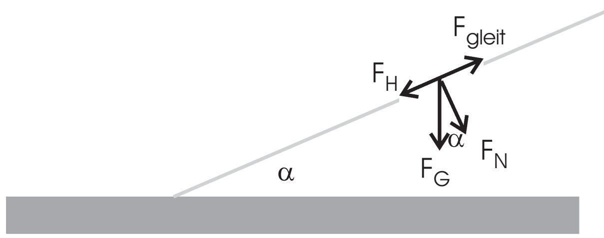
Klassische Experimentalphysik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Lösungsblatt 4)

1. Fahrstuhlfahrt
   $F = m \cdot a$ Die Waage steht auf dem Fahrstuhlboden sieht daher mein Gewicht als $F = m(g \pm a_{Fahrstuhl})$
   Nach oben - logisch - Gewicht wird größer; Beschleunigungen addieren sich. Ich muss also nach oben fahren und gehe die Gefahr ein beim nach unten Fahren mir den Kopf anzuschlagen. Nach oben Fahren etwas wissenschaftlicher: Gewichtskraft $\vec{G}$ wirkt nach unten der Fahrstuhl beschleunigt nach oben (in die entgegengesetzte Richtung) also wirkt eine Kraft auf mich entgegensetzt der Gewichtskraft die Gegenkraft dieser wird auf der Waage angezeigt daher werden die Beschleunigungen addiert.
   Nach oben $F = m(g + a_{Fahrstuhl})$; 50 Prozent Gewinn ($g + a_{Fahrstuhl} = 1.5g$) bedeutet daher der Fahrstuhl muss mit 0.5 g nach oben beschleunigen.
   Ich schlage mir beim nach unten Fahren allerdings erst bei $\vec{a} > \vec{g}$ den Kopf.
   Shanghai Tower: Gleichförmige Beschleunigung:
   $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$; $v = a \cdot t \Rightarrow a = \frac{1}{2} \frac{v^2}{s} = \frac{1}{2} \frac{324}{32.4} \frac{m}{s^2} \sim 5 \frac{m}{s^2} \sim \frac{g}{2}$ Man schlägt sich den Kopf nicht an aber zum Obstverkaufen eigent er sich prima - wenn da nicht die Fahrstuhlgebühr wäre.

2. Schlittenfahrt



Schiefe Ebene – Schlittenbahn

(a) Die Zerlegung der Gewichtskraft F_G in die horizontale (F_H) und vertikale (F_N) Komponente bezgl. der schiefen Ebene ergibt
$F_H = m \cdot g \cdot \sin\alpha$ und $F_N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$
Aufgrund v=const. gilt betragsmäßig $F_{Gleit} = \mu_{Gleit} \cdot F_N = F_H$, wobei die Reibungskraft der Bewegung und somit F_N entgegen wirkt.
$\Rightarrow m \cdot g \cdot \sin\alpha = \mu_{Gleit} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$
$\Rightarrow \mu_{Gleit} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = 8.75 \cdot 10^{-2}$

(b) Beim Hinaufziehen wirken Gleitreibungskomponente F_H und Gleitreibungskraft in die gleiche Richtung, die aufgebrachte Kraft für ein Ziehen mit konstanter Geschwindigkeit ist daher
$F_1 = F_H + \mu_{Gleit} \cdot F_N = 2 \cdot m \cdot g \cdot \sin\alpha = 102.6N$

(c) Beim Hinaufziehen mit konstanter Beschleunigung a muss zusätzlich die Kraft $F = m \cdot a$ aufgewendet werden, d.h. $F_2 = F_1 + m \cdot a = 192.6N$

(d) Grenzgeschwindigkeit
Die verschiedenen Reibungsmechanismen:

- **Coulomb Reibung:**
  Die Coulomb Reibung wirkt unabhängig von der Geschwindigkeit eines Körpers und ergibt sich aus der Normalkraft F_N und dem Reibungskoeffizienten μ zu $F_R = \mu F_N$; Haft-, Gleit- und Rollreibung.
- **Stokes Reibung:**
  Die Stokes Reibung oder viskose Reibung gilt für relativ kleine, langsame Körper durch ein Fluid. Mit der Viskosität η gilt für eine Kugel mit Radius r und der Geschwindigkeit v dann $F_R = 6\pi\eta r v$.
- **Newton Reibung:**
  Wird v oder der Körper größer bzw. weicht er stark von der Kugelform ab, so gilt die Newton Reibung mit $F_R = \frac{1}{2} \cdot c_W \rho A v^2$ mit dem Querschnitt A des Körpers, der Dichte ρ des Mediums und dem c_W-Wert, der für stromlinienförmige Körper kleiner 1, für eine Kugel = 1 und für hydrodynamisch ungünstige Körper $c_W > 1$ ist. Der Exponent (hier 2) kann bei extremen Geschwindigkeiten noch größer werden.

Wir nehmen Newtonschen Reibung an: $F_R = \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$

$F_{ges} = F_H - \mu_{Gleit} \cdot F_N - F_R = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_{Gleit} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2} \cdot c_W \rho A v^2$
Maximalgeschwindigkeit $\hat{=}$ konstante Geschwindigkeit $\hat{=}$ $F_{ges} = 0$
$0 = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_{Gleit} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - \frac{1}{2} \cdot c_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2 \Rightarrow$
$v = \sqrt{2 \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_{Gleit} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}{c_W \cdot \rho \cdot A}} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g (\sin\alpha - \mu_{Gleit} \cos\alpha)}{c_W \cdot \rho \cdot A}} = 14.15 \frac{m}{s}$
mit ($m_{Schlitten} = 60kg$;$\mu_{Gleit}(Stahl\ auf\ Eis) = 0,01$; $c_W = 0.7$ $\rho_{Luft} = 1,293 \frac{kg}{m^3}$, $A = 0.5m^2$; Viskosität $\eta_{Luft} = 1.74 \cdot 10^{-5} Ns/m^2$)

Realität:
Diese Geschwindigkeit ist zu gering und der C_W-Wert) nicht allzu schlecht, als das man turbulente Verhältnisse annehmen kann daher ist Newtonschen Reibung alleine wahrscheinlich hier der falsche Ansatz.
Mit Stokes (war nicht explizit als Rechenaufgabe auf dem Blatt gefragt, d.h de Tutor sollte übernehmen, ausser jemand hat es gerechnet) ergibt sich folgende Endgeschwindigkeit:
$0 = m \cdot g \cdot \sin\alpha - \mu_{Gleit} \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha - 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$ Nehmen wir den Schlitten als annähernd Kreisförmig an ergibt sich ein Radius von 0.4 m.
$v = \frac{m \cdot g(\sin\alpha - \mu_{Gleit}\cos\alpha)}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r} \sim 3.5 * .10^5 \frac{m}{s}$ (345817.)
Dies wiederum ist sicherlich viel zu schnell, um realistisch Stokes Reibung anzunehmen. $\Rightarrow$
Die Verhältnisse sind also irgendwo in der Mitte anzusetzen. Im Schlittenbeispiel ohne Vernachlässigung der Luftreibung gilt: Der Schlitten erreicht aufgrund der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibung eine Maximalgeschwindigkeit, die sich aus einer Mischung von Stokes- und Newton-Reibung ergibt.

Vernachlässigt man den Luftwiderstand wird reine Coulomb-Reibung angenommen $\Rightarrow$ es gibt keine geschwindigkeitsabhängige Gegenkraft $\Rightarrow$ gibt es keine Grenzgeschwindigkeit.
Einen Stopppunkt gibt es natuerlich nur wenn die Piste irgendwann endet und ein anderen Bremsmechanismus, z.B. Wand, anderer Schlitten oder Bremse einsetzt.
Ohne Stoppmechanismus wäre dann Lichtgeschwindigkeit die obere Grenze - dann müßte aber natürlich relativistisch gerechnet werden.

Zusatz
Aus der beigelegten Abbildung (Gerthsen abb.1.42) kann man einen groben Wert von $v_{max} \approx 50 m/s$ für einen Fallschirmspringer ohne Schirm abschätzen . Die Orts- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramme für einen Fallschirmspringer ergeben sich aus der Abbildung, wobei eine Absprunghöhe von $h_0 = 25 km$ zugegebenermaßen für einen Fallschirmspringer wohl etwas zu hoch ist....

Das Rechnen wir dann irgendwann später!

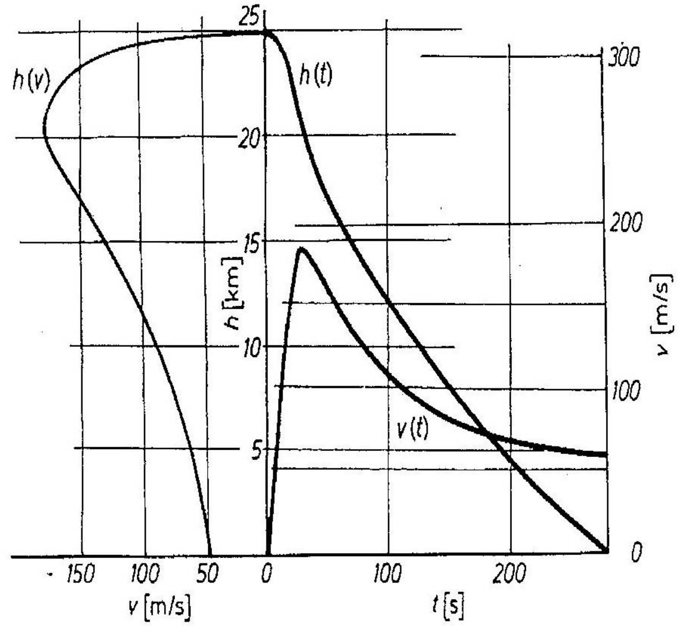


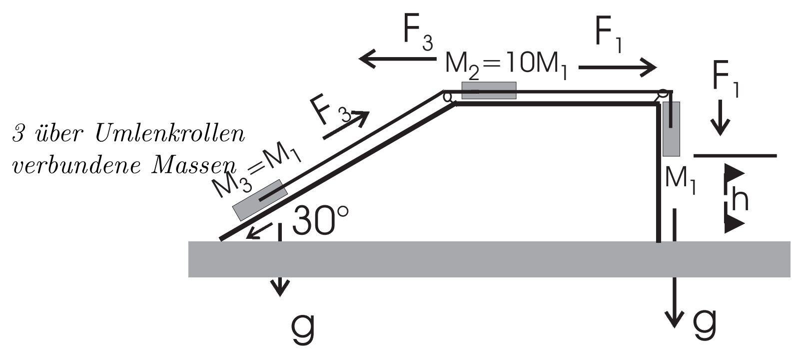
Abb. 1.42. Fall aus großer Höhe. Die Änderung der Luftdichte mit der Höhe (vgl. Abschnitt 3.1.6) führt zu einer Höhenabhängigkeit der quasistationären Fallgeschwindigkeit. Zahlenwerte für den Fall eines menschlichen Körpers

Fall aus großer Höhe ohne Fallschirm!

3. Ein Wagen fahre auf horizontaler Straße durch eine Kurve mit Kurvenradius R=50m. Die Haftreibungszahl von Gummi auf Asphalt betrage $\mu_H = 0.6$. Wie schnell kann der Wagen fahren, ohne abzurutschen? Welche Geschwindigkeit ist möglich, wenn die Kurve als Steilwandkurve ausgelegt ist mit einem Neigungswinkel von $\alpha = 30^o$ zu Horizontalen?
   Lösung
   $F_z = m\frac{v^2}{R}; F_R = \mu_H \cdot mg$
   Straße:
   Abrutschen: $F_z > F_R$;
   Grenzfall: $F_z = F_R \;\Rightarrow\; m\frac{v^2}{R} = \mu_H \cdot mg$
   $\Leftrightarrow\; v = \sqrt{R\mu_H g} = 17.2\frac{m}{s} = 61.8\frac{km}{h}$
   Steilwandkurve:
   Abrutschen: $F_{z\ ||} > F_H + F_R$
   Grenzfall: $F_{z\ ||} = F_H + F_R$
   $F_{z\ ||} = F_z \cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha$
   $F_H = mg\sin\alpha$
   $F_R = \mu_H F_{N_{tot}} = \mu_(mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R}\sin\alpha$
   $\Rightarrow m\frac{v^2}{R}\cos\alpha = mg\sin\alpha + \mu_H(mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R}\sin\alpha)$
   $\Rightarrow m\frac{v^2}{R}(\cos\alpha - \mu_H\sin\alpha) = mg(\sin\alpha + \mu_H\cos\alpha)$

   $\Rightarrow v = \sqrt{Rg\frac{\sin\alpha+\mu_H\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu_H\sin\alpha}} = 29.73\frac{m}{s} = 107.01\frac{km}{h}$

4. Drei Massen befinden sich auf der Erdoberfläche entsprechend der Skizze angeordnet....
Erwähnen: Kräfteparallelogramm an Masse M_3 (schiefe Ebene, an Masse M_2 wirkt die Gewichtskraft nur senkrecht zur Bewegungsrichtung.



   (a) Für die beschleunigende Kraft gilt:
   $F_a = M_1 \cdot g - M_3 \cdot g \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} M_1 \cdot g$
   Die beschleunigten Massen sind $m = M_1 + M_2 + M_3 = 12 \cdot M_1$, d.h.
   $F_a = m \cdot a = 12 \cdot M_1 \cdot a \ \rightarrow \ a = \frac{g}{24}$
   Die Beschleunigung ist zeitlich konstant und unabhängig von der Masse M_1. Mit der z-Achse entgegen der Fallrichtung von M_1 ergibt sich dann
   $z(t) = -\frac{1}{2}at^2 = -\frac{g}{48}t^2$

   (b) Für die Seilkraft F_1 an Körper 1 gilt:
   $M_1 \cdot g - F_1 = M_1 \cdot a \Rightarrow F_1 = M_1(g - a) = \frac{23}{24} M_1 \cdot g$
   Für die Seilkraft F_3 an Körper 3 gilt:
   $M_3 \cdot g \cdot \sin\alpha - F_3 = -M_3 \cdot a \Rightarrow F_3 = M_1(g \cdot \sin\alpha + a) = \frac{13}{24} M_1 \cdot g$
   Die Seilkräfte an Körper 2 entsprechen den entgegengesetzten Kräften an Körper 1 und 3, sodass die entsprechende Bewegungsgleichung lautet:
   $M_2 \cdot a = F_3 - F_1$

   (c) Die Aufprallzeit t_1 folgt aus
   $z(t_1) = -\frac{1}{2}at_1^2 = -h = -0.5m$
   $\Rightarrow t_1^2 = \frac{2h}{a} = \frac{2h}{g} \cdot 24$
   $t_1 = \sqrt{\frac{1m}{9.81m/s^2} \cdot 24} = 1.56s$

   (d) Der Impuls der Masse M_1 beim Aufprall ist dann
   $p(t_1) = M_1 \cdot v(t_1) = M_1 \cdot \frac{g}{24}t_1$
   $= M_1 \cdot \frac{g}{24} \cdot \sqrt{\frac{48h}{g}} = M_1 \cdot \sqrt{\frac{gh}{12}} = 6.24 \cdot 20^{-2} kgm/s$
   Der Impuls wird beim elastischen Stoß von +p zu -p geändert, d.h. die Impulsänderung ist $\delta p = 2p = 0.125 kgm/s$.

5. Der Helikopter befindet sich in gleichförmiger Bewegung $\Rightarrow \sum F = 0$
y Richtung $L \cdot \cos 21 - W = 0$
$L = \frac{53800N}{\cos 21} = 57600N$
x Richtung $L \cdot \sin 21 - R = 0$
$R = 57600N \cdot \sin 21 = 20600N$

Anmerkung: Das Gesetz, welches für alle kraftumformenden Einrichtungen gilt, ist die Goldene Regel der Mechanik: Was man an Kraft spart, muß man an Weg zusetzen.

Feste Rolle	An einer festen Rolle wird keine Kraft gespart: $F_{Hub} = F_{Zug}$ Daher sind auch die zurückzulegenden Wege gleich: $s_{Hub} = s_{Zug}$	Beispiel: Ein Körper mit einer Gewichtskraft von 100 N soll mit einer festen Rolle um 2 m gehoben werden. Zum Heben ist eine Zugkraft von 100 N notwendig, man muß aber auch nur 2 m Seil ziehen.
Lose Rolle (parallele Seile)	An einer losen Rolle wird Kraft gespart: $F_{Zug} = \frac{1}{2}F_{Hub}$ Daher gilt für die zurückzulegenden Wege: $s_{Zug} = 2s_{Hub}$	Beispiel: Ein Körper mit einer Gewichtskraft von 100 N soll mit einer losen Rolle um 2 m angehoben werden. Zum Heben ist eine Zugkraft von 50 N notwendig, jedoch muß man das Seil um 4 m bewegen (ziehen).
Hebel	An einem Hebel kann man Kraft sparen: Je kürzer der Hebelarm mit der zu bewegenden Last ist und je länger der Hebelarm ist, an dem man anfaßt (Kraftarm), umso kleiner ist die aufzuwendene Kraft. Es gilt die Gleichung: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$	Beispiel: Mit Hilfe eines Hebels soll ein Faß mit einer Gewichtskraft von 750 N angehoben werden. Ist der Lastarm 10cm lang und der Kraftarm 100 cm, so benötigt man zum Anheben des Fasses nur noch eine Kraft von 75 N.
Geneigte Ebene	An einer geeigneten Ebene kann man Kraft sparen. Es gilt die Gleichung: $F_H : F_G = h : l$ (F_H - Hangabtriebskraft; F_G - Gewichtskraft; h - Höhe der geneigten Ebene; l - Länge der geneigten Ebene)	Beispiel: Ein Fahrzeug hat eine Gesamtmasse von 2t und damit eine Gewichtskraft von 20000 N. Um im Gebirge eine Steigung von 200m Länge und 50m Höhenunterschied zu überwinden, muß der Motor eine Kraft von mindestens 5000 N aufbringen.
Flaschenzug (4 tragende, parallele Seilstücke)	Mit einem Flaschenzug kann man Kraft sparen (entsprechend der Anzahl der tragenden Seilstücke): $F_{Zug} = \frac{1}{4}F_{Hub}$ Dafür erhöht sich die Länge des notwendigen Seiles: $s_{Zug} = 4s_{Hub}$	Beispiel: Um einen Körper mit einer Gewichtskraft von 1000 N um 2 m mit Hilfe eines solchen Flaschenzuges zu heben, wäre eine Kraft von 250 N notwendig, gleichzeitig wären aber auch 8 m Seil zu ziehen.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537; ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~hartmann/Mechanik.htm