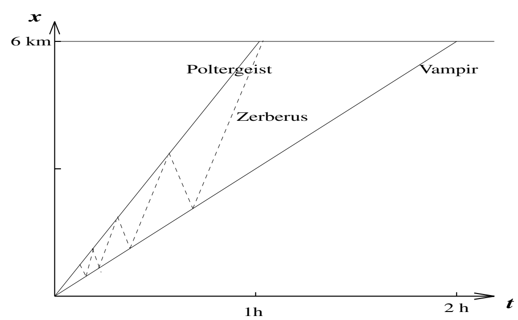
Klassische Physik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

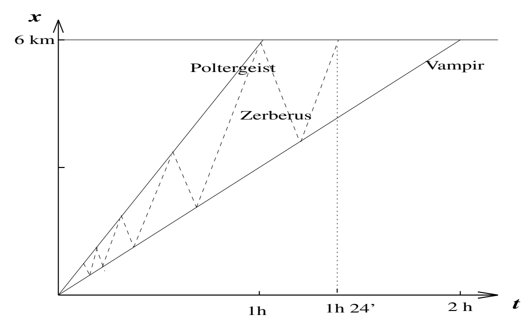
Aufgabenblatt 2

1. Achtung: *Trick or Treat* die Halloween-Falle

   Frühest mögliches Eintreffen des Zerberus am Haus (kurz nach dem Poltergeist): 1h. Spätest mögliches Eintreffen des Zerberus am Haus (kurz vor Erreichen des Hauses trifft er noch mal den Poltergeist und muß nochmal zurück): 1h 24'
   Beide Möglichkeiten (und alle Zeiten dazwischen) sind mit der Aufgabenstellung kompatibel, da die Geschwindigkeit des Zerberus bei t=0 nicht definiert ist.
   Wieviel Gramm Schokolade bekommen die Drei beim *Trick or Treat* ? Keine Ahnung!



Frühest mögliches Eintreffen des Zerberus am Haus
(kurz nach dem Poltergeist)



Spätest mögliches Eintreffen des Zerberus am Haus
(ist kurz vor Erreichen des Hauses beim Poltergeist
und muß nochmal zurück)

Beide Möglichkeiten sind mit der Aufgabenstellung kompatibel,
da die Geschwindigkeit des Zerberus bei t=0 nicht definiert ist.

Weg-Zeit-Diagramm

Für die Übungsstunde: Der Poltergeist und der Zerberus laufen ohne den Vampir zum Haus. Der Zerberus läuft wiederum doppelt so schnell wie der Poltergeist, kehrt am Haus um, läuft zum Poltergeist zurück und pendelt so immer zwischen dem Poltergeist und dem Haus hin und her. Beide starten gleichzeitig vom gleichen Punkt aus, und der Poltergeist ist nach einer Stunde an dem 6 km entfernten Haus angekommen. Welche Strecke hat der Zerberus zurückgelegt? Da der Zerberus die doppelte Geschwindigkeit hat wie der Poltergeist und genauso lange läuft, ist die Lösung trivial: 12 km. "Man sagt, daß Mathematiker sich mit dieser Aufgabe meist schwerer tun als Physiker, denn sie erkennen sofort, dass die Teilwege des Zerberus eine geometrische Reihe bilden, und lassen sich verleiten, diese aufzusummieren, was länger dauert als die triviale Lösung. Ein Psychologe testete viele Wissenschaftler und fand, dass (gute) Mathematiker im Mittel 35 s brauchen, (gute) Physiker 14 s. Johann v. Neumann brauchte 8 s, worauf der Psychologe sein Erstaunen ausdrückte, dass er als Mathematiker es so schnell schaffe, obwohl er doch eigentlich die Reihe aufsummieren müßte. "Hab ich ja!", sagte v. Neumann." (aus H.Vogel, Probleme aus der Physik, SpringerLehrbuch)

2. Fehlerrechnung I
   $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}$
   $\partial\rho = \sqrt{(\frac{\partial\rho}{\partial m})^2\sigma_m^2 + (\frac{\partial\rho}{\partial r})^2\sigma_r^2} = \sqrt{\frac{1}{V}\sigma_m^2 + \left(\frac{m}{\frac{4}{3}\pi r^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{r}\right)^2 \sigma_r^2} = \sqrt{\rho^2\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 9\cdot\rho^2\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2}$
   $\rightarrow \frac{\partial\rho}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + 9\cdot\left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2} = \sqrt{0.02^2 + 9\cdot 0.01^2} = 0.036$
3. Fehlerrechnung II - Systematische und statistische Fehler

   http://www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~simonis/praktikum/allgemeines/script-Fehleranalyse.pdf
   oder www.bipm.org/utils/common/documents/jcgm/JCGM$_1$00$_2$008$_E$.*pdf*

Systematische Fehler:
Eichung des Meterstabes
Vakuum nicht perfekt $\longrightarrow$ Luftreibung
Schallgeschwindigigkeit
Potentielle Energie der Kugel wird nicht nur in Kinetische Energie umgewandelt sondern auch in Rotationsenergie
Zeitverzögerung durch Lichtschranke und Kabellänge

Statistische(zufällige) Fehler:
Verzögerung Rufen, Starten der Stoppuhr und Loslassen (nach Abzug der Schallgeschwindigkeit)
das Fallen der Kugel z.B. durch Rotation
Quantisierungsfehler durch AD-Wandlung bei der Lichtschranke

Was passiert, wenn die Höhe der Röhre jedesmal erneut gemessen wird?
Der systematische Fehler (Eichung des Messabes) bleibt gleich. Der Ablesefehler allerdings wird kleiner ((1/sqrt(N)). Damit wird der Gesamtfehler kleiner!

4. Fehlerrechnung III
   zunächst ermitteln beide Gruppen den Wert
   $g = 4\pi^2 \frac{97{,}36cm}{(1{,}983s)^2} = 9{,}7745\frac{m}{s^2}$
   Die signifikante Stelle hinter dem Komma ergibt sich für Gruppe 1 aus der Fehlerstatistik, für Gruppe 2 aus der Größtfehlerabschätzung. Da 2 fehlerbehaftete Grössen zur Berechnung verwendet wurden, muss zusätzlich das Fehlerfortpflanzungsgesetz berücksichtigt werden.
   Die Berechnung des Größtfehlers verläuft wie folgt: Die Genauigkeit der Längenmessung werde auf ± 1mm geschätzt (Verwendung einer mm-Skala mit Genauigkeit von 0,5 mm an beiden Enden ergibt sich zu 1 mm); die Genauigkeit der Zeitmessung auf ± 0.001s (Angabe des Herstellers der elektrischen Stoppuhr). Für den relativen Fehler ergibt sich:
   $\Delta g = |\frac{\partial g}{\partial l}||\Delta l| + |\frac{\partial g}{\partial T}||\Delta T|$

   $= 4\pi^2(\frac{1}{T^2}\Delta l + |-\frac{2l}{T^3}||\Delta T)|$

   $\frac{\Delta g}{g} = \frac{|\Delta l|}{l} + 2\cdot\frac{|\Delta T|}{T} = 0{,}002\ (\cong 0{,}2\%)$

   $\rightarrow \quad g = (9{,}77 \pm \mathbf{0.02})\frac{m}{s^2}$
   Für die zweite Gruppe ergibt sich ein relativer Fehler von $0{,}2\%$ (d.h. in der zweiten Stelle nach dem Komma tritt der Fehlereinfluss auf)
   Gruppe 1 ermittelt als Maß für die Güte seiner Messung den mittleren quadratischen Fehler (Streubreite in der Gausskurve). Mittlerweile kann das jeder Taschenrechner

oder viele Computerprogramme. (Bsp. Exel, Origin, Staroffice, PAW Physics analyse workstation; ROOT, eine Klassensammlung von C++ (übliches Handwerkzeug in der Hochenergiephysik)). Wir wollen es jedoch nochmals 'per Hand' probieren.

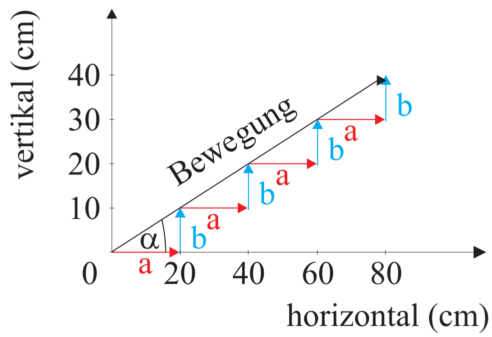
$l_i[cm]$	$\bar{l} - l_i[cm]$	$(\bar{l} - l_i)^2$	$T_i[s]$	$\bar{T} - T_i[s]$	$(\bar{T} - T_i)^2$
97,3	-0,06	0,0036	1,983	0	0
97,35	-0,01	0,0001	1,983	0	0
97,45	0,09	0,0081	1,982	-0,001	1E-6
97,3	-0,06	0,0036	1,984	0,001	1E-6
97,35	-0,01	0,0001	1,983	0	0
97,35	-0,01	0,0001	1,981	-0,002	4E-6
97,25	-0,11	0,0121	1,982	-0,001	1E-6
97,4	0,04	0,0016	1,983	0	0
97,35	-0,01	0,0001	1,983	0	0
97,4	0,04	0,0016	1,985	0,002	4E-6
97,3	-0,06	0,0036	1,984	0,001	1E-6
97,4	0,04	0,0016	1,982	-0,001	1E-6
97,3	-0,06	0,0036	1,983	0	0
97,35	-0,01	0,0001	1,984	0,001	1E-6
97,4	0,04	0,0016	1,983	0	0
97,4	0,04	0,0016	1,982	-0,001	1E-6
97,35	-0,01	0,0001	1,984	0,001	1E-6
97,35	-0,01	0,0001	1,982	-0,001	1E-6
97,4	0,04	0,0016	1,984	0,001	1E-6
97,35	-0,01	0,0001	1,983	0	0
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \bar{l} = 97,36$ cm				$\bar{T} = 1,983$ s	
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{l} - l_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{19} 4,5 \cdot 10^{-2}} = 4,8 \cdot 10^{-2}$ cm				$s = 9,7 \cdot 10^{-4} s \approx 10^{-3}$ s	
$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,01cm$				$\bar{s} = 2 \cdot 10^{-4} s$	
$l = 97,36 \pm 0,01cm$				$T = 1,983$	

Der mittlere quadratische Fehler ergibt sich bzw. die Streubreite ergibt sich aus:
$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{l} - l_i)^2}$ mit n=20
s entspricht dem mittleren quadratischen Fehler des Einzelwertes. Der mittlere quadratische Fehler des Mittelwertes (Vertrauensbereich) $\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{n}}$
s und $\bar{s}$ siehe Tabelle. Diese Prozedur wird für l und T durchgeführt.
g ist über eine Funktion der fehlerbehafteten Größen $\bar{l}$ und $\bar{T}$ zu ermitteln. Der Fehler für die Funktion muss über das Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt werden.
$\bar{s}_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{K}(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bar{s}_i)^2}$ f ist in unserem Fall $g = (2\pi^2)\frac{l}{T^2}$, i läuft von 1 bis 2 (Anzahl der verschiedenen Parameter (oben K)). $\bar{s}_1 = \bar{s}_l, \bar{s}_2 = \bar{s}_T; \bar{s}_f = \bar{s}_g; x_1 = l, x_2 = T$
$\bar{s}_g = \sqrt{(\frac{4\pi^2}{T^2}\bar{s}_l)^2 + (\frac{8\pi^2}{T^3}\bar{s}_T)^2} = \sqrt{(\frac{4\pi^2}{(1{,}983)^2}10^{-4})^2\frac{m^2}{s^4} + (\frac{8\pi^2}{(1{,}983)^3} \cdot 0,9736 \cdot 2 \cdot 10^{-4})^2\frac{m^2}{s^4}}$
$= \sqrt{10^{-6} + 3,9 \cdot 10^{-6}}\frac{m}{s^2} = 2,2 \cdot 10^{-3}\frac{m}{s^2} \rightarrow g = (9,774 \pm \mathbf{0{,}002})\frac{m}{s^2}$
Gruppe 1 hat also eine Größenordnung genauer gemessen. Zur weiterführenden Diskussionen könnte für die Längenmessung eine graph. Darstellung der Häufigkeit über l angefertigt werden und diese mit einer Gauss-Kurve (Normalverteilung) nach:
$Wahrscheinlichkeit(l) = P(l) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{l-\bar{l}}{s\sqrt{2}})^2}$
verglichen werden. Bitte den Begriff der signifikanten Stelle erläutern und den Begriff Standardabweichung und S, mittlerer quadratischer Fehler des Mittelwertes!

5. *Der sportliche Professor*

   (a)

   (b) Die Nettobewegung setzt sich zusammen aus vier Einzelbewegungen, die



jeweils eine Treppenstufe darstellen:

$$\vec{x}_{stufe} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 20\,cm \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10\,cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\,cm \\ 10\,cm \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{netto} = \vec{x}_{stufe} + \vec{x}_{stufe} + \vec{x}_{stufe} + \vec{x}_{stufe} = 4 \cdot \vec{x}_{stufe} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 20\,cm \\ 10\,cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80\,cm \\ 40\,cm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{netto,1} \\ x_{netto,2} \end{pmatrix}$$

Der Betrag dieses Vektors ist auch der Betrag der Bewegung:

$$|\vec{x}_{netto}| = \sqrt{x_{netto,1}^2 + x_{netto,2}^2} = \sqrt{(80\,cm)^2 + (40\,cm)^2} = 89.44\,cm$$

Den Steigungswinkel erhält man mit Hilfe des *arctan*:

$$\alpha = arctan\left(\frac{x_{netto,2}}{x_{netto,1}}\right) = arctan\left(\frac{40\,cm}{80\,cm}\right) = 26.57° = 0.464 rad$$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, Forschungszentrum Karlsruhe,
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537; ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm