Klassische Experimentalphysik I – Mechanik

Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

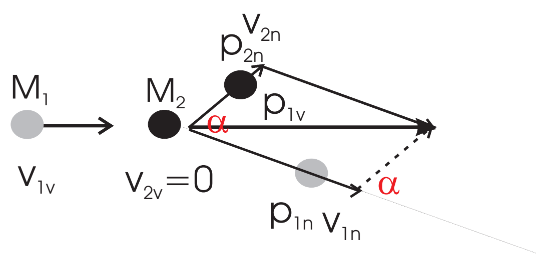
Aufgabenblatt 7; Übung am 09.Dezember (Mittwoch)

1. Unfall:

   (a) Bewegungszustand:
   $30km/h = \frac{30000}{3600}\frac{m}{s} = 8,3\frac{m}{s}; 70km/h = 19,4\frac{m}{s}$
   Impulssatz:
   $$m_k\vec{v}_k + m_l\vec{v}_l = (m_k + m_l)\vec{v}_{Unfall}$$
   $$\vec{v}_{Unfall} = \frac{m_k\vec{v}_k + m_l\vec{v}_l}{m_k + m_l}$$
   Mit Zahlen:
   $$\vec{v}_{Unfall} = \frac{500kg \cdot \begin{pmatrix} 19,4 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{m}{s} + 1000kg \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8.3 \end{pmatrix}\frac{m}{s}}{1500kg} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot 19,4 \\ \frac{2}{3}\cdot 8.3 \end{pmatrix}\frac{m}{s}$$

   (b) Dissipierte Energie:
   $$E_{DIS} = E_{K_{vorher}} - E_{K_{nachher}}$$
   mit ($\vec{v}_l \cdot \vec{v}_k = v_l \cdot v_k \cos 90^o = 0$), d.h. gemischtes Glied im Binomen fällt weg:
   $$E_{DIS} = \frac{1}{2}\left(m_k v_k^2 + m_l v_l^2 - \frac{(m_k\vec{v}_k + m_l\vec{v}_l)^2}{m_k + m_l}\right)$$
   $$E_{DIS} = \frac{1}{2}\left(m_k v_k^2 + m_l v_l^2 - \frac{m_k^2 v_k^2 + m_l^2 v_l^2}{m_k + m_l}\right)$$
   $$E_{DIS} = \frac{1}{2}\frac{m_k^2 v_k^2 + m_k m_l v_k^2 + m_l^2 v_l^2 + m_k m_l v_l^2 - m_k^2 v_k^2 - m_l^2 v_l^2}{m_k + m_l}$$
   $$E_{DIS} = \frac{1}{2}\frac{m_k \cdot m_l}{m_k + m_l}(v_k^2 + v_l^2) = E_{Verformung} = E_{BremsunginnerhalbKnautschzone}$$
   Mit Zahlen:
   $$E_{DIS} = \frac{1}{2}\frac{500 \cdot 1000}{1500}(19.4^2 + 8,3^2)J = E_{Verformung} = E_{Bremsung-innerhalb-Knautschzone}$$
   $$E_{DIS} = 74208J \approx 74kJ$$

2. Vektorstoss
   Achtung Rechnung erfolgt komplett mit Vektoren, nicht mit Beträgen!



(a) Impulserhaltung:

$$\vec{p}_{v1} + \vec{p}_{v2} = \vec{p}_{n1} + \vec{p}_{n2}; \qquad \vec{p}_{v2} = 0 \tag{1}$$

Energieerhaltung:

$$E_{kin_{v1}} + E_{kin_{v2}} = E_{kin_{n1}} + E_{kin_{n2}}; \qquad E_{kin_{v2}} = 0 \tag{2}$$

Energie-Impuls-Beziehung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2; \quad \vec{p} = m\vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad E_{kin} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \tag{3}$$

Damit kann man die Energieerhaltung auch schreiben als

$$\frac{|\vec{p}_{v1}|^2}{2m_1} = \frac{|\vec{p}_{n1}|^2}{2m_1} + \frac{|\vec{p}_{n2}|^2}{2m_2}. \tag{4}$$

Die Impulserhaltung (1) kann man mit Hilfe der binomischen Formel quadrieren um sie danach in (4) einsetzen zu knnen.

$$|\vec{p}_{v1}|^2 = (\vec{p}_{n1} + \vec{p}_{n2})^2 = |\vec{p}_{n1}|^2 + 2\vec{p}_{n1}\vec{p}_{n2} + |\vec{p}_{n2}|^2 \tag{5}$$

Mit dem Cosinussatz/ Skalarprodukt ($\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$) ist das

$$|\vec{p}_{v1}|^2 = |\vec{p}_{n1}|^2 + 2\,|\vec{p}_{n1}|\,|\vec{p}_{n2}|\cos\alpha + |\vec{p}_{n2}|^2\,. \tag{6}$$

Eingesetzt (in (4) Energiererhaltung):

$$|\vec{p}_{n1}|^2 + 2\,|\vec{p}_{n1}|\,|\vec{p}_{n2}|\cos\alpha + |\vec{p}_{n2}|^2 = |\vec{p}_{n1}|^2 + \frac{m_1\,|\vec{p}_{n2}|^2}{m_2} \tag{7}$$

Löst man dies nach dem Cosinus auf erhält man

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{p}_{n2}|}{2\,|\vec{p}_{n1}|}\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) = \frac{v_{n2}}{2v_{n1}}\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \tag{8}$$

$\alpha > 90^o \Rightarrow \cos\alpha < 0$; und $p_{2n}, p_{1n} > 0$
$\Rightarrow \left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) < 0 \Rightarrow m_1 < m_2$
$\alpha > 90^o \Rightarrow m_1 < m_2$
$\alpha = 90^o \Rightarrow m_1 = m_2$
$\alpha < 90^o \Rightarrow m_1 > m_2$

(b) Impulsübertrag:

Gute Diskussion im Lehrbuch Demtröder.

Der Impulsbertrag ist die Änderung des Impulses von Teilchen m_1 oder Teilchen m_2, also

$$\Delta p = \vec{p}_{n1} - \vec{p}_{v1} = p_{2n} - p_{2v} = p_{2n} \tag{9}$$

$$p_{n2} = \frac{2p_{n1}\cos\alpha}{\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right)}. \tag{10}$$

$m_1 = m_2$ kann nicht direkt eingesetzt werden, ausserdem ist dafür (siehe oben) der Winkel 90^o also auch der Cosinus gleich 0 - Fall $\frac{0}{0}$.

Für Werte $m_1 \neq m_2$ können jeweils unterschiedliche Winkel realisiert werden. Der maximale Winkel ist allerdings generell abhängig von den Massenverhältnissen $\frac{m_1}{m_2}$.

Der Impulsübertrag wird (für $m_1 \neq m_2$) maximal bei $\alpha = \pi = 180$.

Siehe oben $\alpha > 90^o \Rightarrow m_1 < m_2$

Der Impulsübertrag ist bei einem Aufprallwinkel von 180 maximal

Im Falle eines zentralen Stosses (Maximum) – Rückstreuung.

Dies passiert im Falle $m_1 \ll m_2$, z.B. Ball auf Wand: Ball prallt mit gleicher Geschwingdigkeit (BETRAG) zurück $\vec{p}_{n1} = -\vec{p}_{v1}$

$\Delta p = 2 * \vec{p}_{v1}$

Die Wand nimmt den Implus $2 * \vec{p}_{v1}$ jedoch keine Energie auf.

Im nichtzentralen Fall ist der Impulsübertrag kleiner als im zentralen Fall!

Ausserdem:

Im Falle eines zentralen Stosses mit $m_1 = m_2$ wird der gesamte Impuls der ersten Kugel auf die zweite übertragen. Die erste Kugel bleibt liegen ($v = 0 = \vec{p}_{n1}$) und die zweite rollt mit $\vec{p}_{n2} = \vec{p}_{v1}$ von ihr weg.

$\Delta p = \vec{p}_{v1}$ (siehe auch Vorlesung)

3. Rakete

(a) Die anfängliche Treibstoffmasse ist $m_T = 0,80 m_0 = 2 \cdot 10^5 kg$. Daraus folgt als Brenndauer $t_E = \frac{m_T}{\mu} = 200s$

(b) Für $t = t_E$ ist die Endmasse bei Brennschluss $M_E = m_o - m_T = 0,5 \cdot 10^5 kg$, womit sich ein Massenverhältnis zun $Z = \frac{m_o}{m_E} = 5$ ergibt.
Zunächst betrachten wir eine Rakete im freien All, ohne Schwerebeschleunigung:
Die Beschleunigung der Rakete erfolgt durch den Rückstoß der ausströmenden Treibgase. In der Zeit dt wird die Treibstoffmenge dm mit der Geschwindigkeit c ausgestossen. Da der Gesamtimpuls konstant bleibt, muß die Rakete selbst den gleichen Impuls aufnehmen, der ihre Geschwindigkeit v um dv erhöht: $c \cdot dm = -m \cdot dv$, oder nach Division durch dt

$$-c\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} \tag{11}$$

Das Minuszeichen stammt nicht aus den Geschwindigkeitsrichtungen, sondern aus dm, das als Massenänderung der Rakete negativ zu nehmen ist. Gleichung (11) stellt die effektive Kraft auf den Raketenkörper dar, die technisch Schub genannt wir: Der Schub ist das Produkt von Ausströmrate $-\frac{dm}{dt} = \mu$ und Auströmgeschwindigkeit c.
Bei dem Massenverlust $\frac{dm}{dt}$ nimmt die Raketenmasse vom Anfangswert m_0 auf m ab, um die Geschwindigkeit v zu erreichen. Aus (11) folgt bei konstantem c :

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{c}\frac{dv}{dt} \tag{12}$$

d.h. integriert.

$$\ln\frac{m}{m_0} = -\frac{v}{c};\ oder\ m = m_0 \cdot e^{-\frac{v}{c}},\ oder\ v = c\ln\frac{m_0}{m} \tag{13}$$

Jetzt noch die Gravitation mit betrachtet und m_E, t_E eingesetzt:

$$v = v_0 + c \cdot ln\frac{m_0}{m_E} - g \cdot t_E \tag{14}$$

Allgemein kommt hier noch v_0 als Integrationskonstante dazu, ist in unserem Fall aber Null. Die Endgeschwindigkeit einer kräftefreien Rakete im schwerelosen Raum ist also $v_E = c \cdot lnZ$: Beim Start von der Erde aus ist diese um die Fallgeschwindigkeit $g \cdot t_E$ verringert; bei unserer Rakete beträgt sie also
$v_E = c \cdot lnZ - g \cdot t_E = 2,87 km/s$ für $v_0 = 0$.

(c) Die momentane Raketenmasse ist $m(t) = m_0 - \mu t$, und die momentane Raketengeschwindigkeit

$$v(t) = c \cdot ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt. \tag{15}$$

Daraus folgt als momentane Beschleunigung

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{c\mu}{m_0 - \mu t} - g = \frac{c\alpha}{1 - \alpha t} - g \tag{16}$$

Mit $\alpha = \frac{\mu}{m_0} = 4 \cdot 10^{-3} s^{-1}$ erhält man als Startbeschleunigung $(t = 0)$ $a_0 = 0,22g$ und als Endbeschleunigung $(t = t_E = 200s)$ $a_0 = 5.1g$.

(d) Die Schubkraft ist $F_s = c\mu = 3MN$.

(e) Für die in der Zeit t erreichte Höhe folgt wegen $v = \frac{dh}{dt}$ aus 15

$$h(t) = \int_0^t v(t)dt = c\int_0^t ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t}dt - g\int_0^t tdt = -c\int_0^t ln[1-\alpha t]dt - \frac{1}{2}gt^2 \tag{17}$$

Substitution:$1 - \alpha t = z, dt = -\frac{dz}{\alpha}$:

$$\int ln[1 - \alpha t]dt = -\frac{1}{\alpha}\int lnzdz \tag{18}$$

Durch partielle Integration $\int udv = uv - \int vdu$ erhält man mit $u = lnz,\ dy = \frac{dz}{z};\ dv = dz,\ v = z.$
$\int lnzdz = zlnz - z + C$
Für das Integral 18 folgt damit nach Rücksubstitution und Beachtung der Integrationsgrenzen

$$\int_0^t ln[1 - \alpha t]dt = \left(\frac{1}{\alpha} - t\right) ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - t \tag{19}$$

und somit nach 17 für $t \leq t_E$ als Steighöhe der Rakete

$$h(t) = ct - c\left(\frac{1}{\alpha} - t\right) ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - \frac{g}{2}t^2. \tag{20}$$

Bei Brennschluss ($t = t_E = 200s$) ist h=162km.

(f) Aufrgund ihrer Geschwindigkeit v_E bei Brennschluss steigt die Rakete noch um die Höhe $H = \frac{v_E^2}{2g} = 418,7km$ (folgt aus $v_E = \sqrt{2gH}$) die maximale Steighöhe beträgt also h+H=581,1km.

(g) Die insgesamt benötigte Steigzeit ist die Summe aus Brenndauer t_E und nachfolgender Steigzeit $T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 292$ (folgt aus $H = \frac{gT^2}{2}$), also $t_E + T = 492s = 8$ min 12 s.

4. Schwerpunkt Scheibe

(a) Grundidee: man nehme eine komplette Scheibe $S1$mit Dichte ρ und Radius R im Nullpunkt und Schwerpunkt $SP1$ plus eine weitere Schreibe $S2$ mit der Dichte ρ und Radius $R/2$ und Schwerpunkt $SP2$ damit hat man quasi die hälfte der Masse der kleinen Scheibe in die große Schiebe integriert und rechnet die andere Massenhälfte der kleinen Scheibe $S2$ extra.
Der Schwerpunkt Y ist trivial aus Symmetriegründen bei $Y = 0$ Mittelpunkte der Scheiben oder
$Y_{SP} = \frac{m_1 \cdot Y_{SP1} + m_2 \cdot Y_{SP2}}{m_1 + m_2} = \frac{0+0}{m_1+m_2}$
Der X Schwerpunkt ist offensichtlich versetzt da keine Symmetrie:
$X_{SP} = \frac{m_1 \cdot X_{SP1} + m_2 \cdot X_{SP2}}{m_1 + m_2} = \frac{\rho\pi R^2 X_{SP1} + \rho\pi \frac{R}{2}^2 X_{SP2}}{\rho\pi R^2 + \rho\pi \frac{R}{2}^2}$
mit $X_{SP1} = 0$ und $X_{SP2} = +\frac{R}{2}$ wie gehabt aus symmetriegründen - Mittelpunkte der Scheiben.
$= \frac{\rho\pi \frac{R}{2}^2 \cdot \frac{R}{2}}{\rho\pi R^2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \frac{R}{10}$
$\rightarrow$ SP $= (\frac{R}{10}, 0)$

(b) Simuliere Loch als Scheibe negativer Massendichte
Der Schwerpunkt Y ist wieder trivial aus Symmetriegründen be $Y = 0$ oder
$Y_{SP} = \frac{m_1 \cdot Y_{SP1} + m_2 \cdot Y_{SP2}}{m_1 + m_2} = \frac{0+0}{m_1+m_2}$
Der X Schwerpunkt ist offensichtlich versetzt da keine Symmetrie:
$X_{SP} = \frac{m_1 \cdot X_{SP1} + m_2 \cdot X_{SP2}}{m_1 + m_2} = \frac{\rho\pi R^2 X_{SP1} - \rho\pi \frac{R}{2}^2 X_{SP2}}{\rho\pi R^2 - \rho\pi \frac{R}{2}^2}$
mit $X_{SP1} = 0$ und $X_{SP2} = +\frac{R}{2}$ wie gehabt aus symmetriegründen - Mittelpunkte der Scheiben.
$= \frac{= \rho\pi \frac{R}{8}^3}{\rho\pi R^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)} = -\frac{R}{6}$

$\rightarrow$ SP $= (-\frac{R}{6}, 0)$

5. Integrale - Massen, Schwerpunkt und Trägheitsmomente

(a) Masse, Volumen, Schwerpunkt

Der Ursprung sei in der Spitze und die z-Achse falle mit der Symmetrieachse zusammen. Für das Gesamtvolumen erhält man nach Transformation auf Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} V &= \int_K d(x,y,z) = \int_{\vartheta=0}^{\theta}\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 sin\vartheta d\varphi dr d\vartheta \\ &= 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\theta}\int_{r=0}^{R} r^2 sin\vartheta dr d\vartheta \\ &= 2\pi\frac{R^3}{3}\int_{\vartheta=0}^{\theta} sin\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{2\pi}{3}R^3(1-cos\theta) \end{aligned}$$

Die Masse ist einfach $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{2\pi}{3}R^3(1-cos\theta)$

Die Masse der Vollkugel erhält man für $\theta = \pi \Rightarrow \frac{4}{3}\pi\rho R^3$

Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen (Wahl der Achse; siehe oben) auf der z=Achse.

Für seine z-Koordinate, also für seinen Abstand r_s von der Spitze erhält man;

$$\begin{aligned} M\cdot r_s &= \rho\int_K zd(x,y,z) = \rho\int_{\vartheta=0}^{\theta}\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} rcos\vartheta r^2 sin\vartheta d\varphi dr d\vartheta \\ &= 2\pi\frac{R^4}{4}\int_{\vartheta=0}^{\theta} cos\vartheta sin\vartheta d\vartheta \\ &= \frac{\pi R^4}{4}sin^2\theta \end{aligned}$$

$$r_s = \frac{\pi R^4}{4}sin^2\theta\frac{3}{2\pi}\frac{1}{\rho R^3(1-cos\theta)} = \frac{3}{8}R\frac{sin^2\theta}{(1-cos\theta)} = \frac{3}{8}R(1+cos\theta) \quad (21)$$

mit $sin^2x + cos^2x = 1$

(b) Trägheitsmoment

Für das Trägheitsmoment des Sektors S bzgl. der Symmetrieachse (also der z-Achse) erhält man mit Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} J_z &= \rho\int(Abstand-zu-zAchse)^2 d(x,y,z) = \rho\int(x^2+y^2)d(x,y,z) \\ &= \rho\int_{\vartheta=0}^{\theta}\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 sin^2\vartheta r^2 sin\vartheta d\varphi dr d\vartheta \\ &= 2\pi\int_{\vartheta=0}^{\theta}\int_{r=0}^{R} r^4 sin^3\vartheta d\vartheta dr \\ &= \frac{2\pi}{5}\rho R^5\left(\frac{2}{3} - cos\theta + \frac{1}{3}cos^3\theta\right) \end{aligned}$$

oben mit $x = rsin\theta cos\varphi$, $y = rsin\theta sin\varphi$ und $z = rcos\theta$ und $sin^2x + cos^2x = 1$

Vollkugel als Test ($\theta = \pi$):

$$\begin{aligned} J_z &= \frac{2\pi}{5}\rho R^5 \left(\frac{2}{3} - (-1) + \frac{1}{3}(-1)\right) \\ &= \frac{8\pi}{15} R^5 \rho = \frac{2}{5} M R^2 \end{aligned}$$

Die Trägheitsmomente des Sektors bzgl. aller Achsen in der (x,y)-Ebene durch seine Spitze sind gleich. Z.B. das Trägheitsmoment bezgl. der x-Achse

$$\begin{aligned} J_x &= \rho \int (Abstand - zu - xAchse)^2 d(x,y,z) = \rho \int (y^2 + z^2) d(x,y,z) \\ &= \rho \int_{\vartheta=0}^{\theta} \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [(r sin\vartheta sin\varphi)^2 + (r cos\vartheta)^2] r^2 sin\vartheta d\varphi dr d\vartheta \\ &= \frac{\rho R^5}{5} \int_{\vartheta=0}^{\theta} \int_{\varphi=0}^{2\pi} [sin^3\vartheta sin^2\varphi + cos^2\vartheta sin\vartheta] d\varphi d\vartheta \\ &= \frac{\pi \rho R^5}{5} \int_{\vartheta=0}^{\theta} [sin^3\vartheta + 2cos^2\vartheta sin\vartheta] d\vartheta \\ &= \frac{\pi \rho R^5}{5} \left[\frac{4}{3} - cos\theta - \frac{1}{3} cos^3 theta\right] \end{aligned}$$

Für die Vollkugel als Test ($\theta = \pi$) ergibt sich dasselbe Ergebnis wie oben!

6. Ei

Das rohe Ei ist schneller als das gekochte.
Begründung: Beim gekochten Ei nimmt das ganze Ei an der Rotation teil. Beim rohen Ei rotiert die Schale, die Flüssigkeit hingegen führt nur eine Translation aus. Das heißt bei gekochten Eiern steckt mehr Energie in der Rotation und deshalb ist die kinetische Energie der Translation kleiner, es ist also langsamer.
Bemerkung: Angeblich kann man so auch die Frische der Eier überprüfen: je frischer desto flüssiger.

Wer mag!!

1. Tarzan und Jane
   Für Männer:

   (a)
   $$E_{tot} = M_T gh = \frac{1}{2} M_T v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 14\frac{m}{s} \tag{22}$$

   (b) Inelastische Kollision:
   Impulserhaltung:
   $$M_T v_0 = (M_T + M_J) v_{gemeinsam-M} \tag{23}$$

   $M_J = \frac{1}{2} M_T$; $M_G = \frac{3}{2} M_T$
   $v_{gemeinsam-M} = \frac{M_T}{M_T + \frac{1}{2} M_T} v_0 = \frac{2}{3} v_0$
   Jetzt:
   $$E_{tot} = \frac{1}{2}(M_T + \frac{1}{2} M_T) v_{gemeinsam-M}^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} M_T) v_{gemeinsam-M}^2 = (M_T + \frac{1}{2} M_T) gh' \tag{24}$$
   $$\Rightarrow h' = \frac{v_{gemeinsam-M}^2}{2g} = \frac{2}{9g} v_0^2 = \frac{4}{9} h = 4.4m \tag{25}$$

   (c) Während des Stoßvorgangs gilt Impulserhaltung. Das heißt, die Summe der Impulse vor dem Stoß mußs gleich dem Impuls nach dem Stoß sein. Die kinetische Energie ist dagegen nur bei vollständig elastischen Stößen erhalten. Bei (wie in der Aufgabe zu betrachtenden) unelastischen Stößen wird ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt. Da Energieerhaltung gilt, muß die Differenz aus kinetischer Energie vor und nach dem unelastischen Stoß der beim Stoß entwickelten Wärmemenge entsprechen.
   Damit ergibt sich:
   $E_Q = E_{kin-vorher} - E_{kin-nachher} = E_{TOT} - E_{kin-nachher}$ mit:
   $$E_Q = M_T gh - \frac{1}{2}(M_T + M_J) v_{gemeinsam-M}^2 \tag{26}$$

   Für Damen:

   (a)
   $$E_{tot} = M_J gh = \frac{1}{2} M_J v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 14\frac{m}{s} \tag{27}$$

   (b) Inelastische Kollision:
   Impulserhaltung:
   $$M_J v_0 = (M_T + M_J) v_{gemeinsam-F} \tag{28}$$

   $M_J = \frac{1}{2} M_T$; $M_G = \frac{3}{2} M_T$
   $v_{gemeinsam-J} = \frac{M_J}{M_T + \frac{1}{2} M_T} v_0 = \frac{2}{6} v_0$
   Jetzt:
   $$E_{tot} = \frac{1}{2}(M_T + \frac{1}{2} M_T) v_{gemeinsam-F}^2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} M_T) v_{gemeinsam-F}^2 = (M_T + \frac{1}{2} M_T) gh' \tag{29}$$
   $$\Rightarrow h' = \frac{v_{gemeinsam-F}^2}{2g} = \frac{2}{36g} v_0^2 = \frac{4}{36} h = 1.1m \tag{30}$$

(c) Während des Stoßvorgangs gilt Impulserhaltung. Das heißt, die Summe der Impulse vor dem Stoß muss gleich dem Impuls nach dem Stoß sein. Die kinetische Energie ist dagegen nur bei vollständig elastischen Stößen erhalten. Bei (wie in der Aufgabe zu betrachtenden) unelastischen Stößen wird ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt. Da Energieerhaltung gilt, muß die Differenz aus kinetischer Energie vor und nach dem unelastischen Stoß der beim Stoß entwickelten Wärmemenge entsprechen.
Damit ergibt sich:
$E_Q = E_{kin-vorher} - E_{kin-nachher} = E_{TOT} - E_{kin-nachher}$ mit:

$$E_Q = M_J gh - \frac{1}{2}(M_T + M_J)v^2_{gemeinsam-J} \tag{31}$$

	Männer	Frauen	Unterschiede
v_0	$v_0 = 14\frac{m}{s}$	$v_0 = 14\frac{m}{s}$	–
$v_{gemeinsam}$	$\frac{2}{3}v_0 = 9,4m/s$	$\frac{2}{6}v_0 = 4,7m/s$	Faktor 1/2
h'	4.4m	1.1m	Faktor 1/4
E_Q	2666,7J	2666,7J	1

(d) DGL

i. Trennung der Veränderlichen

.6 *Man löse die DGL* $\boxed{y' = -2x(y^2 - y)}$ *durch T.d.V.*

Hier ist $f(x) = -2x$ und $g(y) = y^2 - y$.

(1) Nullstellen von $g(y)$: $y^2 - y = y(y-1) = 0 \Longrightarrow y_1 = 0,\ y_2 = 1$.
Die konstanten Funktionen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ sind Lösungen. Man nennt sie auch *partikuläre* Lösungen.

(2) T.d.V. ergibt: $\dfrac{dy}{y(y-1)} = -2x\,dx \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int -2x\,dx$.

$\displaystyle\int \frac{dy}{y(y-1)} = \ln\left|\frac{y-1}{y}\right|$ (PBZ, Seite 68, 69) und $\displaystyle\int -2x\,dx = -x^2$.

$\Longrightarrow \ln\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = -x^2 + k$ **In k ist die Integrationskonstante der linken Seite mit enthalten!**

$\left|\dfrac{y-1}{y}\right| = e^{-x^2+k} = e^k e^{-x^2}$

$\dfrac{y-1}{y} = c \cdot e^{-x^2}$, wobei $c = \pm e^k$, also $c \neq 0$ ist.

Man kann nach y auflösen: $y = \dfrac{1}{1 - ce^{-x^2}}$, $c \neq 0$.

Diese Lösungsschar liefert für $c = 0$ die partikuläre Lösung $y = 1$.

Die Gesamtlösung besteht also aus der Schar $y = \dfrac{1}{1 - ce^{-x^2}}$, $c \in \mathbb{R}$ und der partikulären Lösung $y = 0$.

Bemerkung: Die Kurven der Schar ($c \neq 0$) münden in diesem Beispiel nicht in die partikulären Lösungen $y = 0$ oder $y = 1$ ein!

ii. Lineare DGL 1. Ordnung mit Anfangswertproblem

16.25 *Man löse die AWA* $\boxed{y' + \frac{1}{2x}y = \sqrt{x}\sin x,\ y(\pi) = 2\sqrt{\pi}}$.

(H) Die homogene DGL ist $y' + \dfrac{1}{2x}y = 0$, $x > 0$.

$\displaystyle\int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln x,\ x > 0 \Longrightarrow y_H = ce^{-\frac{1}{2}\ln x} \Longrightarrow y_H = c\frac{1}{\sqrt{x}},\ c \in \mathbb{R}.$

(I) Variation der Konstanten, Ansatz: $y_S = c(x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$c'(x) = \sqrt{x}\sin x e^{\frac{1}{2}\ln x} = x\sin x \Longrightarrow c(x) = \sin x - x\cos x$, **F 4**.

Also $y_S = (\sin x - x\cos x)\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Lösungsgesamtheit der DGL ist $y = (\sin x - x\cos x)\dfrac{1}{\sqrt{x}} + c\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $c \in \mathbb{R}$.

Einsetzen von $x = \pi$, $y = 2\sqrt{\pi}$ ergibt $2\sqrt{\pi} = \dfrac{c}{\sqrt{\pi}} + \pi\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, also $c = \pi$.

Lösung der AWA ist $y = (\sin x - x\cos x)\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.

Bemerkungen:

Zu (H): Häufig sind hier Umformungen durchzuführen wie:

$$\ln|y| = x - \tfrac{1}{2}\ln|x| + k \Longrightarrow y = c\frac{e^x}{\sqrt{|x|}}.$$

Zu (I): Ist man sicher, $y_H = ce^{-A(x)}$ richtig berechnet zu haben, verzichtet man auf die Kontrolle "c fällt heraus" und benutzt $c(x) = \int r(x)e^{A(x)}\,dx$.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm