu. In seinem Ruhesystem, S', sieht er die Quelle mit einer Geschwindigkeit $v' = -v$ auf sich zu bewegen. Er misst somit eine Wellenlänge
$$\lambda' = \frac{c\Delta t' - v\Delta t'}{n} \tag{1}$$
und eine Frequenz
$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c-v}\frac{n}{\Delta t'} = \frac{1}{1-\beta}\frac{n}{\Delta t'}. \tag{2}$$
Daher gilt
$$\nu' = \frac{\nu}{1-\beta}\frac{\Delta t}{\Delta t'}. \tag{3}$$
Die Zeitintervalle Δt und $\Delta t'$ sind durch die Gleichung $\Delta t' = \gamma\Delta t$ für die Zeitdilatation miteinander verbunden.
   (a) Zeigen Sie, dass man die Beziehung (3) schreiben kann als
$$\nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \nu \tag{4}$$
   für kleiner werdenden Abstand.
   (b) Wie würden Sie Gleichung (4) ändern, damit sie den Fall einer Entfernung, d.h. eines grösser werdenden Abstands, beschreibt?
   (c) Die Stadtpolizei hat einen Autofahrer erwischt, der bei Rot über eine Ampel gefahren war. Der Autofahrer behauptet nun, die Ampel habe wegen des Doppler-Effekts grün ausgesehen. Wie schnell soll der Autofahrer gefahren sein, damit dies passiert?

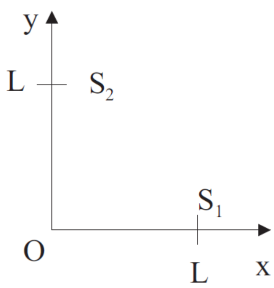
2. *Lorentz-Transformation* **(4 Punkte)**
Im Ursprung O eines Bezugssystems mit den räumlichen Koordinaten x und y befindet sich eine Quelle, die isotrop Lichtpulse aussendet. Bei $x = L$ und $y = L$ befinnden sich senkrecht zu den Achsen zwei Spiegel S_1 und S_2 (siehe Skizze). Ein zweites, achsenparalleles Bezugssystem mit dem Ursprung O' und den Koordinatenachsen x' und y' bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit v in positiver x-Richtung (siehe Skizze). Zur Zeit $t = 0$ fallen die beiden Ursprünge O und O' zusammen und die Uhren der beiden Beobachter werden synchronisiert, so dass $t = t' = 0$ gilt. Zur Zeit $t_0 = 0$ werde von der Quelle ein Puls emittiert. Wir definieren die folgenden fünf Ereignisse durch ihre Koordinaten im ungestrichenen System:
$E0 : x_0^\mu = (0, 0, 0, 0)$ Lichtpuls wird im Ursprung ausgesendet,
$E1 : x_1^\mu = (ct_1, L, 0, 0)$ Lichtpuls erreicht den Spiegel S_1,
$E2 : x_2^\mu = (ct_2, 0, L, 0)$ Lichtpuls erreicht den Spiegel S_2,
$E3 : x_3^\mu = (ct_3, 0, 0, 0)$ Vom Spiegel S_1 reflektierter Puls kommt wieder bei der Quelle an,
$E4 : x_4^\mu = (ct_4, 0, 0, 0)$ Vom Spiegel S_2 reflektierter Puls kommt wieder bei der Quelle an.

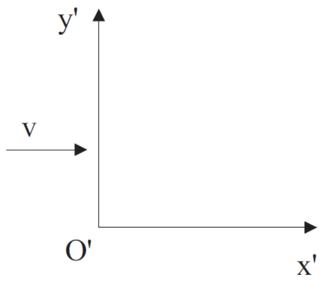
Für einen im System der Quelle und der Spiegel ruhenden Beobachter kommt der Puls gleichzeitig bei den zwei Spiegeln an, d.h., $ct_1 = ct_2 = L$, und die reflektierten Pulse kommen auch gleichzeitig wieder bei der Quelle an, d.h., $ct_3 = ct_4 = 2L$.

(a) Berechnen Sie mit den Lorentz-Transformationen die Zeiten t'_1, t'_2, t'_3 und t'_4, der vier Ereignisse im bewegten (gestrichenen) System.

(b) Berechnen Sie im bewegten System die räumliche Distanz zwischen E_0 und E_1, resp. E_0 und E_2.

(c) Berechnen Sie die invarianten Raum-Zeitintervalle zwischen dem Ereignis E_0 und den Ereignissen E_1, E_2, E_3 und E_4.





3. *Elastizität* **(3 Punkte)**

(a) Berechnen Sie die Längenänderung einer senkrecht aufgestellten Eisenstange auf Grund ihres eingenen Gewichts. Nehmen Sie folgende Größen für die Stange an: Länge $L = 300$ m, Querschnittsfläche $A = 10^{-2}\text{m}^2$, Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2, Dichte $\rho = 7,86 \cdot 10^3$ kg/m^3.

(b) Berechnen Sie die potentielle Energie dieser Verformung.

Viel Spaß und viel Erfolg!

5

1.

a) $\nu' = \frac{\nu}{1-\beta}\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{\nu}{1-\beta}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta t \gamma} = \frac{\nu}{1-\beta}\cdot\sqrt{1-\beta^2}$

$= \nu \cdot \frac{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}}{\sqrt{(1-\beta)^2}} = \nu\frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = \nu\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ ✓

$\Rightarrow$ Ausgaben für kl. werdenden Abst.

b)

(1) $\lambda' = \frac{c\Delta t' + v\Delta t'}{n}$

(2) $\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c \cdot n}{\Delta t'(c+v)} = \frac{n}{\Delta t'}\frac{1}{(1+\beta)}$

(3) $\nu' = \frac{\nu}{(1+\beta)}\frac{\Delta t}{\Delta t\cdot\gamma} = \nu\cdot\frac{1}{(1+\beta)}\cdot\sqrt{1-\beta^2}$

$= \nu\cdot\frac{\sqrt{(1+\beta)(1-\beta)}}{\sqrt{(1+\beta)^2}} = \nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ ✓

$\Rightarrow$ Ausgaben für größer werdenden Abstand

c) $\nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\cdot\nu$

ν' = grünes Licht $\approx$ 570 THz

ν = Rotes Licht $\approx$ 430 THz

$\frac{570}{430} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

$\left(\frac{570}{430}\right)^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta}$

$\left(\frac{570}{430}\right)^2(1-\beta) = 1+\beta$

$\left(\frac{570}{430}\right)^2 - 1 = \beta + \beta\left(\frac{570}{430}\right)^2$

$\left(\frac{570}{430}\right)^2 - 1 = \beta\left(1+\left(\frac{570}{430}\right)^2\right)$

$\beta = \frac{\left(\frac{570}{430}\right)^2-1}{\left(\frac{570}{430}\right)^2+1}$

$v = \left(\frac{\left(\frac{570}{430}\right)^2-1}{\left(\frac{570}{430}\right)^2+1}\right)\cdot c \quad (\approx 0{,}275\cdot c)$

$= \frac{82.385\,\text{km}}{s}$ ✓

3

2.) $t_i' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(t - \frac{v \cdot c\, t_i}{c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(t - \frac{v t_i}{c}\right)$$

$$= \frac{t_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v t_i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{c t_i - v t_i}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_i(c-v)}{\sqrt{c^2-v^2}} = t_i \cdot \frac{\sqrt{(c-v)^2}}{\sqrt{(c+v)(c-v)}} = t_i \sqrt{\frac{(c-v)}{(c+v)}}$$

$$= \frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\, t_1 = \gamma(1-\beta)t_1$$

(✓) für t_1'

$\Rightarrow$ gilt für alle Zeiten f

b)

$l = \frac{l_R}{\gamma} = L \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ f $\Rightarrow$ gilt für E_0, E_2 $l' = \gamma \cdot l$

Für E_0, E_1 gilt $L = L$ da senkrecht zur Bew.-Richtung

Ja, aber durch "Bewegung" gibt es auch eine räumliche Distanz in x-Richtung 0,5

3. $\sigma = \frac{F}{A}$ $\quad F = m \cdot g$ $\quad$ Zugspannung

a) $\quad = L \cdot A \cdot \rho \cdot g$

$$\sigma = L \cdot \rho \cdot g$$

relative Dehnung:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon = \frac{L \cdot \rho \cdot g}{E} = \varepsilon(L)$$

gesamte Längenänderung

$$\int_0^L \frac{l \rho \cdot g}{E} \, dl = \frac{\rho \cdot g}{E} \int_0^L l \, dl = \frac{\rho g}{E} \left[\frac{l^2}{2} \right]_0^L = \frac{\rho g}{E} \cdot \frac{1}{2} L^2 = 1{,}7 \, cm$$

✓

b)

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} = F(\Delta L)$$ $\quad E_{pot} = \int_0^{\Delta L} F(x) \, ds = \ldots$

$$\cancel{\int_{L-\Delta L}^{\Delta L} E \cdot A \frac{\Delta l}{L} \, d\Delta l = \frac{E \cdot A}{L} \int_{L-\Delta L}^{L} \Delta l \, d\Delta l = \frac{E A}{L} \left[\frac{\Delta l^2}{2} \right]_{L-\Delta L}^{L}}$$

$$\cancel{= \frac{E \cdot A}{L} \left[\frac{L^2}{2} - \frac{(L-\Delta L)^2}{2} \right] = \frac{E \cdot A}{L} \left[\frac{L^2 - L^2 + 2\Delta L \cdot L - \Delta L^2}{2} \right]}$$

$$\cancel{= \frac{E \cdot A}{L} \cdot \frac{+2\Delta L \cdot L - \Delta L^2}{2}}$$

$$\int_0^{\Delta L} \frac{E \cdot A}{L} \Delta l \, d\Delta l = \frac{E \cdot A}{L} \left[\frac{\Delta l^2}{2} \right]_0^{\Delta L} = \frac{E \cdot A}{L} \cdot \frac{\Delta L^2}{2} = 1003{,}3 \, J$$ f

1,5

Verbesserung

(2)

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad \beta = \frac{v}{c}$$
$$x' = \gamma(-\beta ct + x) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

a)

$$ct_1' = \gamma(ct_1 - \beta x_1) \; ; \quad x_1 = L \quad ct_1 = L$$
$$= \gamma(L - \beta L)$$
$$= \gamma L(1-\beta)$$
$$t_1' = \frac{L}{c}\gamma(1-\beta)$$
$$= t_1\gamma(1-\beta)$$

$$ct_2' = \gamma(ct_2 - \beta x_2) \; ; \quad x_2 = 0 \quad ct_2 = L$$
$$ct_2' = \gamma L$$
$$t_2' = \frac{L}{c}\gamma = t_2\gamma = \frac{t_1'}{1-\beta}$$

$$ct_3' = \gamma(ct_3 - \beta x_3) \; ; \quad x_3 = 0 \quad ct_3 = 2L$$
$$= \gamma 2L$$
$$t_3' = \frac{L}{c}2\gamma$$
$$= t_3\gamma = t_4'$$

b)

$$\frac{d_{01}'}{t_1'} \stackrel{!}{=} c \quad \swarrow \text{Geschwindigkeit der Strahlen}$$

$$\Rightarrow \quad d_{01}' = \gamma L(1-\beta)$$

$$\frac{d_{oz}'}{t_2'} \overset{!}{=} c$$

$$\Rightarrow d_{oz}' = \gamma L$$

c)

$$s^2 = \Delta(ct)^2 \cdot d^2 = c^2(\Delta t)^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$s_1^2 = (ct_1)^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2 = L^2 - L^2 - 0 - 0 = 0$$
$$s_2^2 = (ct_2)^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 = L^2 - 0 - L^2 - 0 = 0$$

durch Licht noch verbunden

$$s_3^2 = (ct_3)^3 - x_3^2 - y_3^2 - z_3^2 = L^2 - 0 - 0 - 0 = L^2 > 0$$
$$s_4^2 = (ct_4)^4 - x_4^2 - y_4^2 - z_4^2 = L^2 - 0 - 0 - 0 = L^2 > 0$$

verbunden

„für $s_i^2 < 0$ nicht verbunden"

3

b)

$$E_{pot} = \int_0^{\Delta L} F(x)\, ds$$
$$= \int_0^{\Delta L} \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot \frac{\rho \cdot \cancel{A} \cdot g}{E \cdot \cancel{A}} x\, dx \quad ; \quad ds = \frac{\rho \cdot A \cdot g \cdot x}{E \cdot A} dx$$
$$= \frac{(\rho \cdot g)^2 A}{E} \cdot \frac{1}{3} L^3$$