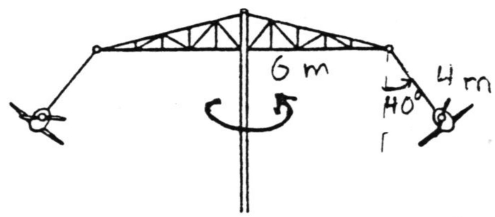
Winter 2015/2016, Prof. Thomas Müller, IEKP, KIT

Aufgabenblatt 8; Übung am 16.Dezember (Mittwoch)

1. *Kettenkarussel*
   Auf dem Jahrmarkt sind die "Shuttles" der Attraktion "Shuttle in die Unendlichkeit" an 4 m langen Ketten l ausgehängt, welche sich an 6 m langen horizontalen Armen r_1 um die vertikale Achse drehen (siehe Zeichnung).



   (a) Wie lange dauert eine Runde, wenn die Shuttles so ausschwingen, dass sie eine Winkel von 40^o zur Vertikalachse bilden.
   A:

$$\tan\alpha = \frac{F_R}{mg}; \quad F_R = mr\omega^2; \quad r = r_1 + r_2 = r_1 + l\sin\alpha \tag{1}$$

$$\tan\alpha = \frac{m(r_1 + l\sin\alpha)\omega^2}{mg} = \frac{(r_1 + l\sin\alpha)\omega^2}{g} \tag{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\tan\alpha}{r_1 + l\sin\alpha}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_1 + l\sin\alpha}{g\tan\alpha}} \tag{3}$$

   (b) Welche mittlere Leistung wird benötigt um diese Geschwindigkeit in 20 s zu erreichen.

$$P = \frac{E}{t}; \quad E = E_{KIN} + E_{POT} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{4}$$

   $t = 20s; \quad m = 2\cdot 120kg = 240kg; \quad h = l(1-\cos\alpha); \quad v = U/T = 2\pi r/T = r\omega$

$$v = r\sqrt{\frac{g\tan\alpha}{r}} = \sqrt{rg\tan\alpha} \tag{5}$$

$$P = mg\frac{\frac{1}{2}r\tan\alpha + l(1-\cos\alpha)}{t} \tag{6}$$

   Ergebnisse: $U = 53,85m; h = 0,94m; r = 8,57m; \omega = 0,989\frac{1}{s}; T = 6,35s; v = 8,48\frac{m}{s}; P = \frac{E_{KIN}+E_{POT}}{t} = \frac{8631J+2246J}{20s} = 543,8W$

2. **Hollywood Aktion-Kracher**
Was wird benötigt:

(a) **Trägheitsmoment** von Zylinder (bzw. Halbzylinder) bezüglich Symmetrieachse, Kugel (bzw. Halbkugel) bezüglich Symmetrieachse und Quader bezüglich zweier Achsen. Definition des Trägheitsmoments (moment of inertia (MOI)) bezüglich der Achse A, wobei $r_\perp$ der senkrechte Abstand des Massenelementes dm von der Drehachse ist.

$$\theta = \int_V r_\perp^2 dm = \int_V r_\perp^2 \rho dV \tag{7}$$

(b) **Trägheitsmomente sind additiv** d.h. die Trägheitsomenten für den Quader, Halbzylinder, Halbkugel können getrennt voneinander betrachtet werden.

(c) **Satz von Steiner**
Wenn sich ein Körper um eine Achse B dreht, die nicht durch den Schwerpunkt S (oder den Nullpunkt, der das Grundträgheitsmoment definiert hier: der symmetrischen Drehpunkt D_T) geht, so kann man sein Trägheitsmoment bezüglichg dieser Achse leicht berechnen, wenn sein Trägheitsmoment I_S bezüglich einer zu B parallelen Achse A durch den Schwerpunkt bekannt ist. (Herleitung siehe Anhang.)

$$\theta_B = \int_V R^2 dm = \int_V (r+a)^2 dm = \int_V r^2 dm + 2a \int_V r dm + a^2 \int_V dm \tag{8}$$

$$\theta_B = \theta_S + a^2 M \tag{9}$$

(d) **Rotationsenergie**

$$E_{ROT} = \frac{1}{2}\theta\omega^2 \tag{10}$$

(e) **Trick:** Wir berechnen die Trägheitsmomente bezüglich der Rotationssymmetrischen Achsen (für Zylinder und Halbzylinder). Bei **Halb**zylinder und **Halb**kugel kann man den Satz von Steiner dann jedoch nicht **direkt** anwenden, da der Steinersche Satz nur im Schwerpunkt gilt, nur dort ist $\int rdm = 0$. Wir werden den Steinerschen Satz zweimal in Folge anwenden. um vom Schwerpunkt zum symmetrischen Punkt und dann zum Drehpunkt zu kommen.

Volumen und Massen
Quader: $V = abc$, $M_Q = \rho V = \rho abc = 300\frac{kg}{m^3} \cdot 1.5m \cdot 3m \cdot 1m = 1350kg$
Halbzylinder (Auto1):
$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$, $M_{HZ} = \rho V = \rho\frac{1}{2}\pi r^2 h = 50\frac{kg}{m^3} \cdot 0.5\pi 0.8^2 m^2 \cdot 1.5m = 75.4kg$
Im Prinzip kann man das vernachlässigen, wollen wir jetzt aber nicht machen.
Halbkugel: (Auto2)
$V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3$, $M_{HK} = \rho V = \rho\frac{2}{3}\pi r^3 = 44.2kg$
Trägheitsmomente
Trägheitsmoment eines **Quaders** mit den Achsen x (Länge a), y (Länge b),z (Länge c) bezüglich seiner Symmetrieachse (hier z) **(konstante Dichte)**:

$$\theta_z = \rho \int_V r^2 dV = \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} dy \int_{-c/2}^{+c/2} (x^2 + y^2) dz \tag{11}$$

Da das Problem sowohl von der Geometrie, als auch von der Massenverteilung symmetrisch ist, können wir die unteren Grenzen durch 0 ersetzen und das gesamte Integral mit 8 multiplizieren:

$$\theta_z = 8\rho \int_0^{+a/2} dx \int_0^{+b/2} dy \int_0^{+c/2} dz(x^2 + y^2) \tag{12}$$

Integration nach x:

$$\theta_z = 8\rho \int_0^{+c/2} dz \int_0^{+b/2} dy(\frac{1}{3}(a/2)^3 + (a/2)y^2) \tag{13}$$

Integration nach y:

$$\theta_z = 8\rho \int_0^{+c/2} dz(\frac{1}{3}(a/2)^3(b/2) + \frac{1}{3}(a/2)(b/2)^3) \tag{14}$$

Integration nach z:

$$\theta_z = 8\rho(c/2)(\frac{1}{3}(a/2)^3(b/2) + \frac{1}{3}(a/2)(b/2)^3) = \rho\frac{abc}{12}(a^2 + b^2) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2) \tag{15}$$

Hieran sieht man, dass in dem Ergebnis oft nur die Masse, Kombination der Quadrate characteristischer Längen des Problems senkrecht zur Rotationsachse und ein Vorfaktor auftreten.
Achtung die Autos drehen um verschiedene Achsen, d.h. die Formel gilt, aber die Zahlenwerte sind verschieden!!
Trägheitsmoment eines **Zylinder** bezüglich seiner Symmetrieachse (hier z):

$$\text{Volumenelement in Zylinderkoordinaten: } dV = rdrd\phi dz \tag{16}$$

$$\theta_z = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int \int \int (x^2 + y^2) dxdydz \Rightarrow \rho \int \int \int r^2 r dr d\phi dz \tag{17}$$

Konkret mit Grenzen:

$$\theta = \rho \int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\phi dz = \rho \frac{R^4 \pi h}{2} = \frac{M_Z R^2}{2} \tag{18}$$

Halbzylinder Grenze von $2\pi \to \pi$; $M_Z \to M_{HZ}$

$$\theta = \frac{M_{HZ} R^2}{2} \tag{19}$$

Trägheitsmoment einer **Kugel** bezüglich ihrer Symmetrieachse :

$$\theta_z = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int \int \int (x^2 + y^2) dxdydz \tag{20}$$

$$\text{Volumenelement in Kugelkoordinaten: } dV = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \tag{21}$$

Konkret mit Grenzen (mit $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \theta$ siehe Kugelkoordinaten):

$$\theta = \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta r^4 \sin^3 \theta \tag{22}$$

Integration mittels Bronstein, Maple, Produktintegration oder:

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{4}(3 \sin\theta - \sin 3\theta)$$

Integration nach ϕ

$$\theta = \rho 2\pi \int_0^R r^4 dr \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{4}(3 \sin\theta - \sin 3\theta) \tag{23}$$

nach elementarer Integration und einsetzen der Masse (Volumen : $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$

$$\theta = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} M R^2 \tag{24}$$

Halbkugel Grenze von $2\pi \to \pi$; $M_K \to M_{HK}$

$$\theta = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} M_{HK} R^2 \tag{25}$$

Achtung: bis hier alles bezüglich der Symmetrie-Achse gerechnet.
———(Jetzt: alle intrinschischen Trägheitsmomente bekannt)————

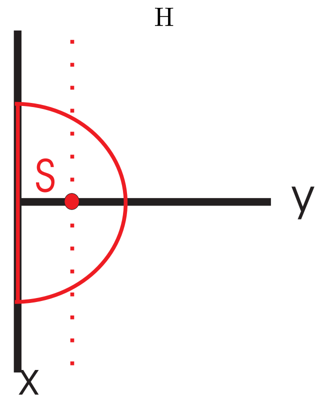


Abbildung 1: Schwerpunkt eines Halbkreises (Halbzylinder; Halbkugel)

Berechnung des Schwerpunkts des Halbzylinders
(Symmetriebetrachtung) (Siehe Bild 1)

$$dS = \frac{1}{M} \cdot y \cdot dm = \frac{1}{M}\rho y dV = \frac{1}{M}\rho \cdot r^2 \cdot \sin\phi \cdot dr \cdot \cdot d\phi \cdot dz \tag{26}$$

Mit der Darstellung von y in Polar(Zylinder)Koordinaten. $y = r \cdot \sin\phi$, $dV = r \cdot dr \cdot d\phi \cdot dz$ (beim Halbkreis =Zylinder mit infinitesimale Dicke(Höhe) ($\Rightarrow$ Volumen) Integration über den Bereich des Halbzylinder (wobei das Ergebnis für die z Achse offensichtlich die Mitte ist)

$$S = \frac{1}{M}\rho \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\phi d\phi \int_0^h dz = \frac{1}{M}\rho \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R [-\cos\phi]_0^\pi [z]_0^h = \frac{1}{M}\rho\frac{1}{3}R^3 2h = \frac{4R}{3\pi} \tag{27}$$

mit $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M \cdot 2}{\pi R^2 h}$

$$S = \frac{4R}{3\pi} \tag{28}$$

Berechnung des Schwerpunkts der Halbkugel
Man lege den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Kugel und betrachte die obere Hälfte der Kugel, dann ist aus Symmetriegründen $x_m = y_m = 0$
Da $M_{HK} = \rho \cdot \frac{2}{3}\pi R^3$ ist, gilt: $z_m = \frac{3}{2\pi R^3}\ {}^K \int\int\int zdV$
In Kugelkoordinaten: $K : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
\int\int\int zDV &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} r\cos\theta r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 [\frac{1}{2}\sin^2\theta]_0^{\pi/2} d\phi dr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\phi dr = \frac{1}{4}\pi R^4
\end{aligned}$$

$$z_m = S = \cdot\frac{1}{4}\pi R^4 = \frac{3}{8}R \tag{29}$$

Achtung: die Schwerpunktsberechnung der Halbkugel ist bei der Lage der Rotationsachse eigentlich nicht notwendig und nur zur Vollständigkeit aufgeführt. (siehe unten)

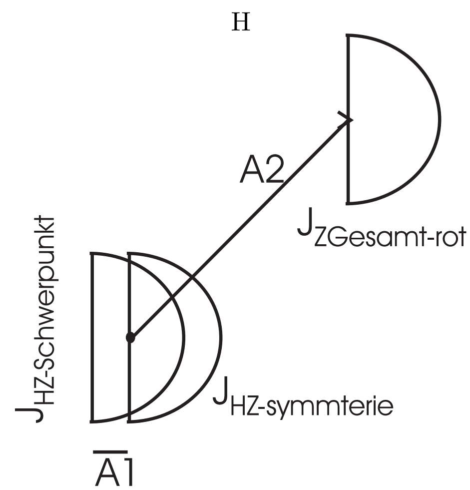


Abbildung 2: Anwendung des Satz von Steiner

—-Ende der Schwerpunktsberechnung:————
Wie bekommt man nun das Träghheitsmoment bezüglich der Rotationsachse (ROT-Achse ist parallel zur Symmetrieachse)?
Wir wenden den Satz von Steiner zweimal in Folge an siehe Bild 2:
Beim Satz von Steiner ist zu beachten:

$$\theta_B = \theta_S + a^2 M$$

- Er gilt für das Trägheitsmoment im Schwerpunkt θ_S!
- Als Abstand a ist der direkte Abstand der Rotationsachsen einzusetzen (rechter Winkel)
- Man kann ihn auch zweimal in Folge einsetzen, wenn man das Trägheitsmoment im Schwerpunkt nicht kennt. (diesen Fall brauchen wir für Auto 1). Für Auto 2 ist diese Betrachtung nicht nötig, da die Verbindungslinie vom Schwerpunkt zur ROT-**Achse** und die Verbindungslinie vom berechneten Trägheitsmonent zur ROT-Achse gleich sind (

$$\theta_{HZ-symmetrie} = \theta_{HZ-Schwerpunkt} + \vec{a1}^2 M \;\rightarrow\; \theta_{HZ-Schwerpunkt} = \theta_{HZ-symmetrie} - \vec{a1}^2 M \tag{30}$$

$$\theta_{ges} = (\vec{a1} + \vec{a2})^2 M + \theta_{HZ-Schwerpunkt} \tag{31}$$

30 in 31 eingesetzt:

$$\theta_{ges} = \vec{a1}^2 M + \vec{a2}^2 M + 2\vec{a1}\vec{a2}M + \theta_{HZ-symmetrie} - \vec{a1}^2 M = M\vec{a2}^2 + 2M\vec{a1}\cdot\vec{a2} + \theta_{HZ-symmetrie} \tag{32}$$

$\theta_{HZ-symmetrie}$ = das oben intrinsisch berechnete Trägheitsmoment des Halbzylinders bezüglich der Symmetrieachse Formel 19.

Abstände von Rotationsachse D zu den Mittelpunkten der berechneten Trägheitselementen T: (aus Zeichnung!)
Achtung hier wird nur 2D gerechnet, die benutzen Koordinaten sollten verständlich sein, passen jedoch nicht mit den Aufgabenbildern überein.
Vektoren:
$\vec{a2}_{auto1} = (1.30; 0.50)$
$\vec{a2}_{auto2} = (1.30; 0)$ Direkte Verbindung zur ROT-Achse. (deshalb ist auch die zweimalige Anwendung des Satz von Steiner nicht notwendig. Funktioniert aber auch, dann wird der zusätzliche Term $2\vec{a1} \cdot \vec{a2} M = 0$, (Skalarprodukt bei rechtem Winkel)
$\vec{a1}_{auto1} = (0; \frac{4}{3\pi} \cdot 0.8)$
$\vec{a1}_{auto2} = (0; \frac{3}{8} \cdot 0.75)$
0.8 und 0.75 stehen hier für die Radien des Halbzylinder und Halbkugel.

Quader $\overline{DT_Q} = 1.3m \ \rightarrow \ \vec{a3} = (1.3; 0)$
$\vec{a1}_{auto1} \cdot \vec{a2} = \frac{2 \cdot 0.8}{3\pi}$
$\vec{a1}_{auto2} \cdot \vec{a2} = 0$

(a) Trägheitsmomente können addiert werden.

- Auto 1

$$\theta_1 = \theta_{quader} + \theta_{halbzylinder} \tag{33}$$

Siehe Formeln 15,19 und 32

$$\theta_1 = \frac{M_Q}{12}(a^2+b^2)+M_Q\vec{a3}^2 \qquad +M_{HZ}\vec{a2}^2+2M_{HZ}\vec{a1}\cdot\vec{a2}+\frac{M_{HZ}R^2}{2} \tag{34}$$

- Auto 2

$$\theta_2 = \theta_{quader} + \theta_{halbkugel} \tag{35}$$

$$\theta_2 = \frac{M_Q}{12}(a^2+c^2)+M_Q\vec{a3}^2 \qquad +M_{HK}\vec{a2}^2+2M_{HK}\vec{a1}\cdot\vec{a2}+\frac{1}{5}M_{HK}R^2 \tag{36}$$

Mit $\vec{a1} \cdot \vec{a2} = 0$ Winkel 90^o

$$\theta_2 = \frac{M_Q}{12}(a^2+b^2)+M_Q\vec{a3}^2 \qquad +M_{HK}\vec{a2}^2+\frac{1}{5}M_{HK}R^2 \tag{37}$$

Achtung die Trägheitsmomente der Quader sind in Bezug auf die Rotationsachse definiert und deshalb in unserem Fall für die beiden Autos unterschiedlich.

(b) Rotationsenergien und Endgeschwindigkeiten:

$$E_{ROT} = \frac{1}{2}\theta_1\omega_1^2 \tag{38}$$

$$E_{kin1} - E_{ROT} = E_{kin2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}\theta\omega^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{39}$$

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{\theta}{m}\omega^2} \tag{40}$$

Die waagrechten Autowürfe in Kurzform:

$$E_{kin-neu} = E_{kin} - E_{rot} \Rightarrow v_{neu} \Rightarrow Flugweite s_x \tag{41}$$

Auto 1: $\theta = 3602.5\ kg \cdot m^2$
$E_{Rot} = 7205\ J$
$S_x = 159.5\ m$

Auto 2: $\theta = 4814.5\ kg \cdot m^2$
$E_{Rot} = 21663\ J$
$S_x = 158.4\ m$

(c) Der Regisseur steckt noch in seiner kindlichen Weihnachtsmann Phantasie, dem ist nicht zu helfen.

Übungsleiter: Frank Hartmann, IEKP, CN, KIT
Tel.: +41 75411 4362; Mobil - immer
Tel.: +49 721 608 23537 - ab und zu
Email: Frank.Hartmann@kit.edu
www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/∼hartmann/Mechanik.htm

Lexikon (Anhang):

Der Satz von Steiner

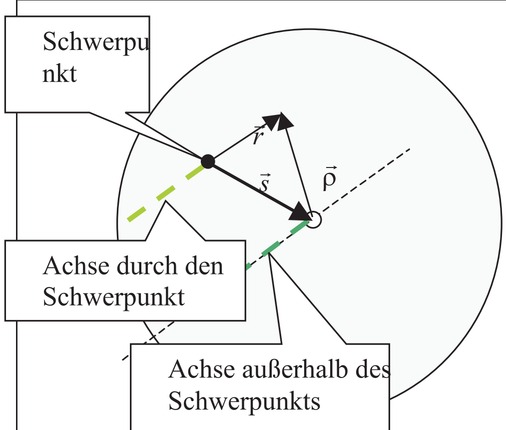
Formel	Erläuterung
$J = J_S + M \cdot s^2$	Das Trägheitsmoment J eines Körpers der Masse M bezüglich einer Drehachse im Abstand s vom Schwerpunkt ist die Summe zweier Trägheitsmomente:
J_S	Trägheitsmoment des Körpers bezüglich einer zur Drehachse parallelen Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft
$M \cdot s^2$	Trägheitsmoment eines Massenpunktes der Masse M im Abstand s von der Drehachse
	Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Schwerpunkt.
$\vec{\rho} = \vec{s} - \vec{r}$	Der Ortsvektor $\vec{\rho}$ von der Drehachse außerhalb des Schwerpunkts zum Massenpunkt ist die Differenz zwischen dem Vektor $\vec{s}$ zwischen den Achsen und dem Ortsvektors $\vec{r}$ von der Schwerpunktachse zum Massenpunkt.
$\vec{\rho}^{\,2} = (\vec{s} - \vec{r})^2 = s^2 + r^2 - 2 \cdot \vec{s} \cdot \vec{r}$	
$\int \vec{\rho}^{\,2} dm = s^2 \cdot \int dm + \int r^2 dm - 2 \cdot \vec{s} \cdot \int \vec{r} dm$	Definition des Trägheitsmoments bezüglich der Achse außerhalb des Schwerpunkts.
$\int \vec{r} dm = 0$	Null folgt aus der Definition des Schwerpunkts, weil der Koordinatenursprung im Schwerpunkt liegt.
$\vec{x}_S = \dfrac{\int \vec{r} dm}{M} = 0$	
$\int \vec{\rho}^{\,2} dm = s^2 \cdot \int dm + \int r^2 dm$	Es folgt daraus der Satz von Steiner
$J = s^2 \cdot M + J_S$	

Tabelle 1 Der Satz von Steiner: Herleitung