Klassische Experimentalphysik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 5; Übung am 25.November (Mittwoch)

1. Fallschirmsprung

(a) $F_{beschl} = m \cdot a = m \cdot \dot{v}; \quad F_R = -C \cdot v; \quad G = m \cdot g$
DGL:

$$ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = G - F_R \tag{1}$$

$$m\frac{dv}{dt} = m \cdot g - C \cdot v \tag{2}$$

$k = \frac{C}{gm}$
Lösen durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{1-kv} = gdt; \int_{v_0}^{v} \frac{dv'}{1-kv'} = g\int_0^t dt' \tag{3}$$

$$\left[-\frac{1}{k}\ln(1-kv)\right]_{v_0}^{v} = -\frac{1}{k}\ln(1-kv) + \frac{1}{k}\ln(1-kv_0) = -\frac{1}{k}\ln\left|\frac{1-kv}{1-kv_0}\right| = gt \tag{4}$$

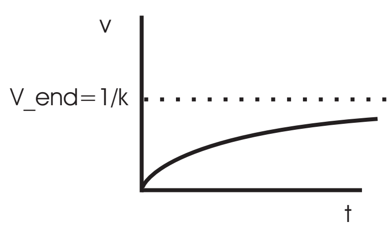
(Achtung oben: Minuszeichnen gedreht!)

$$\frac{1-kv}{1-kv_0} = e^{-kgt} \tag{5}$$

$$v(t) = \frac{1}{k}(1-(1-kv_0)e^{-gkt}) = \frac{gm}{C}(1-(1-kv_0)e^{-gkt}) \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit für große Zeiten $t \to \infty$.
Siehe auch Schlittenfahrtaufgabe letztes Übungsblatt!

$$\lim_{t\to\infty} \frac{gm}{C}(1-e^{-\frac{C}{m}t}) = \frac{gm}{C} \tag{7}$$



v(t) des Fallschirmspringers mit Grenzgeschwindigkeit $v_{end} = \frac{1}{k} = \frac{gm}{C}$; Zeichnung für $v_0 = 0$

(c) Ort $x(t)$
$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{1}{k}\int_0^t (1-(1-kv_0)e^{-kgt'})dt' =$
$\frac{1}{k}\left(t + (1-kv_0)\frac{1}{kg}e^{-kgt} - (1-kv_0)\right)$
$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{gm}{C}\int_0^t (1-(1-\frac{C}{gm}v_0)e^{-\frac{C}{m}t'})dt' =$
$\frac{gm}{C}\left(t + (1-\frac{C}{gm}v_0)\frac{m}{C}e^{-\frac{C}{m}t} - (1-\frac{C}{gm}v_0)\frac{m}{C}\right)$
$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = \frac{gm}{C}\left(t + (1-\frac{C}{gm}v_0)\frac{m}{C}\left(e^{-\frac{C}{m}t} - 1\right)\right)$

(d) Da die Geschwindigkeit gegen einen konstanten Wert geht, geht die Beschleunigung gegen 0, d.h. verschwindet.

2. Ein Affe und eine ebenso schwere leblose Masse m hängen wie skizziert über einer Seilrolle. Der Affe versucht am Seil hochzuklettern.

   (a) Diskutieren sie die Bewegung von Affe und Masse. (Venachlässigen sie dabei die Masse des Seils, die Reibung zwischen Seil und Rolle und die Ausdehnung der Umlenkrolle.
   A: Sowohl die Masse, als auch der Affe kommen gleichzeitig oben an. Actio=Reactio!
   Was passiert, wenn die leblose Masse nur halb so schwer wie der Affe ist?
   A: Der Affe fällt runter, die Masse saust nach oben!

   (b) Nun sei das Seil **massebehaftet**. Das Seil habe eine Länge von **l**=20 m und eine Masse von 20 kg. Der Affe wiegt 50 kg.
   A:
   Zu beschleunigende Masse: $m_{Affe}+m_{Seil}+m_{Masse} = m_A+m_S+m_M$
   Beschleunigende Masse (nur das zusätzliche Stück Seil auf der einen Seite, das während des Klettervorgangs zunimmt.):
   $\frac{l_{zus\ddot{a}tzlich}}{l} \cdot m_S = \frac{2 \cdot x}{l} \cdot m_S$, Die 2 kommt aus der Betrachtung der Ruhelage, die auf die 'Gleiche Seilhöhe von Affe und Masse' definiert ist.
   Newton 2:
   $(m_A + m_S + m_M) \cdot a = m_{ges} \cdot a = m_{ges} \cdot \ddot{x} = \frac{2x}{l} \cdot m_S \cdot g$

$$m_{ges} \cdot \ddot{x}(t) - \frac{2x(t)}{l} \cdot m_S \cdot g = 0 \tag{8}$$

Ansatz:

$$x(t) = A \cdot e^{ct} + B \cdot e^{-ct} \tag{9}$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot c \cdot e^{ct} - B \cdot c \cdot e^{-ct} \tag{10}$$

$$\ddot{x}(t) = A \cdot c^2 \cdot e^{ct} + B \cdot c^2 \cdot e^{-ct} \tag{11}$$

Nebenbedingungen: $x(0) = A \cdot e^0 + B \cdot e^0 = x_0 \Rightarrow A + B = x_0$
$\dot{x}(0) = A \cdot c \cdot e^0 - B \cdot c \cdot e^0 = 0 \Rightarrow A - B = 0$

$$\Rightarrow A = B = \frac{x_0}{2} \tag{12}$$

9, 11, 12 eingesetzt in 8:

$$\frac{x_0}{2}c^2 e^{ct} + \frac{x_0}{2}c^2 e^{-ct} - \frac{2m_S g}{m_{ges} l}\left(\frac{x_0}{2}e^{ct} + \frac{x_0}{2}e^{-ct}\right) = 0 \qquad | \cdot e^{ct} \cdot \frac{2}{x_0}$$

$$(c^2 - \frac{2m_S g}{m_{ges} l})e^{2ct} + (c^2 - \frac{2m_S g}{m_{ges} l}) = 0$$

$$\Rightarrow e^{2ct} + 1 = 0 \bigvee (c^2 - \frac{2m_S g}{m_{ges} l}) = 0 \quad \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{2m_S g}{m_{ges} l}}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{x_0}{2} e^{+\sqrt{\frac{2m_S g}{m_{ges} l}} t} + \frac{x_0}{2} e^{-\sqrt{\frac{2m_S g}{m_{ges} l}} t} \tag{13}$$

3. Gradient und Vektorfeld! Kraftfelder! Konservative Kraftfelder? Potentiale! Gradient; Rotation; ∇

(a) Bestimmen Sie aus dem räumlichen Potentialen $U(x,y,z)$ oder $U(r)$ mit $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ die zugehörigen Kraftfelder ($\vec{F}=\vec{\nabla}U(x,y,z)$). Handelt es sich um konservative Kräfte? ((Hinweis: Satz von Stokes: Prüfen Sie$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$)

i. $U(x,y,z)=x^2-2xy+z+U_0$

Gradient (grad): $\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot(x^2-2xy+z+U_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}(x^2-2xy+z+U_0)\\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2-2xy+z+U_0)\\ \frac{\partial}{\partial z}(x^2-2xy+z+U_0)\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}2x-2y\\ -2x\\ 1\end{pmatrix}$

Generell:
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a(x,y,z)\\ b(x,y,z)\\ c(x,y,z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}c(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial z}b(x,y,z)\\ \frac{\partial}{\partial z}a(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial x}c(x,y,z)\\ \frac{\partial}{\partial x}b(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial y}a(x,y,z)\end{pmatrix}$$

Check (Rotation; engl. curl):
$$\vec{\nabla}\times\begin{pmatrix}2x-2y\\ -2x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2x-2y\\ -2x\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}1-\frac{\partial}{\partial z}(-2x)\\ \frac{\partial}{\partial z}(2x-2y)-\frac{\partial}{\partial x}1\\ \frac{\partial}{\partial x}(-2x)-\frac{\partial}{\partial y}(2x-2y)\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Das Feld ist konservativ!

ii. $U(r)=\gamma\frac{m\cdot M}{r}$

Bemerkung: Hier wäre es besser ein Minuszeichen anzusetzen wie beim Gravitationspotential 'ublich und damit die Kraft anziegend ist. Das sollte mit den Studenten diskutiert werden.

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\gamma\frac{m\cdot M}{r}=\vec{\nabla}\gamma\frac{m\cdot M}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=-\frac{1}{2}\gamma\frac{m\cdot M}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\cdot\begin{pmatrix}2x\\ 2y\\ 2z\end{pmatrix}=$$
$$-\gamma\frac{m\cdot M}{r^3}\vec{r}=-\gamma\frac{m\cdot M}{r^2}\vec{e_r}$$

Check (Rotation; engl. curl):
$$-\vec{\nabla}\times\gamma\cdot m\cdot M\cdot\begin{pmatrix}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\\ \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\\ \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\end{pmatrix}=-\gamma\cdot m\cdot M\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\end{pmatrix}=$$
$$-\frac{\gamma\cdot m\cdot M}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}\cdot\begin{pmatrix}-3yz+3zy\\ -3zx+3xz\\ -3xy+yx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Das Feld ist konservativ!

iii. $U(r)=r$

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot r=\vec{\nabla}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{r}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Check (Rotation; engl. curl):

$$\vec{\nabla} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} \begin{pmatrix} -yz+zy \\ -zx+xz \\ -xy+yz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Das Feld ist konservativ!

(b) Wirbelfeld

Sie haben das Wirbelfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times \vec{r}$, mit $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$. Ist die Kraft konservativ? Berechnen Sie explizit ihre Rotation.

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Check (Rotation; engl. curl):

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}0 - \frac{\partial}{\partial z}\omega x \\ \frac{\partial}{\partial z}(-\omega y) - \omega - \frac{\partial}{\partial x}0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\omega x - \frac{\partial}{\partial y}(-\omega y) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega + \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Das Feld ist nicht konservativ!

(c) Einige weitere Felder; sind sie konservativ?

i. $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ b \end{pmatrix}$

Check (Rotation; engl. curl):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} ay \\ ax \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}b - \frac{\partial}{\partial z}ax \\ \frac{\partial}{\partial z}ay - \frac{\partial}{\partial x}b \\ \frac{\partial}{\partial x}ax - \frac{\partial}{\partial y}ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a - a \end{pmatrix}$$

Das Feld ist konservativ!

ii. $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 3z^2 \\ cosy \\ 2xy \end{pmatrix}$

Check (Rotation; engl. curl):

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \vec{\nabla} \times \begin{pmatrix} 3z^2 \\ cosy \\ 2xy \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}2xy - \frac{\partial}{\partial z}cosy \\ \frac{\partial}{\partial z}3z^2 - \frac{\partial}{\partial x}2xy \\ \frac{\partial}{\partial x}cosy - \frac{\partial}{\partial y}3z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 6z - 2y \\ 0 \end{pmatrix})$$

Das Feld ist nicht konservativ!

4. Auf einen Massenpunkt wirke in der xy-Ebene die Kraft $\vec{F} = (y^2 - x^2, 3xy)$. Man bestimme die von der Kraft bei der Bewegung des Massenpunktes vom Punkt (0,0) zum Punkt (2,4) entlang folgender Wege geleistete Arbeit:

   (a) von (0,0) nach (2,0) entlang der x-Achse und von dort parallel zur y-Achse zum Punkt (2,4)
   L:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} ds = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x dx + \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_y dy = \int_0^2 (0 - x^2) dx + \int_0^4 (3 \cdot 2y) dy$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[6\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = -\frac{8}{3} + 48 = 45\frac{1}{3}$$

   (b) von (0,0) nach (0,4) entlang der y-Achse und von dort parallel zur x-Achse zum Punkt (2,4)
   L:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} ds = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_y dy + \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x dx = \int_0^4 (3 \cdot 0 \cdot y) dy + \int_0^2 (16 - x^2) dx$$

$$= \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 32 - \frac{8}{3} = 29\frac{1}{3}$$

   (c) Auf der geraden Verbindungslinie beider Punkte **L:** Die Geradengleichung ist $y = 2x$. Wieder gilt wie oben:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} ds = \int_{y_1}^{y_2} \vec{F}_y dy + \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}_x dx$$

   wobei für die Kräfte nun gilt: $F_x = 2^2x^2 - x^2 = 3x^2$ und $F_y = 3xy = 3x2x = 6x^2$ und die Integration von F_x mittels einer Substitution erfolgt: $\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow dy = 2dx$:

$$\int_0^2 3x^2 dx + \int_0^2 6x^2 2dx = [5x^3]_0^2 = 40$$

   (d) entlang der Parabel $y = x^2$ **L:** Lösung analog zu (c): $y = x^2, F_y = 3x^3, F_x = x^4 - x^2$ und $\frac{dy}{dx} = 2x$. Dies ergibt für die geleistete Arbeit:

$$\int_0^2 (x^4 - x^2) dx + \int_0^2 3x^3 2x dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \left[6\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 42\frac{2}{15}$$

   Ist die Kraft konservativ?
   L: Die Kraft ist nicht konservativ!

5. Summe aus E_{pot} und E_{kin}

   (a) $F = m \cdot g$
   $E_{pot}(x) = -\int_{x(Bezugspunkt)}^{x} F(x')dx' = -\int_{x_{max}}^{x} m \cdot g \cdot dx' = -m \cdot g \cdot (x - x_{max})$
   $E_{kin}(x)$ aus $m\ddot{x} = m\dot{v} = mg$
   Separation der Variablen $\Rightarrow dv = g \cdot dt \Leftrightarrow v \cdot dv = v \cdot g \cdot dt = \frac{dx}{dt} g \cdot dt = g \cdot dx$
   $\Rightarrow \int_{v(x=0)=0}^{v(x)} v' \cdot dv' = g \int_{x=0}^{x} dx \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot (v(x))^2 = m \cdot g \cdot x$

   $E_{Ges} = E_{kin}(x) + E_{pot}(x) = m \cdot g \cdot x - m \cdot g \cdot (x - x_{max} = m \cdot g \cdot x_{max}) \neq f(x).$

   (b) $F = -Dx$
   $E_{pot} = -\int_{x(Bezugspunkt)}^{x} F(x')dx' = D \int_{x=0}^{x} x' \cdot dx' = \frac{1}{2} D \cdot x^2$
   $E_{kin}(x)$ aus $m \cdot \ddot{x} = m \cdot \dot{v} = -D \cdot x$
   $\Leftrightarrow m \cdot v \cdot dv = -D \cdot x \cdot v \cdot dt = -D \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} dt = -Dxdx$
   $\Rightarrow m \int_{v(x_{max})=0}^{v(x)} v' \cdot dv' = -D \int_{x_{max}}^{x} x' \cdot dx' \Rightarrow \frac{m}{2}(v(x))^2 = -\frac{D}{x}(x^2 - x_{max}^2) = E_{kin}(x)$
   $E_{Ges} = E_{kin}(x) + E_{pot}(x) = -\frac{1}{2} D(x^2 - x_{max}^2) + \frac{1}{2} Dx^2 = \frac{1}{2} x_{max}^2 \neq f(x).$

   Diese Aufgabe kann auch gelöst werden in dem der Schwingungansatz $x(t) = A \sin \omega t$ genutzt wird und beim Einsetzen ist dann $(\sin \omega t)^2 + (\cos \omega t)^2 = 1)$

Lexikon:
Trägheit (Erstes Newtonsches Gesetz)
Galileisches Trägheitsprinzip, beschreibt das Beharrungsvermögen oder die Trägheit der Körper:
Erstes Newtonsches Gesetz:
Ein Körper, auf den keine äussere Kraft wirkt, verändert seinen Impuls nicht.
$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const.$
$m = const. \Rightarrow \vec{v} = const.$
Grundgesetz der Dynamik (Zweites Newtonsches Gesetz)
Zweites Newtonsches Gesetz, (Aktionsprinzip), beschreibt, wie der Bewegungszustand eines Körpers durch auf ihn wirkende Kräfte verändert wird:
Zweites Newtonsches Gesetz: **Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ist die dadurch erfolgende Impulsänderung zur wirkenden Kraft proportional Die Impulsänderung geschieht in Richtung der Kraft**
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$
Drittes Newtonsches Gesetz (Reaktionsprinzip), stellt fest, dass zu jeder Kraft $\vec{F}$, die auf einen Körper 1 wirkt, eine zweite Kraft $\vec{F'}$ auftritt, die an einem anderen Körper 2 angreift und gleich groß, aber entgegengerichtet ist ,
Drittes Newtonsches Gesetz: **Zwei Körper üben aufeinander entgegengesetzt gleiche Kräfte aus**
$\vec{F} = -\vec{F'}$

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm