Klassische Experimentalphysik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 6; Übung am 2.Dezember (Mittwoch)

1. Aufgabe zur Erhaltung des Schwerpunktimpulses:

   144km/h=40m/s; $\vec{v}(t)_{auto} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40\frac{m}{s} \\ -g \cdot t \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t})_{\mathbf{CM}}$

   Aktueller Geschwindigkeitsvektor des Autos zum Zeitpunkt t=2s:

   $\vec{v}(t = 2s)_{auto} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ -20 \end{pmatrix} \frac{m}{s} = \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t} = \mathbf{2s})_{\mathbf{CM}}$

   Aktueller Ort $\vec{s}(t = 2s)_{auto} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \cdot (t = 2s) \\ \frac{g}{2}(t = 2s)^2 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 0 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix} m$

   Geschwindigkeitsvektoren der Teilchen im CMS nach der Explosion:

   $\vec{v}_{1_{CM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ -16 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$; $\vec{v}_{2_{CM}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -80 \\ 41 \end{pmatrix} \frac{m}{s}$;

   Erhaltung des Schwerpunktimpuls: $m_1 \cdot \vec{v}_{1_{CM}} + m_2 \cdot \vec{v}_{2_{CM}} + m_3 \cdot \vec{v}_{3_{CM}} = 0$

   $3 \cdot m_3 \cdot \vec{v}_{1_{CM}} + \frac{3}{2} \cdot m_3 \cdot \vec{v}_{2_{CM}} + m_3 \cdot \vec{v}_{3_{CM}} = 0$

   $3 \cdot \vec{v}_{1_{CM}} + \frac{3}{2} \cdot \vec{v}_{2_{CM}} + \vec{v}_{3_{CM}} = 0$

   $\Rightarrow \vec{v}_{3_{CM}} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 24 \\ -\frac{27}{2} \end{pmatrix} \frac{m}{s}$; $v_{1_{CM}}$, $v_{2_{CM}}$, $v_{3_{CM}}$ sind hier im CMS gegeben.

   Addiere $= \vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t})_{\mathbf{CM}}$ für $t > 2s$: (Def.: t'=0s bei t=2s)

   (Starte Zeit neu.):: $\Rightarrow \vec{v}(t')_1 = \begin{pmatrix} 0 + 0 \\ (32 + 40)\frac{m}{s} \\ (-16 - 20)\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72\frac{m}{s} \\ -36\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix}$;

   $\vec{v}(t')_2 = \begin{pmatrix} (1 + 0)\frac{m}{s} \\ (-80 + 40)\frac{m}{s} \\ (41 - 20)\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\frac{m}{s} \\ -40\frac{m}{s} \\ 21\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix}$;

   $\vec{v}(t')_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} + 0 \\ (24 + 40)\frac{m}{s} \\ (-\frac{27}{2} - 20)\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\frac{m}{s} \\ 64\frac{m}{s} \\ -\frac{67}{2}\frac{m}{s} - g \cdot t' \end{pmatrix}$

   Ortsvektoren: $\vec{s} = \int \vec{v}dt$

   $\vec{s}(t)_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 80m + 72\frac{m}{s} \cdot t' \cdot \\ -20m - 36\frac{m}{s} \cdot t' - g \cdot t' \cdot t' \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

   $\vec{s}(t')_2 = \begin{pmatrix} 1\frac{m}{s} \cdot t' \\ 80m - 40\frac{m}{s} \cdot t' \\ -20m + 21\frac{m}{s} \cdot t' - g \cdot t' \cdot t' \cdot \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

   $\vec{s}(t')_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\frac{m}{s} \cdot t' \\ 80m + 64\frac{m}{s} \cdot t' \\ -20m - \frac{67}{2}\frac{m}{s} \cdot t' - g \cdot t' \cdot t'\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   (a) Aufprall Teil 1: Bedingung $z_1(t') = -80m$:
   $-20 - 36 \cdot t' - g \cdot t' \cdot t' \cdot \frac{1}{2} = -80$

$t'^2 + 7,2t' - 12 = 0 \;\rightarrow\; t' = 1,4s$

Aufprall Teil 2: Bedingung $z_2(t') = 0m$:
$-20 + 21 \cdot t' - g \cdot t' \cdot t' \cdot \frac{1}{2} = 0$
$-5t'^2 + 21t' - 20 = 0 \;\rightarrow\; t'_1 = 1.46s < 2s;\; t'_2 = 2,75s > 2s$
t'_2 ist relevant.
Nur Teil 2 kommt der Klippe wieder zu nahe, deshalb erfolgt der Aufschlag oben auf der Klippe.
Aufprall Teil 3:Bedingung $z_3(t') = -80m$:
$-20 - \frac{67}{2} \cdot t' - g \cdot t' \cdot t' \frac{1}{2} = -80$
$t'^2 + 6,7t' - 12 = 0 \;\rightarrow\; t' = 1,47$
Auftreffpunkte:

$$\vec{s}(t'_{auftreff} = 1,4s)_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 180,8 \\ -80 \end{pmatrix} m;$$

$$\vec{s}(t'_{auftreff} = 2,75s)_2 = \begin{pmatrix} 2,75 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} m;$$

$$\vec{s}(t'_{auftreff} = 1,47s)_3 = \begin{pmatrix} -2,205 \\ 174,08 \\ -80 \end{pmatrix} m$$

(b) Der Schwerpunkt trifft an der Stelle, an der das Auto ohne die Explosion aufgetroffen wäre. Achtung, die Betrachtung des Schwerpunktimpulses klappt nur solange, bis eines der Teile irgendwo auftrifft, was ja mit einer ' äusseren' Kraft gleichzusetzen ist. Erweitert man das 3-Körper-System mit der Erde, bleibt der Schwerpunkt sowieso erhalten, dann ist die Erdanziehungskraft nur einer 'innere' Kraft.

(c) Der Zuschauer steht per Definition am Rande der Klippe, d.h. für y=0 ist er gefährdet. $\Rightarrow y_1 = 80 + 72 \cdot t' \neq 0$;
$y_2 = 80 - 40 \cdot t' = 0 \;\rightarrow\; t' = 2s$;
$y_3 = -20 - \frac{67}{2} - g \cdot t' \cdot t' \frac{1}{2} \neq 0$.
$\Rightarrow$ Teil 2 könnte als einziges Teil (Rückflug) den Beobachter treffen. Probe: t=2s einsetzen:

$$\vec{s}(t')_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} m$$

D.h. Ein genügend grosser Mensch (abhängig von der Größe des Teils), der ca. 2 m in pos. x-Richtung von der Absturzstelle entfernt steht, ist sehr wohl gefährdet, bei einer Teilmasse von 3/11 der Automasse(+'böse Jungs), 2s nach der Explosion bzw. 4s nach dem Absturz.

2. Batman, Joker und Mr. Freeze

   (a) Impuls Ball = Impuls Batman
   $m_K \cdot v_K = m_B \cdot v_{B,0} \Rightarrow v_K = v_{B,0} \cdot \frac{m_B}{m_K} = 1280 \frac{m}{s}$
   ein Überschallball!?!?!?!

   (b) Batman fängt den Ball zum Zeitpunkt $t_{Fangen} = t_F$
   $t_F \cdot v_K + t_F \cdot v_{B,0} = r$
   $\Rightarrow t_F = \frac{r}{v_K + v_{B,0}} = \frac{r}{v_{B,0} \cdot \left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)} = 0.088s$
   Batman hat echt gute Reflexe.
   Batman steht nach dem Fangen!
   $v_{Batman-nach-Wurf} = v_{B,2}$
   $v_{Kugel-nach-Batman-Wurf} = v_{K,2}$
   Batman fängt den Joker, wenn er mindestens genau so schnell am linken Rand des Eises ist, wie der Joker.
   Entfernung Joker-Rand: $r - t_F \cdot v_J$
   Entfernung Batmen-Rand: $2r - t_F \cdot v_{B,0}$
   (mit Impulserhaltung Wurf des Joker: $v_J = v_K \frac{m_K}{m_J} = v_{B,0} \frac{m_{B,0}}{m_K} \frac{m_K}{m_J} = v_{B,0} \frac{m_B}{m_J}$)

   $v_{K,2} = ?$
   $\frac{r - t_F \cdot v_J}{v_J} = \frac{2r - t_F \cdot v_{B,0}}{v_{B,2}}$ = Zeit bis Festnahme.

   $\Rightarrow v_{B,2} = v_J \cdot \frac{2r - t_F \cdot v_{B,0}}{r - t_F \cdot v_J}$

   Batman wirft (Impulserhaltung): $m_K \cdot v_{K,2} = m_B \cdot v_{B,2}$
   $v_{K,2} = v_{B,2} \cdot \frac{m_B}{m_K} = \frac{m_B}{m_K} \cdot v_J \cdot \frac{2r - t_F \cdot v_{B,0}}{r - t_F \cdot v_J}$

   $= \frac{m_B}{m_K} \cdot v_{B,0} \cdot \frac{m_B}{m_J} \cdot \frac{2r - t_F \cdot v_{B,0}}{r - t_F \cdot v_{B,0} \cdot \frac{m_K}{m_J}}$

   $\left(\text{mit } t_F = \frac{r}{v_{B,0} \cdot \left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)} \right)$

   $= \frac{m_B^2}{m_K \cdot m_J} \cdot v_{B,0} \cdot \frac{2r - \frac{r}{v_{B,0} \cdot \left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)} \cdot v_{B,0}}{r - \frac{r}{v_{B,0} \cdot \left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)} \cdot v_{B,0} \cdot \frac{m_K}{m_J}}$
   (kürze r und $v_{B,0}$)

   $v_{K,2} = \frac{m_B^2}{m_K \cdot m_J} \cdot v_{B,0} \cdot \frac{2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)}}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{m_B}{m_K}\right)} \cdot \frac{m_K}{m_J}} = 3431 \frac{m}{s}$
   unabhängig von r und noch viel schneller als der Joker geworfen hat!

3. Elastischer Stoß
   Es gilt: Impulserhaltung und Energieerhaltung
   Vorgehen: getrennte Betrachtung zweier Stoßprozesse
   $I: m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$ mit $v_2 = 0$
   $\rightarrow m_1 \cdot v_1 = m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'$ aus Impulserhaltung
   $\rightarrow \frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2$ aus Energieerhaltung
   Sortieren nach m_1 und m_2: $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2$
   $m_1(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = m_2 v_2'^2$ und
   $m_1(v_1 - v_1' = m_2 v_2'$
   $\Rightarrow v_1 + v_1' = v_2'$
   v_1' eliminieren: $m_1 v_1 - m_1(v_2' - v_1) = m_2 v_2'$
   $\Rightarrow v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$
   Analog 2. Stoßprozess:
   II. $v_3 = \frac{2m_2 v_2'}{m_2 + m_3}$
   $v_3 = \frac{2m_2}{m_2+m_3} \cdot \frac{2m_1}{m_1+m_2} \cdot v_1$
   $v_3 = \frac{4m_1 m_2}{(m_2+m_3)(m_1+m_2)} \cdot v_1$
   v_3 soll maximal werden bei bestimmten m_2:
   $\frac{dv_3}{dm_2} = 0 = \frac{(m_2+m_3)(m_1+m_2) - m_2 \cdot (m_1 + 2m_2 + m_3)}{(m_2+m_3)^2 \cdot (m_1+m_2)^2} \cdot 4 \cdot m_1 \cdot v_1$

   $\frac{dv_3}{dm_2} = 0 = \frac{m_2 m_1 + m_2^2 + m_3 m_1 + m_3 m_1 - m_1 m_2 - 2m_2^2 - m_2 m_3}{(m_2+m_3)^2 \cdot (m_1+m_2)^2} \cdot 4 \cdot m_1 \cdot v_1$
   $\frac{dv_3}{dm_2} = 0 = \frac{(-m_2^2 + m_3 m_1)}{(m_2+m_3)^2 \cdot (m_1+m_2)^2} \cdot 4 \cdot m_1 \cdot v_1$

   Zähler =0

   $m_2^2 = m_3 m_1$
   $\Rightarrow m_2 = \sqrt{m_3 m_1}$
   Prüfe auf Maximum! $\frac{d^2 v_3}{dm_2^2} < 0$ an der Stelle m_2
   $\frac{d^2 v_3}{dm_2^2} = \frac{-2m_2(m_2+m_3)^2(m_1+m_2)^2 - (m_3 m_1 - m_2^2) \cdot \frac{d}{dm_2}[(m_2+m_3)^2(m_1+m_2)^2]}{(m_2+m_3)^4(m_1+m_2)^4} \cdot 4 \cdot m_1 \cdot v_1$
   Diskussion: $-2m_2(m_2+m_3)^2(m_1+m_2)^2 < 0$;
   $(m_3 m_1 - m_2^2) = 0$ für $m_2 = \sqrt{m_3 m_1}$ deshalb ist $\frac{d}{dm_2}[(m_2+m_3)^2(m_1+m_2)^2]$ EGAL.

   1. Teil der Zählers negativ, zweiter Teil der Differenz Null für $m_2^2 = m_1 m_3$
   $\Rightarrow \frac{d^2 v_3}{dm_2^2} < 0 \Rightarrow$ Maximum.

4. Zwischen Münchhausen und dem Radfahrer besteht ein wesentlicher Unterschied. Wenn man der Erzählung glaubt, 'gelänge es Münchhausen durch eigene Anstrengungen (man kann sie als innere Kräfte bezeichnen), den Schwerpunkt des aus Reiter und Pferd bestehenden Systems über die Erdoberfläche zu heben.' Das widerspricht den physikalischen Gesetzen und ist deshalb nicht möglich. Der Radfahrer dagegen, der die Lenkstange zu sich heranzieht und dabei das Rad von der Erdoberfläche abhebt, führt zwei Vorgänge gleichzeitig aus: Er hebt das Lenkrad zu sich heran und nähert sich dabei mit seinem Körper der Erde. Dabei verbleibt der Schwerpunkt des Systems Radfahrer – Fahrrad in der ursprünglichen Lage.

5. Addition von Geschwindigkeiten und die damit erreichte kinetische Energie. Damit, dass die Energie des Geschosses in den Bezugsystemen Erde und Zug verschieden ist, kann man M.Malin nicht widerlegen. Er zieht den Schluss im Wald ja nur zum Vergleich heran, sonst argumentiert er konsequent im Bezugssystem Zug. Man darf aber nicht vergessen, dass Cinglé und TGV beim Abstoss einen Rückstoß erfahren, also verlangsamt werden, wenn auch völlig unmerklich, nämlich um $w = \frac{mv}{M}$: (M:Masse des Zuges). Damit verringert sich die kinetische Energie des Zuges um $\frac{1}{2}Mv^2 - \frac{1}{2}M(v-w)^2 = Mwv = mv^2$, und dies sind die zwei fehlenden 'Einheiten', die dem Geschoss zugute kommen müssen.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm