Physik I – Einführung in die Physik – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 3; Übung am 11.November (Mittwoch)

1. Sportwagen

   (a) Jeder Summand muss die Einheit $\frac{m}{s}$ haben, daher $E_1 = \frac{m}{s^3}$ und $E_2 = \frac{m}{s^2}$

   (b) Zeit- Weg Gesetz:
   $s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} 0.96(20tE_2 - t^2E_1)dt = [0.96(10t^2E_2 - \frac{t^3}{3}E_1)]_{t_0}^{t_1}$
   mit $t_0 = 0$ und $t_1 = 5$ $s(5s) = 200m$
   Allgemein: $s(t) = 0.96(10t^2\frac{m}{s^2} - \frac{t^3}{3}\frac{m}{s^3})$ Mit der Bedingung $s(0) = 0$ folgt die additive Konstante ist gleich 0.

   (c) Der Test endet, wenn das Fahrzeug wieder die Geschwindigkeit 0 erreicht hat. Dies ist zu demjenigen Zeitpunkt t der Fall, für den gilt: $v(t) = 0$ und $t \neq 0$ (t = 0 gleich Startzeitpunkt).
   $v(t) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 10t^2\frac{m}{s^2} - \frac{t^3}{3}\frac{m}{s^3} = 0 \quad \leftrightarrow \quad t = 0$ oder $t = 20s \Rightarrow t = 20s$
   $s(20s) = 0.96(10(20s)^2\frac{m}{s^2} - \frac{(20s)^3}{3}\frac{m}{s^3}) = 1280m$

   (d) Beschleunigung
   $a(t) = \dot{v}(t) = 0.96(20\frac{m}{s^2} - 2t\frac{m}{s^3})$
   $a(5s) = \dot{v}(t) = 0.96(20\frac{m}{s^2} - 2t\frac{m}{s^3}) = 9.6\frac{m}{s^2}$

2. *Bungee Jumper*

   (a) Unter der Annahme dass sich der Bungee Jumper nur fallen lässt und nicht abspringt (d. h. $|\vec{v}|_{t=0} = 0\,\frac{m}{s}$), kann man die Formel $s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ verwenden und nach t auflösen:

   $$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 4.52\,s$$

   (b) Hierfür müssen wir zunächst die Geschwindigkeit berechnen, die der Bungee Jumper nach 100m freiem Fall hat:

   $$v = v_0 + g\,t = 0\,\frac{m}{s} + 9.81\,\frac{m}{s^2}4.52\,s = 44.34\,\frac{m}{s}$$

   - Standard:
     mit $s_{end} = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + s_0$ und $v_{end} = at + v_0$ und $s - s_0 = \Delta s = 15m$ ergibt sich $t = \frac{v_{end} - v_0}{a} \rightarrow \Delta s = \frac{(v_{end} - v_0)^2}{2a} + \frac{2v_0(v_{end} - v_0)}{2a} \rightarrow$ $(mit\ V_{end} = 0)$ $\Delta s = \frac{v_0^2 - 2v_0^2}{2a} \rightarrow a = \frac{-v_0^2}{2\Delta s}$ Zahlen eingesezt: $a = \frac{-(44.34\,\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 15\,m} = -65.53\,\frac{m}{s^2}$ Das Minuszeichen gibt an, dass die Beschleunigung entgegengesetzt der Fallrichtung wirkt.
   - Anders herum: man nimmt eine Beschleunigung von 0 an und beachtet später das Vorzeichen:$s = \frac{a}{2}t^2; v = at \rightarrow t = \frac{v}{a} \rightarrow s = \frac{a}{2} \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$ jetzt muss aber das Vorzeichen beachtet werden.
   - Ganz trivial: was vorher in 100m beschleunigt wurde, wird jetzt in 15m abgebremst $a = \frac{100}{15}g = 65,4\frac{m}{s^2}$: ist sogar am Besten, da hier keine Rundungsfehler enstehen, welche quadratische weitergeführt werden.

- (Oder: Für die weitere Berechnung eignet sich die Formel $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, wobei $v = 0\frac{m}{s}$ die Endgeschwindigkeit, $v_0 = 44.34\frac{m}{s}$ die Anfangsgeschwindigkeit und $\Delta x = 15\,m$ der Bremsweg ist:

  $$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{-(44.34\,\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 15\,m} = -\,65.53\,\frac{m}{s^2}$$

  Das Minuszeichen gibt an, dass die Beschleunigung entgegengesetzt der Fallrichtung wirkt.)

3. *Hollywoodstunt*

   (a) Als erstes muss man die Geschwindigkeitsangabe in eine brauchbare Einheit (SI) umrechnen:

   $$v = 150\,\frac{km}{h} = 150\,\frac{1000\,m}{3600\,s} = 41.67\,\frac{m}{s}$$

   Bei der Berechnung der Flugbahn des Autos kann man von zwei getrennten Bewegungen ausgehen: In der horizontalen Richtung führt das Auto eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit aus ($v_{0,x} = 41.67\,\frac{m}{s}$), während es in der vertikalen Richtung eine gleichmässige Beschleunigung aus der Ruhelage ($v_{0,y} = 0\,\frac{m}{s}$) erfährt. Um den Aufprallpunkt zu bestimmen, muss man zunächst die Falldauer berechnen, die sich aus dem vertikalen freien Fall ergibt:

   $$t_{fall} = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\,m}{9.81\,\frac{m}{s^2}}} = 4.04\,s$$

   Nun kann man berechnen, wie weit sich das Auto in dieser Zeit in der vertikalen Richtung von den Klippen entfernt hat:

   $$x = v_{0,x} \cdot t_{fall} = 41.67\,\frac{m}{s} \cdot 4.04\,s = 168.35\,m$$

   Das Auto landet also $168.35\,m$ von den Klippen entfernt auf dem $80\,m$ tiefer gelegenen Pazifik.

   (b) Der Schall pflanzt sich auf dem direkten Weg zwischen Aufschlagspunkt und den Beobachtern fort. Dabei legt er die Diagonale zwischen diesen beiden Punkten zurück:

   $$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(168.35\,m)^2 + (80\,m)^2} = 186.39\,m$$

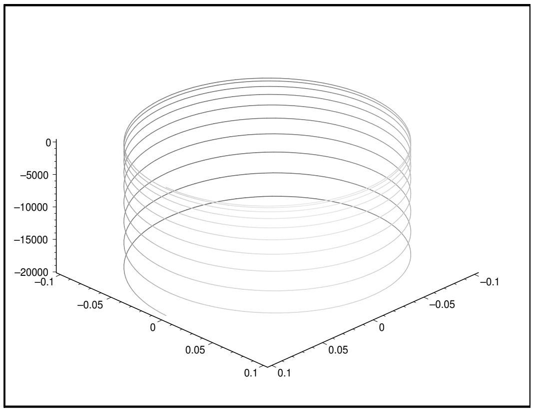
   Hierbei wird folgende Zeit benötigt

   $$t = \frac{d}{v_{schall}} = \frac{186.39\,m}{300\,\frac{m}{s}} = 0.62\,s$$

4. *Bahnkurve der Fliege*

   (a) Überlagert werden eine Kreisbewegung in xy–Ebene $[x(t)^2 + y(t)^2 = r^2 = const$,für $r_1 = r_2]$ mit einer gleichmäßig beschleunigten ($a = \frac{g}{4} \approx 2.5\frac{m}{s^2}$) Bewegung in (-z)–Richtung. Die Bahnkurve beschreibt eine Spirale, die immer steiler wird, um die z–Achse.

   (b) $t_g = \frac{0.1ms^{-1}}{2.5ms^{-2}} = 0.04s$
   $\omega t_g = 1s^{-1} \cdot 0.04s = 0.04$



Ortsbahn der Fliege, Achtung z-Achse ist gestreckt um den Beschleunigungseffekt besser zu zeigen. (g anstatt g/4)

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \\ -\frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \\ -\frac{g}{4}t \end{pmatrix}; \vec{v}(t_g) = \begin{pmatrix} -0,004\frac{m}{s} \\ 0,1\frac{m}{s} \\ -0,1\frac{m}{s} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\omega t \\ -r\omega^2\sin\omega t \\ -\frac{g}{4} \end{pmatrix}; \vec{a}(t_g) = \begin{pmatrix} -0,1\frac{m}{s^2} \\ -0,004\frac{m}{s^2} \\ -2,5\frac{m}{s^2} \end{pmatrix}$$

(c) $|\vec{v}(t)| = v(t) = \sqrt{(r\omega)^2 + (\frac{g}{4}t)^2}$
$|\vec{v}(t_g)| = \sqrt{0,02}\frac{m}{s}$
$|\vec{a}(t)| = a(t) = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (\frac{g}{4})^2}$
$|\vec{a}(t_g)| = \sqrt{6,26}\frac{m}{s^2}$
$\vec{a}_T(t) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{g^2 t}{16\sqrt{(r\omega)^2+(\frac{g}{4}t)^2}}$
$\vec{a}_T(t_g) = 1,77\frac{m}{s^2}$

(d) Logische Überlegung:
Kreis: r=konstant; ϕ linear, z bleibt gleich!
Rechnung:
$r = \sqrt{(r\cdot\cos\omega t)^2 + (r\cdot\sin\omega t)^2} = r\cdot\sqrt{\cos\omega t^2 + \sin\omega t^2} = r$
$\phi(t) = \arctan\frac{r\cdot\sin\omega t}{r\cdot\cos\omega t} = \arctan\tan\omega t = \omega t$

$z(t) = z(t) = -\frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2$

(e) Für $r_1 \neq r_2$ ergibt sich eine Ellipse, r ist dann nicht mehr konstant, auch nicht bei den Zylinderkoordinaten.

(f) Aufgabe (a) bis (e) in Zylinderkoordinaten! Optional!!!!

- Gleiche Bahnkurve
- Logische Überlegung:
  Kreis: r=konstant; ϕ linear, z bleibt gleich!
  Rechnung:
  $r = \sqrt{(r\cdot\cos\omega t)^2 + (r\cdot\sin\omega t)^2} = r\cdot\sqrt{\cos\omega t^2 + \sin\omega t^2} = r$

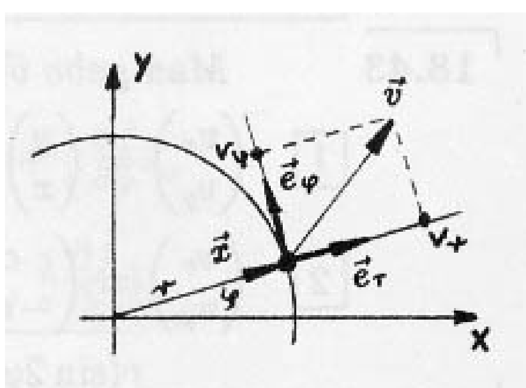
  $\phi(t) = \arctan\frac{r\cdot\sin\omega t}{r\cdot\cos\omega t} = \arctan\tan\omega t = \omega t$

$z(t) = z(t) = -\frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2$

$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 0; \dot{\phi}(t) = \frac{d(\phi(t))}{dt} = \omega; \dot{z}(t) = \frac{d(z(t))}{dt} = -\frac{g}{4}t$

$\ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0; \ddot{\phi}(t) = \frac{d^2(\phi(t))}{dt^2} = 0; \ddot{z}(t) = \frac{d^2(z(t))}{dt^2} = -\frac{g}{4}$

$r(t) = r; \phi(t) = \omega \cdot t; z(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2$
Durch die Transformation in Zylinderkoordinaten wird die Phi-Komponente 0, sie 'versteckt' sich in der r-Komponente. (Siehe Bild, und Merziger-Wirth: Repetitorium der Höheren Mathematik) $u_r = r(t), u_\phi = 0, u_z = z(t)$
$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} u_r \\ u_\phi \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2 \end{pmatrix}$ mit den **Einheitsvektoren**:
$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit
$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \cdot \begin{pmatrix} \cos\phi(t) \\ \sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \dot{\phi}$ (Kettenregel) $= \dot{\phi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi$,
$\dot{\vec{\mathbf{e}}}_\phi = \frac{d}{dt} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\phi(t) \\ \cos\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\phi(t) \\ -\sin\phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}}$
Die z–Komponente ist komplett unabhängig von den Polarkoordinaten zu behandeln, deshalb kümmern wir uns im Folgenden nur um r und ϕ, und führen z später wieder hinzu.
Jeder Vektor $\vec{u}$ ist als Linearkombination darstellbar:

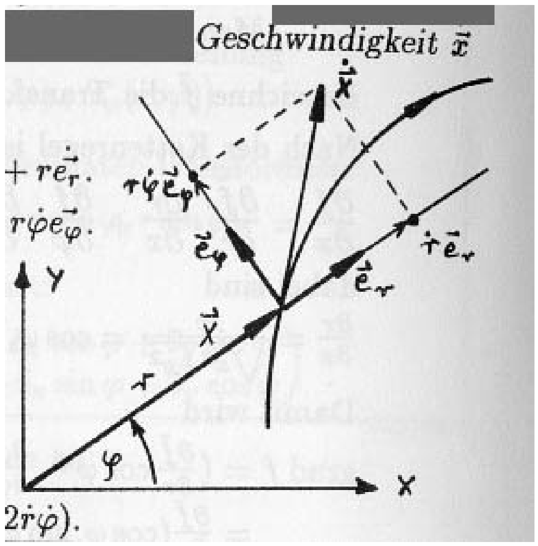


Orthogonale Basis – $\vec{s}$-Vektor – im Bild ist s als dargestellt.

$\vec{u} = u_r\vec{e}_r + u_\phi\vec{e}_\phi$ (insbesondere z.B. Vektor vom Ursprung zum bestimmten Punkt (Fliege)) $\vec{s} = r\vec{e}_r + 0\vec{e}_\phi$
Wegen $\vec{s} = \vec{s}(t)$ sind r, ϕ Funktionen von t.
mit $\vec{s} = r\vec{e}_r$ folgt mit der Produktregel:
$\dot{\vec{\mathbf{s}}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\vec{\mathbf{e}}}_{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \cdot \dot{\phi} \cdot \vec{\mathbf{e}}_\phi$.
In Polarkoordinaten also: $\dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \end{pmatrix}$
nochmaliges Differenzieren gibt
$\ddot{\vec{s}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\vec{e}}_\phi$
$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\ddot{\phi}\vec{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\vec{e}_r$

$= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\vec{e}_\phi$

Die Polarkoordinaten von $\ddot{\vec{s}}$ sind $\ddot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \end{pmatrix}$



Geschwindigkeit

Nun das Ganze in vollen Zylinderkoordinaten:

$\dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\phi} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

$\ddot{\vec{s}}$ sind $\ddot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

Eingesetzt:

Geschwindigkeit: $\dot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\omega \\ -\frac{g}{4}t \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = |\dot{\vec{s}}| = v(t) = \sqrt{(r\omega)^2 + (\frac{g}{4}t)^2}$;

$|\vec{v}(t_g)| = \sqrt{0,02}\frac{m}{s}$

Beschleunigung: $\ddot{\vec{s}} = \begin{pmatrix} 0 - r\omega^2 \\ 0 \\ -\frac{g}{4} \end{pmatrix}$; $|\vec{a}| = |\ddot{\vec{s}}| = a(t) = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (\frac{g}{4})^2}$

$|\vec{a}(t_g)| = \sqrt{6,26}\frac{m}{s^2}$

$\vec{a}_T(t) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{g^2 t}{16\sqrt{(r\omega)^2 + (\frac{g}{4}t)^2}}$

$\vec{a}_T(t_g) = 1,77\frac{m}{s^2}$

(Benutzt man *einfach* das Linienelement funktioniert die Sache noch bis zur Geschwindigkeit, bricht jedoch bei der Beschleunigung zusammen, bzw. funktioniert auch, wenn man das Linienelement konsequent *auch mit den Einheitsvektoren* ableitet, der Rechenweg ist ähnlich wie oben

Linienelement: $d\vec{s} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\phi\vec{e}_\phi + dz\vec{e}_z$

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \phi(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \omega t \\ -\frac{1}{2}\frac{g}{4}t^2 \end{pmatrix}$$

Ableitung nach t: $\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dr\vec{e}_r}{dt} + \frac{rd\phi\vec{e}_\phi}{dt} + \frac{dz\vec{e}_z}{dt}$

Hier kommt ein r zur ϕ-Komponente.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ r \cdot \omega \\ -\frac{g}{4}t \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(r \cdot \omega)^2 + \frac{g^2}{16}t^2}\frac{m}{s}$$

$$|\vec{v}(t_g)| = \sqrt{0,02}\frac{m}{s}$$

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{g}{4} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}(t)| = |\vec{a}(t_g)| = \frac{g}{4} = 2,5\frac{m}{s^2}$$

$$\vec{a}_T(t) = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{g^2 t}{16\sqrt{(r\cdot\omega)^2 + (\frac{g}{4}t)^2}}$$

$$\vec{a}_T(t_g) = 1,77\frac{m}{s^2}$$

Lexikon: Zylinderkoordinatensystem

Das Zylinderkoordinatensystem ist eine Mischung aus kartesischen und Polarkoordinaten im dreidimensionalen Raum. Zylinderkoordinaten sind die Projektion des Ortsvektors $\vec{r}$ auf die z–Achse und die Polarkoordinaten (ρ, φ) in der zur z–Achse senkrechten Ebene, also die Länge ρ des Lotes auf die z–Achse und der Winkel, den dieses Lot mit der positiven x–Achse bildet.

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi &= \arctan\frac{y}{x} \\ z &= z \end{aligned}$$

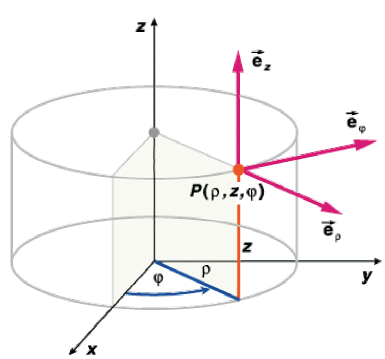
Linienelement: $d\vec{r} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\phi\vec{e}_\phi + dz\vec{e}_z$

Volumenelement: $dV = \rho d\rho d\phi dz$

Anmerkungen:

Anstelle von ρ wird meistens r benutzt!

Die reinen Transformationen gelten nur für $\vec{s}(t)$. Für die Geschwindigkeit muss das Linienelement beachtet werden.



Zylinderkoordinaten!!!

Stubenfliege (Große S., Gemeine S.), v. a. in menschl. Siedlungen weltweit verbreitete, etwa 1 cm lange Echte Fliege; Körper vorwiegend grau mit vier dunklen Längsstreifen auf der Rückenseite des Thorax; als Krankheitsüberträger gefährl. Insekt, dessen Weibchen jährl. bis zu 2 000 Eier an zerfallenden organ. Substanzen ablegt, wo sich auch die Larven entwickeln.

Sehr Gemeine Stubenfliege

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537; ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm