Klassische Experimentalphysik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 5; Übung am 25.November (Mittwoch)

1. Ein Fallschirmsprung über Karlsruhe
   Ein Fallschirmspringer kann in erster Näherung als freier Fall mit Reibung nach Stokes (Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit; Proportionalitätskonstante: C) beschrieben werden. Zur Zeit $t = 0$ sei seine Anfangsgeschwindigkeit $v(t = 0) = v_o$ und der Nullpunkt des Koordinatensystems so gewählt, dass auch $z(t = 0) = 0$ ist.

   (a) Stellen Sie die Differentialgleichung auf und berechnen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. (Verwenden sie $k = \frac{C}{gm}$)

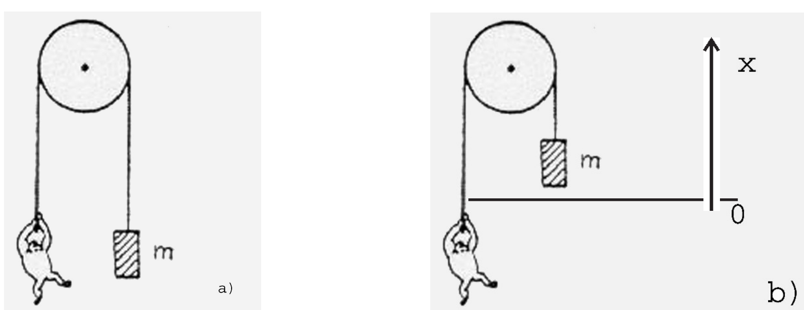
   (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit für große Zeiten $t \to \infty$.

   (c) Berechnen Sie den Ort des Fallschirmspringers als Funktion der Zeit.

   (d) Zeigen und begründen Sie, warum die Beschleunigung des Fallschirmspringers für große Zeiten verschwindet.
   (Anmerkung. Der Boden ist natürlich unendlich weit entfernt. Die Erdbeschleunigung g wird im gesamten Bereich als konstant angenommen.)

2. Ein Affe und eine ebenso schwere leblose Masse m hängen wie skizziert über einer Seilrolle. Der Affe versucht am Seil hochzuklettern.

   (a) Diskutieren sie die Bewegung von Affe und Masse. (Venachlässigen sie dabei die Masse des Seils, die Reibung zwischen Seil und Rolle und die Ausdehnung der Umlenkrolle. Was passiert, wenn die leblose Masse nur halb so schwer wie der Affe ist?



Unser Übungsgruppenleiter vergnügt sich mit einer festen Rolle und einem Seil a) ohne Masse; b) mit Masse.

   (b) Nun sei das Seil **massebehaftet**. Das Seil habe eine Länge von 20 m und eine Masse von 20 kg. Der Affe wiegt 50 kg. Stellen sie zunächst die Bewegungsgleichung für die Koordinaten der Masse, $x(t)$ auf (siehe Skizze b), $x = 0$ entspricht gleicher Höhe von Affe und Masse). Konstruieren sie hieraus die allgemeine Lösung der Form $x(t) = A \cdot e^{+ct} + B \cdot e^{-ct}$. Bestimmen sie die Unbekannten A und B aus den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0 \neq 0$ und $v(t = 0) = v_0 = 0$.

3. **Einstieg** in Gradient und Vektorfeld! Kraftfelder! Konservative Kraftfelder? Potentiale! Gradient; Rotation; ∇
   Dies ist etwas zum „heute mitnehmen“, denn es kommt immer wieder, besonders häufig in den nächsten Semestern.

   (a) Bestimmen Sie aus dem räumlichen Potentialen $U(x, y, z)$ oder $U(r)$ mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die zugehörigen Kraftfelder ($\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot U(x, y, z)$). Handelt es sich um konservative Kraftfelder? ((Hinweis: Satz von Stokes: Prüfen Sie$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$)
      i. $U(x, y, z) = x^2 - 2xy + z + U_0$
         (Dies könnte auch ein Höhenprofil darstellen und der Gradient würde dann die Falllinien ergeben und z.B. zeigen wohin Wasser fließt oder welche Skipiste am interessantesten ist.)
      ii. $U(r) = \gamma \frac{m \cdot M}{r}$ Dies sollte Ihnen bekannt vorkommen.
      iii. $U(r) = r$

   (b) Wirbelfeld
       Sie haben das Wirbelfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$, mit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Ist die Kraft konservativ? Berechnen Sie explizit ihre Rotation.

   (c) Einige weitere Felder; sind sie konservativ?

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3z^2 \\ cosy \\ 2xy \end{pmatrix}$$

4. Auf einen Massenpunkt wirke in der xy-Ebene die Kraft $\vec{F} = (y^2 - x^2, 3xy)$. Man bestimme die von der Kraft bei der Bewegung des Massenpunktes vom Punkt (0,0) zum Punkt (2,4) entlang folgender Wege geleistete Arbeit:

   (a) von (0,0) nach (2,0) entlang der x-Achse und von dort parallel zur y-Achse zum Punkt (2,4)
   (b) von (0,0) nach (0,4) entlang der y-Achse und von dort parallel zur x-Achse zum Punkt (2,4)
   (c) Auf der geraden Verbindungslinie beider Punkte
   (d) entlang der Parabel $y = x^2$

   Ist die Kraft konservativ?

5. Zeigen sie, dass die Summe von potentieller Energie $E_{pot}(x)$ und kinetischer Energie $E_{kin}(x)$ an jeder Stelle des Weges x während der Bewegung konstant ist, d.h. nicht von x abhängt

   (a) für einen Körper der Masse m, der mit der Erdbeschleunigung $\vec{g}$ bis zur Falltiefe x_{max} fällt ($\vec{F} = m \cdot \vec{g}$).
   (b) für eine Masse m, die an einer Feder um die Ruhelage $x = 0$ mit der Maximalamplitude x_{max} waagrecht schwingt ($\vec{F} = -D\vec{x}$).

   Ermitteln Sie $E_{pot}(x)$ und $E_{kin}(x)$ jeweils aus den Bewegungsgleichungen.

Virtuelles Rechnen - Aufteilung:
$\|$1a$\|$1b – d$\|$2$\|$3a$\|$3b – c$\|$4$\|$5$\|$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm

Lexikon:

Konservatives System, ein System, in dem sich die Energie in der Zeit nicht ändert. Charakteristisch für ein solches System ist die Existenz einer Energiefunktion, die jedem Punkt im Phasenraum einen Energiewert zuordnet. Das System bewegt sich dann auf den Äquipotentialflächen dieser Funktion.
Mechanische Systeme ohne Reibung stellen konservative Systeme dar, ebenso elektrische Schaltkreisen ohne ohmsche Widerstände.
Die Bewegung der Planeten unter Berücksichtigung der Gravitationsanziehung der Sonne und der Planeten untereinander ist ein Beispiel für ein nichtlineares konservatives System.